MEMORIAS

Encuentro de GEOMETRÍA y sus aplicaciones

Del 19 al 21 de junio de 2019

Instituto Pedagógico Nacional - Universidad Pedagógica Nacional

Organizan

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

ESCUELA COLOMBIANA DE INGENIERÍA JULIO GARAVITO

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

MEMORIAS

Encuentro de GEOMETRÍA y sus APLICACIONES

Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones

Edición

Carmen Samper y Leonor Camargo

Diseño de logo

Viviana Torres
Dirección de Comunicaciones y Mercadeo Escuela
Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Diagramación de portada y portadillas

Fredy Espitia Ballesteros
Grupo Interno de Trabajo Editorial
Universidad Pedagógica Nacional

ISSN: 2346-0539

© 2019 Universidad Pedagógica Nacional
© 2019 Autores

Se autoriza la reproducción total o parcial de algún artículo, previa cita de la fuente:

Samper, C. y Camargo, L. (Eds.) (2019). *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Todos los documentos publicados en estas memorias se distribuyen bajo la Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial 4.0 Internacional.

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 No. 11 86
Bogotá, Colombia

PRESENTACIÓN

Pocos eventos tienen la fortuna de llegar a su vigésima cuarta versión. Con mucho esfuerzo, dedicación y también orgullo, llegamos a esta versión del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, cuya trayectoria lo posiciona como uno de los más importante en el área. Es un evento académico de carácter internacional que en esta oportunidad ha sido organizado por las universidades Distrital Francisco José de Caldas, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Gravito y Universidad Pedagógica Nacional.

El propósito del Encuentro ha sido siempre convocar a matemáticos, investigadores, profesores y estudiantes de matemáticas o de educación matemática para favorecer el intercambio de ideas y experiencias. Con el Encuentro esperamos contribuir a la difusión de resultados de investigaciones en geometría, su didáctica y sus aplicaciones; a la formación de estudiantes de matemáticas y de educación matemática y docentes de primaria, secundaria y educación superior en temáticas relacionadas con la geometría, su didáctica y sus aplicaciones, y finalmente, al fomento del estudio de los fundamentos de la geometría, su filosofía, sus métodos, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y sus relaciones con otras ramas de las matemáticas.

El selecto grupo de invitados nacionales y extranjeros es garantía del nivel académico del evento y certeza de que este será un espacio de muchos aprendizajes. Contamos con la presencia de cuatro profesores de reconocida trayectoria académica a nivel internacional: José Román Galo (Universidad de Córdoba, España), Eirc Hackenholz (Francia), Alain Kuzniak (Universidad París – Diderot, Francia) y José Villella (Universidad Nacional de San Martín, Argentina). A nivel nacional, están invitados a participar, con una conferencia o un cursillo, profesores e investigadores de varias instituciones educativas colombianas: Colombia Aprendiendo, Sociedad Colombiana de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño, Universidad Konrad Lorenz, Universidad de los Andes, Universidad de Nariño, Universidad Industrial de Santander, Universidad Nacional de Colombia, Instituto GeoGebra, Universidad de Cauca, Universidad de los Andes, Universidad del Rosario, Universidad del Quindío, Universidad de Tolima, Universidad del Valle, y de las entidades organizadoras.

En estas memorias se recogen escritos que corresponden a lo que los autores presentarán en el Encuentro. Algunos de los documentos son de los invitados a participar en el evento. Los demás pertenecen a aquellas personas que culminaron con éxito dos procesos: i) la evaluación de la calidad académica de su propuesta, realizada por miembros del Comité Académico, que les dio el derecho de presentar una comunicación breve o un póster en el evento, y ii) la invitación a publicar en las *Memorias* y su participación en el proceso de edición del escrito, proceso que culminó favorablemente.

Los escritos versan sobre las siguientes temáticas: geometría en la educación matemática, geometría e historia, geometría y otras ramas de la matemática, geometría y artes, geometría y tecnología, geometría e inclusión y temas de geometría.

Comité Organizador, Bogotá, junio de 2019

Organización del Encuentro

Comité organizador

Universidad Pedagógica Nacional

Carmen Samper, Tania Plazas, Leonor Camargo, Camilo Sua, Claudia Vargas

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Carlos Álvarez, Alicia Guzmán

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Francisco Camelo

Comité de revisión académica

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

Alicia Guzmán, Carlos Álvarez, Julián Agredo, Nora Rojas, Raúl Chaparro

Fundación AprendEs

Miriam Ortiz

Fundación Universitaria Konrad Lorenz

Carlos Díez

Instituto GeoGebra Bogotá

William Jiménez

Universidad de Antioquia

Carlos Jaramillo, John Durango

Universidad de los Andes

Mikhail Malakhaltsev

Universidad de Nariño

Óscar Soto

Universidad del Quindío

Efraín Hoyos

Universidad del Rosario

Rafael Méndez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Claudia Castro, Edwin Carranza, Francisco Camelo, Jaime Fonseca, Olga León,

Universidad Industrial de Santander

Jenny Acevedo, Luis Pérez

Universidad Nacional de Colombia

Iván Castro, John Cruz, José Ramírez, Leonardo Cano, Yeison Sánchez

Universidad Pedagógica Nacional de México

Ivonne Sandoval

Universidad Pedagógica Nacional

Alberto Donado, Armando Echeverry, Camilo Sua, Carlos Pérez, Carmen Samper, Claudia Vargas, Édgar Guacaneme, Harry Gómez, Ingrith Álvarez, Leonor Camargo, Nubia Soler, Orlando Aya, Óscar Molina, Patricia Perry, Tania Plazas.

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Clara Rojas

Universidad Sergio Arboleda

Juan Carlos Ávila

Universidad del Valle

Luis Carlos Arboleda

ENTIDADES PATROCINADORAS

Belpapel Ltda., Grupo Editorial Norma, DINISSAN, Arisma S. A. y Editorial Santillana.

ENTIDADES AUSPICIADORAS

Instituto Pedagógico Nacional, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Colegio Reyes Católicos

TABLA DE CONTENIDO

PÓSTERES

Conferencias

MÚSICA: UNA DANZA GEOMÉTRICA; GEOMETRÍA: UNA ABSTRACCIÓN MUSICAL

Juan Sebastián Arias
Universidad Nacional de Colombia
jsariasv1@gmail.com

Proponemos una dualidad entre *música* y *geometría* en la cual contrastamos a las piezas musicales, entendidas como *variaciones* de patrones geométricos, con las geometrías, entendidas como colecciones de propiedades *invariantes* respecto a grupos de transformaciones (con posible significado musical). Bajo esta dualidad, presentamos varios ejemplos, en armonía, contrapunto e interpretación musical, donde superficies geométricas básicas ganan cierto *movimiento* y dan *cuerpo* y *estructura* a las piezas musicales.

INTRODUCCIÓN

Una de las unificaciones más importantes en la historia de las matemáticas es la definición de una geometría dada por Klein (1893) en su *Programa de Erlangen*. Para Klein, *una geometría* es el estudio de las propiedades *invariantes* respecto a un *grupo*[1] de transformaciones de un espacio. En la geometría euclidiana distancias, áreas y ángulos son invariantes respecto a rotaciones y traslaciones en el plano. En la *geometría afín*, la cual generaliza la geometría euclidiana, el paralelismo entre rectas es preservado bajo transformaciones afines, las cuales son transformaciones lineales invertibles del plano combinadas con traslaciones (véase la Figura 1).

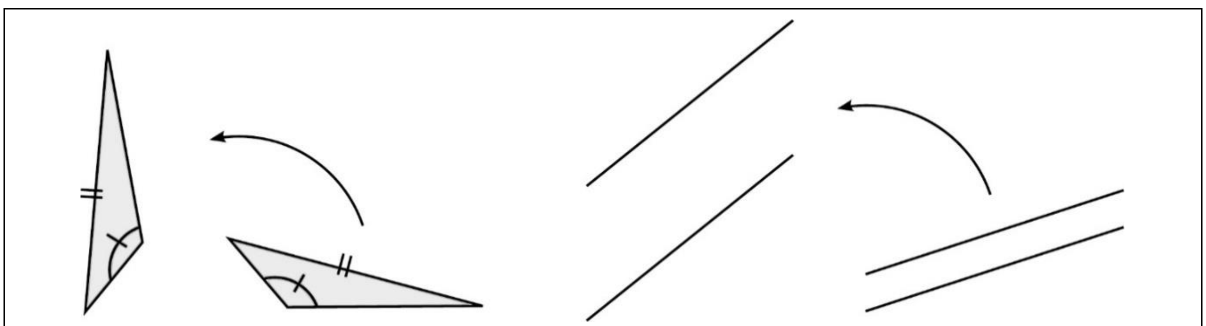


Figura 1. Preservación de distancias, áreas y ángulos bajo una transformación euclidiana (izquierda) y preservación del paralelismo bajo una transformación afín (derecha).

[1]Informalmente, los axiomas de grupo son los requerimientos mínimos que se le deben colocar a un conjunto G con una operación binaria $*$ de tal manera que las ecuaciones lineales de la forma $a * x = b$ (lineales) tengan solución. Estos requerimientos son: 1. Existencia de un elemento neutro; 2. Asociatividad de la operación, 3. Existencia de inversos.

Arias, J. (2019). Música: una danza geométrica; geometría: una abstracción musical. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 11-23). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Por otro lado, en la *música occidental*, los grupos de transformaciones se manifiestan de una manera *opuesta*. En primer lugar, el uso de *simetrías* en música se origina probablemente por la necesidad *práctica* de componer una partitura de manera efectiva en corto tiempo.[2] No es extraño, entonces, que las construcciones básicas del contrapunto y la armonía (inversión, retrogrado, transposición, aumentación) correspondan a simetrías básicas de la geometría afín. Sin embargo, en música no estudiamos los invariantes respecto a simetrías, sino que por el contrario, en las piezas musicales, a partir de esas simetrías variamos los objetos musicales (notas, acordes, melodías, escalas, duraciones) para plasmarlos en una obra.

De acuerdo a lo anterior, esquematizamos[3] la relación entre música y geometría mediante el diagrama de la Figura 2. En la izquierda del diagrama tenemos una correspondencia (*invariantes*) de grupos a geometrías que asocia a cada grupo de transformaciones de un espacio su geometría según Klein. En la derecha, tenemos una correspondencia (*variaciones*) que produce variaciones de material musical bajo la acción de un grupo de simetrías dado. Estas correspondencias poseen correspondencias que van justamente en las direcciones contrarias. Por un lado, a cada geometría le podemos asociar el grupo de todas las transformaciones que preservan cada una de las propiedades de la geometría. Por otro lado, el proceso que a una pieza musical le asocia el grupo de simetrías en juego es el análisis musical. De esta manera, tenemos un movimiento de vaivén conceptual que oscila entre las piezas musicales y las geometrías.

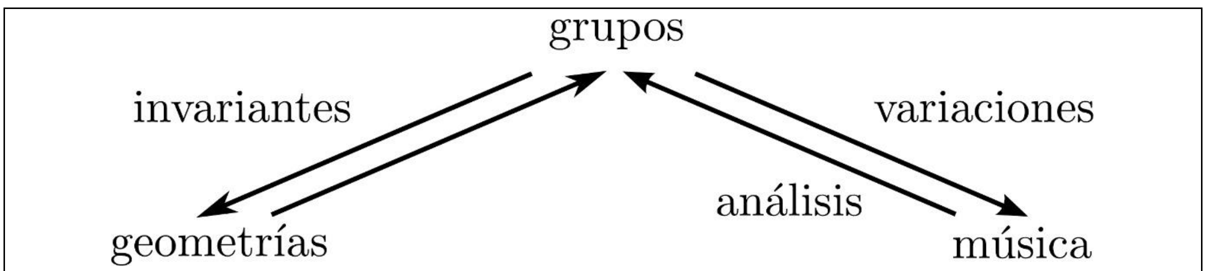


Figura 2. Diagrama de relaciones entre geometría y música

En este escrito mostramos dos ejemplos de cómo pasar de la geometría a la música y dos ejemplos de cómo pasar de la música a la geometría, en el ámbito de la armonía y el contrapunto occidentales. Veremos que los vaivenes asociados con esos movimientos pueden generar procesos creativos tanto en música como en matemáticas. Para finalizar, observamos cómo gracias a la *gestualidad* (a medio camino entre música y geometría) es posible recobrar el movimiento corporal intrínseco que existe en las transformaciones y en las piezas musicales, lo cual permite la interpretación corporal

[2] Véase Mazzola, Mannone y Pang (2016, p. 11).

[3] Este esquema no pretende ser estrictamente formal, sino presentar una orientación conceptual para el artículo. Probablemente, una formalización pueda lograrse usando adjunciones categóricas.

e instrumental de estas últimas. De allí nuestra visión de la música como una danza geométrica, en la cual figuras geométricas sencillas ganan movimiento y se desenvuelven en el tiempo.

ESPACIOS MUSICALES Y CONSTRUCCIONES BÁSICAS

Antes de abordar los ejemplos centrales de este escrito, necesitamos algunos modelos matemáticos básicos que ocurren en música.

La *partitura* tradicional de la música occidental puede situarse en el plano $\mathbb{R}^2$, donde cada pareja (t, a) representa un evento sonoro con *altura* o *tono* a que ocurre en un instante de tiempo t (véase la Figura 3). Las unidades que se toman para las alturas y el tiempo se escogen a conveniencia. Usualmente, las alturas pueden estar dadas por frecuencias o nombres de notas y los tiempos pueden estar en segundos o unidades de pulso.

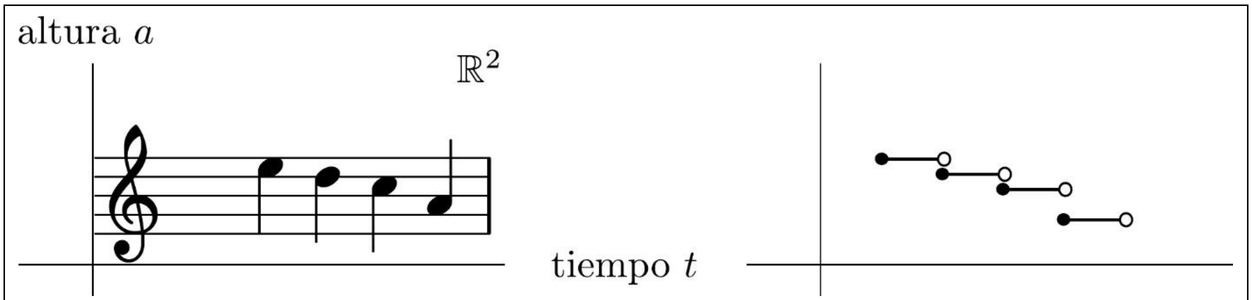


Figura 3. El espacio de la partitura

El *espacio de tonos* de la escala equitemperada[4] es el anillo $\mathbb{Z}_{12}$, en el cual identificamos números con tonos como sigue:

0=c, 1=do♯=re♭, 2=re, 3=re♯=mi♭, 4=mi, 5=fa, 6=fa♯=sol♭

7=sol, 8=sol♯=la♭, 9=la, 10=la♯=si♭, 11=si.

De la misma manera, la escala diatónica

Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si,

[4] La escala equitemperada es aquella donde las notas están distribuidas en 12 intervalos iguales a lo largo de una octava.

la cual corresponde a las teclas blancas del piano, suele identificarse con el anillo $\mathbb{Z}_7$. Esto permite simplificar toda la gama de tonos representada por $\mathbb{R}$ (eje vertical en la Figura 3) usando los anillos $\mathbb{Z}_{12}$ y $\mathbb{Z}_7$, utilizando el más conveniente en cada situación.

Por su carácter cíclico, el espacio de tonos y la escala diatónica suelen representarse sumergidos en el círculo unitario como se muestra en la Figura 4.

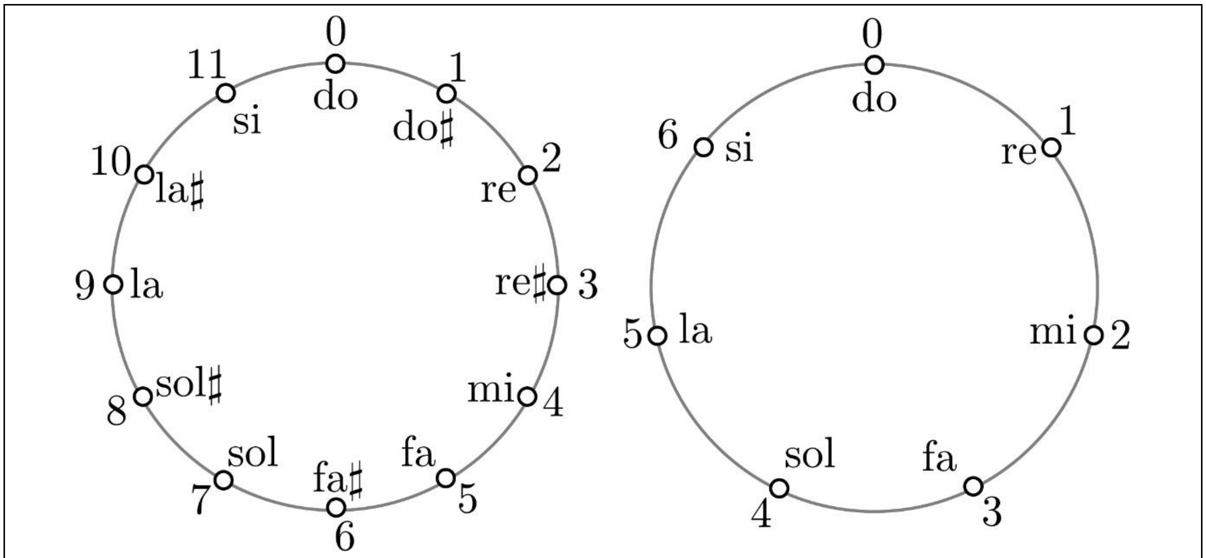


Figura 4. El espacio de tonos (izquierda) y la escala diatónica (derecha)

Ahora, necesitamos construir las simetrías del espacio de la partitura (Figura 3) y de los espacios de tonos (Figura 4), las cuales están inspiradas en las transformaciones euclidianas y afines del plano.

Dado un R-módulo[5] M sobre un anillo conmutativo[6] con unidad R, una *simetría (afín) de* M es aquella de la forma $T^x \circ f$, donde f es un R-automorfismo[7] de M, $x \in M$ y

$$T^x: M \longrightarrow M: a \longmapsto a + x.$$

La colección de todas las simetrías de M forman un grupo respecto a la composición de funciones.

En el caso del $\mathbb{R}$-módulo $\mathbb{R}^2$, es decir, cuando consideramos a $\mathbb{R}^2$ como un espacio vectorial sobre los reales, una simetría tiene la forma $T^{(x,y)} \circ f$, donde $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal correspondiente a una matriz invertible (determinante no nulo) de tamaño 2×2. Estas simetrías son precisamente las *simetrías del espacio de la partitura.* Al considerar todas las simetrías de la

[5] Véase la definición en Atiyah y Macdonald (1969, p. 17).
[6] Véase la definición en Atiyah y Macdonald (1969, p. 1)
[7] Véase la definición en Atiyah y Macdonald (1969, p. 18). Un automorfismo es un isomorfismo de un módulo en sí mismo.

forma $T^{(x,y)} \circ f$, donde f está asociada a una matriz de rotación (es decir, ortogonal con determinante igual a uno), obtenemos el grupo de transformaciones euclidianas del plano.

Por otro lado, si al anillo $\mathbb{Z}_n$ lo consideramos como un $\mathbb{Z}_n$-módulo, entonces una simetría típica de $\mathbb{Z}_n$ suele denotarse $T^x b$ para $x \in \mathbb{Z}_n$ y b invertible en $\mathbb{Z}_n$, donde $T^x b$ se define por $T^x b(a) = ba + x$. En efecto, se puede probar que un R-automorfismo de un anillo R conmutativo corresponde a multiplicar a izquierda por un elemento invertible del anillo. Las simetrías de $\mathbb{Z}_n$ son una herramienta *imprescindible* en teoría matemática de la música y constituyen una *simplificación* de las simetrías del espacio de la partitura.

Finalmente, un *acorde tríada* es un subconjunto de $\mathbb{Z}_{12}$ con exactamente tres elementos. Los acordes suelen dibujarse como triángulos cuyos vértices son los elementos del acorde, en el espacio de tonos. En la Figura 5, observamos dos acordes básicos: Do mayor y La menor. Los demás acordes mayores y menores pueden ser obtenidos por *transposición*, es decir, aplicando una simetría de $\mathbb{Z}_{12}$ de la forma T^x.

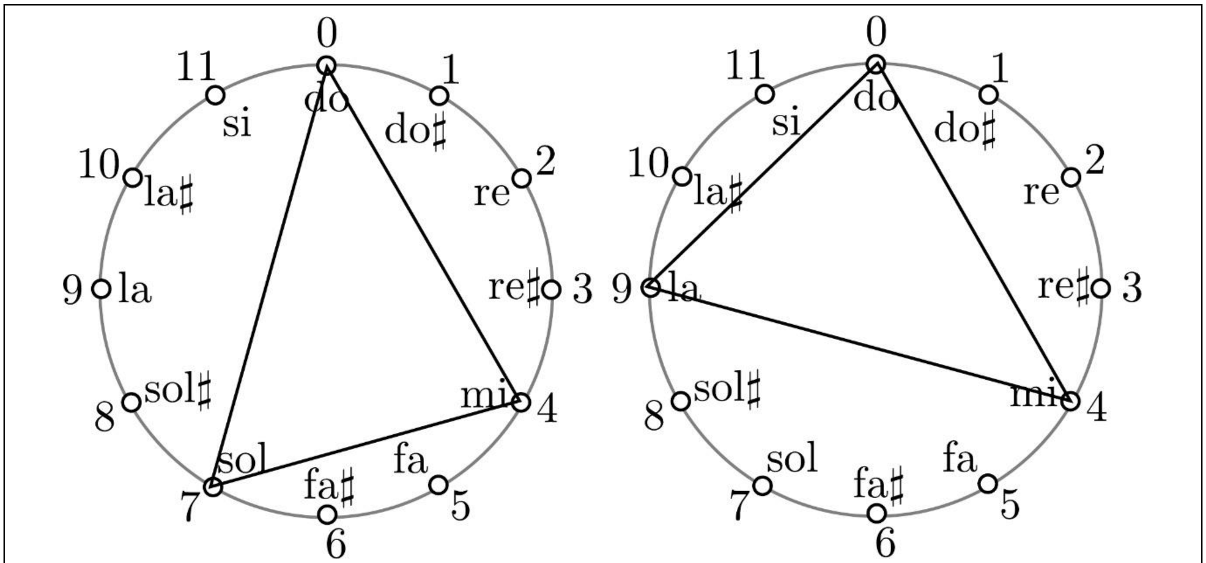


Figura 5. Acorde de do mayor (izquierda) y acorde de la menor (derecha)

J. S. BACH: DE LA GEOMETRÍA AFÍN EN EL PLANO AL CONTRAPUNTO

Las transformaciones básicas del contrapunto, usadas por Bach, están dadas por transformaciones del plano en sí mismo definidas como en la Figura 6.

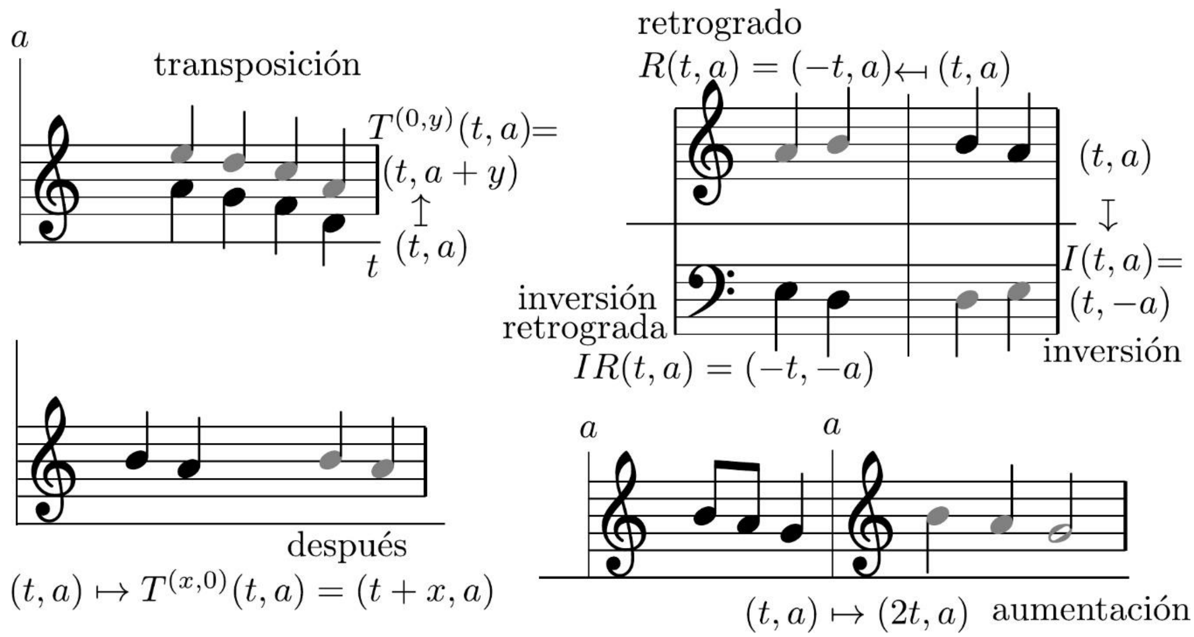


Figura 6. Las transformaciones básicas del contrapunto usadas por Bach

Todas las transformaciones en la Figura 6 son simetrías afines, tal como las definimos en la sección anterior. Podemos destacar que las simetrías de la derecha de la Figura 6, con excepción de la inversión retrograda, no son transformaciones euclidianas pues ellas involucran matrices con determinante distinto de 1.

Un ejemplo de cómo podemos hacer música a partir de estas simetrías es el *No. 7* de los *Catorce Cánones BWV 1087* de Bach. Todos los cánones de esta obra están basados en las primeras ocho notas del bajo del *Aria* de las *Variaciones Goldberg* del mismo autor.

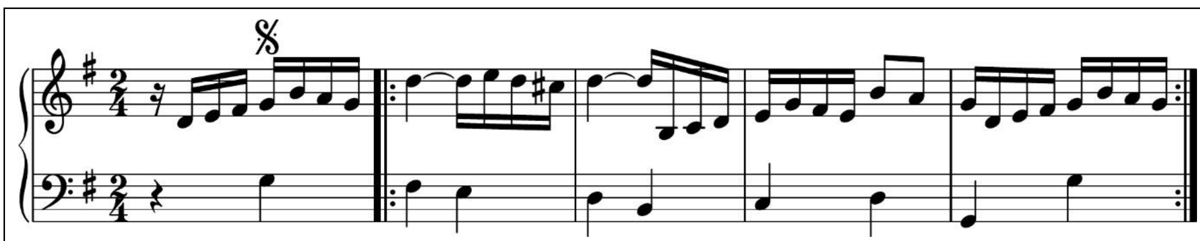


Figura 7. Canon 7: Canon simple sobre el sujeto. A tres voces.

En la Figura 7, encontramos el canon como fue escrito por Bach. En el pentagrama inferior, encontramos el bajo fundamental (*sujeto* S) y, en el pentagrama superior, un contrapunto (C) escrito por Bach. El canon debe resolverse a tres voces, donde la tercera voz (C') es obtenida por *inversión* del contrapunto con respecto a la nota *si* en la escala {sol, la, si, do, re, mi, fa♯} de sol mayor.[8] Si

[8] La alteración do♯ en el segundo compás se trata como do para efectos de la inversión.

identificamos la escala de sol mayor con el anillo $\mathbb{Z}_7$, de tal manera que la nota *si* corresponda al número 2, entonces esta inversión está dada por la simetría $T^4(-1)$ de $\mathbb{Z}_7$. En la Figura 8 apreciamos esta inversión.

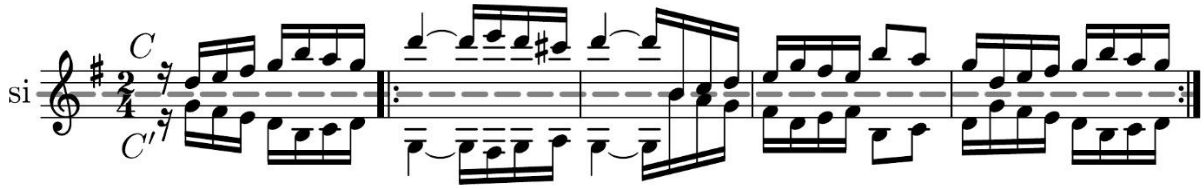


Figura 8. Inversión del contrapunto C con respecto a si (una octava arriba para facilitar la visualización)

Una vez la tercera voz es obtenida (C' en la Figura 8), ella debe comenzar justo donde está puesto el signo sobre la nota *sol* del primer compás en la Figura 7. Esto implica el uso de una simetría del tipo *después* (Figura 6).

El contrapunto C tiene la particularidad de que está escrito por *disminución* e *inversión* del sujeto S. Como se muestra en la Figura 9, las primeras ocho notas del contrapunto corresponden a la disminución del sujeto (un cuarto de la duración original) y su posterior inversión. A partir de esta construcción, se pueden obtener las ocho notas a partir del si en el tercer compás, por transposición en la escala de sol mayor, aplicando la simetría T^{-2} de $\mathbb{Z}_7$.

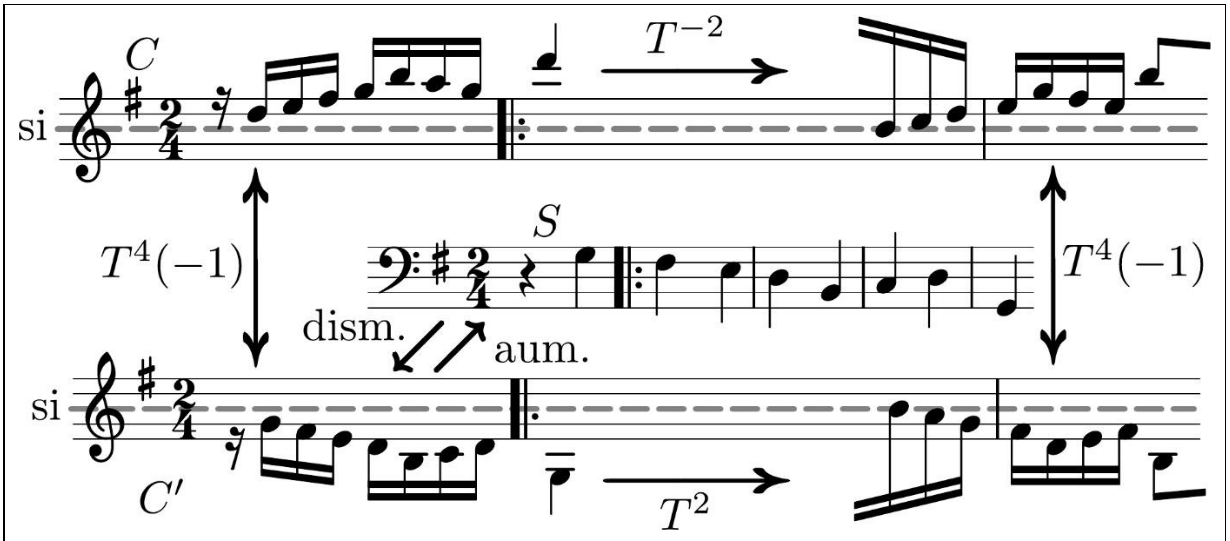


Figura 9. Diagrama conmutativo del *Canon 7*, relación entre las voces

Podemos apreciar el canon resultante en la Figura 10.

Figura 10. Realización del canon 7

Aún no hemos mencionado la simetría *retrogrado*. Aunque Bach no especifica su uso para este canon, podemos aplicar esta simetría al *canon perpetuo* que se forma entre los compases 2 y 5. El resultado es perfectamente lícito: los intervalos entre voces se preservan (R es una isometría) y los paralelismos entre voces son evitados,[9] de la misma manera que en el canon original. Además, en los cánones Nos. 1-4, Bach ya había demostrado la viabilidad del retrogrado del sujeto. Para obtener la pieza resultante, léase la Figura 10 de derecha a izquierda, siguiendo las barras de repetición.

MAZZOLA: DEL SISTEMA TONAL A LA CINTA DE MÖBIUS

La armonía básica del sistema tonal se obtiene construyendo una tríada a partir de cada nota de la escala do mayor, como se muestra a continuación:

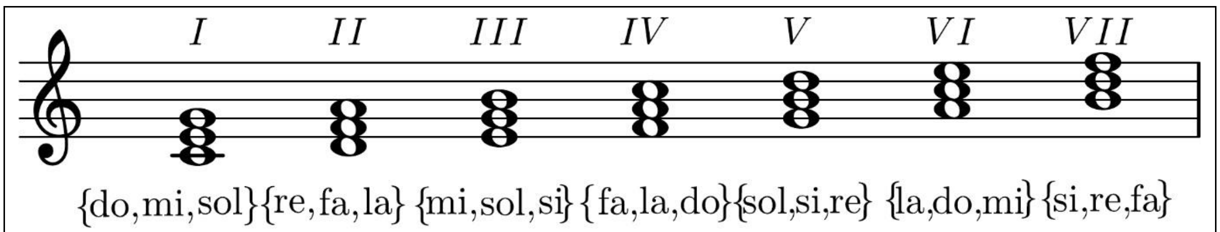


Figura 11. Tríadas de la escala do mayor

Formalmente, la tonalidad *do mayor* (denotada por CM) es el conjunto formado por las tríadas $I, II, III, \dots, VII$, las cuales llamamos *grados* de la tonalidad. Las demás tonalidades pueden ser obtenidas transponiendo la situación.

En armonía (Schoenberg, 2010, p. 39) es importante saber qué notas comparten dos grados de la tonalidad y, especialmente, qué notas comparte un grado dado con los grados distinguidos I (*tónica*), IV (*subdominante*) y V (*dominante*). Estos tres acordes están relacionados con

[9] En efecto, los paralelismos son *evitados* en el contrapunto y la armonía clásicos. Una nueva oposición respecto a la geometría afín: lo que en ella se *preserva*, se *evita* en la música.

sensaciones de *reposo*, *preparación* y *tensión*, respectivamente, y constituyen la base del sistema tonal.

Consideremos entonces la colección $N(\mathrm{CM})$ de subconjuntos de CM con intersección no vacía. Podemos dibujar a $N(\mathrm{CM})$ como un grafo cuyos *vértices* son los grados de CM, con una *arista* por cada dos grados diferentes con intersección no vacía y una *cara* triangular por cada tres grados diferentes con intersección no vacía, como en la Figura 12 (derecha). Al identificar las líneas que unen V y VII en este dibujo, obtenemos una cinta de Möbius (Figura 12, izquierda).

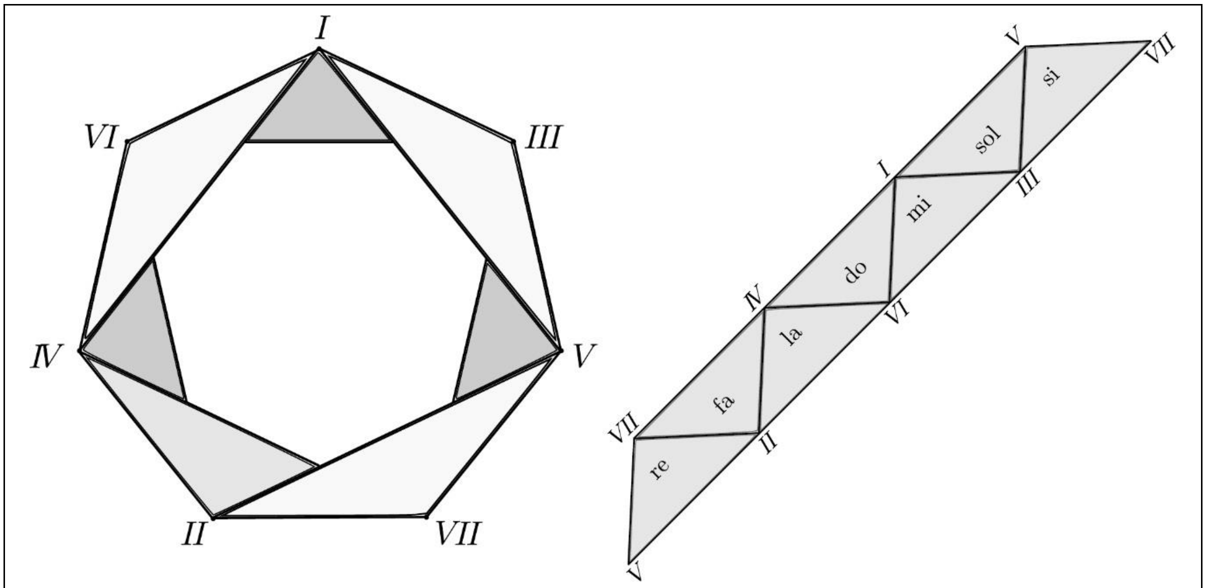


Figura 12. La banda armónica de Mazzola (Agustín y Lluis, 2011)

La obtención de la *banda armónica* no es una mera curiosidad. En efecto, la no orientabilidad de la cinta de Möbius (superficie de una cara) implica que no se pueda definir una función que a cada grado de la tonalidad le asigne un valor de tónica, subdominante o dominante, según la teoría de Hugo Riemann (véase Mazzola et al., 2016, pp. 130-131).

EULER: LA RED DE TONOS

Más allá de si una lista finita de acordes mayores y menores (*progresión armónica*) ocurre dentro del ámbito de la teoría tonal, podemos estudiarla mediante las notas que comparten acordes sucesivos. La razón es que, entre más notas compartan dos acordes, existe una tendencia a una mayor sensación de suavidad en los enlaces armónicos (*conducción de voces*).

La *red de tonos* (*Tonnetz*) fue inventada por Euler[10] y puede construirse como sigue.[11] Consideremos el grafo cuyos *vértices* son los doce tonos, con una *arista* por cada intervalo de *tercera mayor*, *tercera menor* o *quinta justa* entre tonos (diferencia de 3, 4 o 7 en $\mathbb{Z}_{12}$, respectivamente), y una *cara triangular* por cada *tríada mayor o tríada menor* (recuérdense las construcciones de la Figura 5). Estrictamente, la superficie obtenida es un *toro*, aunque suele representarse proyectada sobre el plano (véase la Figura 13).

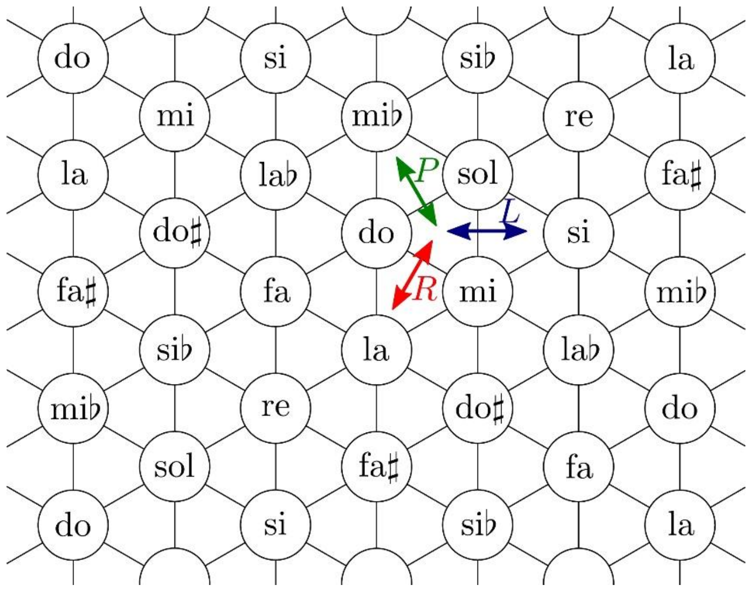


Figura 13. La red de tonos y sus tres operaciones fundamentales

Sobre los acordes (triángulos) de la red de tonos podemos realizar tres operaciones fundamentales, las cuales corresponden a las posibles maneras de enlazar dos tríadas distintas preservando dos notas. La operación P asigna a todo acorde mayor el acorde menor que tiene la misma nota *fundamental*[12] y viceversa. La operación R asigna a todo acorde mayor el acorde menor obtenido al sumar un tono (2 en $\mathbb{Z}_{12}$) a la *quinta*[13] del acorde original, y asigna a todo acorde menor el acorde mayor obtenido al restar un tono a la fundamental del acorde original. Finalmente, la operación L asigna a todo acorde mayor el acorde menor obtenido al restar un semitono (1 en $\mathbb{Z}_{12}$) a la nota fundamental del acorde original, y asigna a todo acorde menor el acorde mayor obtenido al sumar un semitono a la quinta del acorde original. En la Figura 13 se observan estas operaciones aplicadas al acorde do mayor.

[10] Véanse Mazzola et al. (2016, p. 18) y Andreatta (2014).
[11] Existen varias versiones de la red de tonos. Aquí, usaremos aquella en Andreatta (2014).
[12] La nota fundamental del acorde do mayor (menor) es Do.
[13] La quinta del acorde do mayor es sol (intervalo de quinta entre do y sol).

La red de tonos es especialmente útil para explicar progresiones armónicas del romanticismo, en las cuales la experimentación armónica se aparta de la tonalidad y se aprecian ciertos *ciclos* formados con las operaciones fundamentales. A continuación veremos dos ejemplos musicales de ciclos.

MÚSICA DE LA RED DE TONOS

Como señala Cohn (1997), en el segundo movimiento de la *Novena Sinfonía* de Beethoven, compases 143-176, podemos encontrar la progresión de 19 acordes obtenida a partir del acorde Do mayor, aplicando las transformaciones R y L sucesivamente (véase la Figura 14). El ciclo total recorre los 24 acordes de la red de tonos.

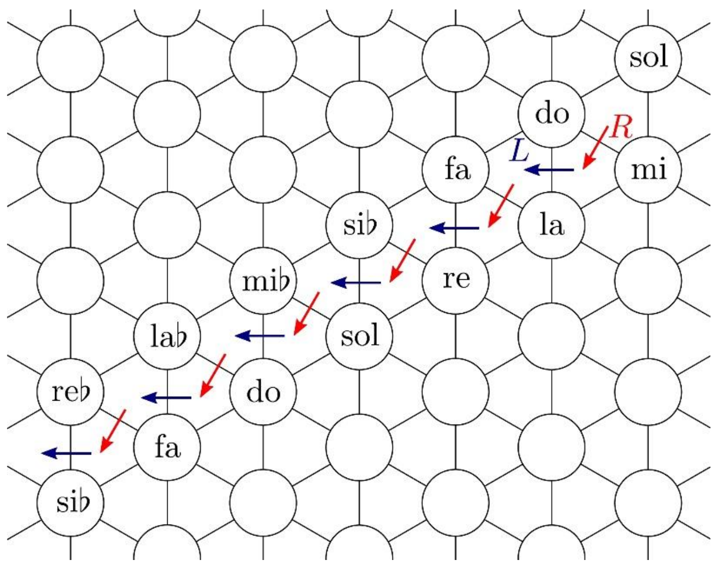


Figura 14. Fragmento del ciclo del segundo movimiento en la *Novena Sinfonía* de Beethoven

Por otro lado, la canción “Shake The Disease”, de la banda Depeche Mode, es un ejemplo sencillo e interesante de la utilidad de las operaciones P, L y R para explicar la unidad de algunas progresiones armónicas en la música *pop*. El coro de esta canción está formado por la progresión de acordes

Re menor, Fa menor, Re ♭ mayor, Si ♭ mayor.

Esta progresión, como señala Capuzzo (2004), no se puede explicar bajo una lógica tonal. Sin embargo, ella tiene dos características fundamentales: la nota fa pertenece a todas las tríadas y hay un movimiento del bajo por terceras. Esto sugiere un buen comportamiento en la conducción de voces y, por lo tanto, en la red de tonos. En efecto, como se muestra en la Figura 15, esta progresión es una abreviación (*elisión*) de un ciclo obtenido al aplicar las operaciones R, P y L, sucesivamente, partiendo de la tríada Re menor.

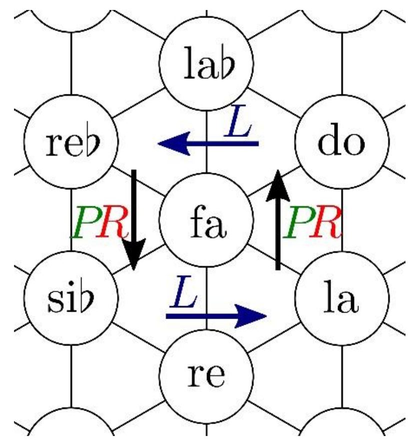


Figura 15. La progresión del coro de "Shake The Disease" como un ciclo abreviado

FINAL: PERSPECTIVAS GESTUALES Y CONCLUSIONES

En toda la discusión anterior, hemos obviado lo que quizá es el aspecto fundamental de la música: *su realización en términos corporales*. Sin embargo, las interpretaciones geométricas que hemos hecho en contrapunto y armonía apuntan hacia la *gestualidad*. Todas las simetrías del contrapunto de la Figura 6 pueden interpretarse en términos de gestos: *transposición* y *después* son gestos de trasladar con las manos; la *inversión* y el *retrogrado* corresponden a gestos de rotación espacial de 180 grados; y la *aumentación/disminución* es un gesto de *estiramiento/contracción.* En armonía, la banda armónica y la red de tonos fueron obtenidas *encarnando* y *configurando* símplices abstractos en el espacio $\mathbb{R}^3$. Más aún, los acompañamientos armónicos fueron obtenidos mediante caminos en la red de tonos, los cuales también corresponden a gestos humanos. Estas perspectivas gestuales son de ayuda en la interpretación musical para explicar a la audiencia conceptos abstractos subyacentes a las composiciones musicales, que pueden ser difícilmente identificables al oído, para facilitar su apreciación. Por otro lado, el intérprete puede traducir esta gestualidad en su propio movimiento corporal al ejecutar una pieza.

Los gestos, a su vez, tienen un modelo geométrico (balance interesante entre geometría y música) basado en la topología y la teoría de categorías. Este modelo fue inicialmente formulado por Mazzola y Andreatta (2007). Luego fue generalizado y unificado por Arias (2018), gracias a la teoría de productos cotensoriales de funtores, dual de la teoría de productos cotensoriales de funtores, los cuáles son una base importante en la teoría de *topos* de Grothendieck.

Finalmente, es importante resaltar las implicaciones para la creatividad musical y matemática de nuestra dialéctica inicial *geometrías*/*música*, en la cual, como ya observamos, se encuentran los gestos y los grupos como mediadores. Por un lado, gracias a las simetrías podemos variar los objetos musicales para crear nuevos, como en el retrogrado del *Canon No. 7* de Bach o en los ciclos de la red de tonos. Por otro lado, los hechos musicales, como la tonalidad, la conducción de voces y la gestualidad son inspiración para *crear* o *recrear* nociones matemáticas como la geometría afín, la cinta de Möbius, el toro y la teoría de productos cotensoriales de funtores.

Referencias

Agustín, O. A. y Lluis, E. E. (2011). Una invitación a la teoría matemática de la música. II. Armonía y contrapunto. *Ciencias, 102*, abril-junio, 68-77.

Andreatta, M. (2014). Math'n'pop: géométrie et symétrie au service de la chanson. *Bibliothèque tangente*, 5, 92-97.

Arias, J. S. (2018). *Gesture theory: topos-theoretic perspectives and philosophical framework* (PhD thesis). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Atiyah, M. F., y Macdonald I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra.* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Capuzzo, G. (2004). Neo-Riemannian theory and the analysis of pop-rock music. *Music Theory Spectrum, 26*(2), 177-200.

Cohn, R. (1997). Neo-Riemannian operations, parsimonious trichords, and their 'Tonnetz' representations. *Journal of Music Theory, 41*(1), 1-66.

Klein, F. (1893). A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. New York Math. Soc., 2*(10), 215-249.

Mazzola, G., Mannone, M., y Pang, Y. (2016). *Cool math for hot music.* Cham, Switzerland: Springer.

Mazzola, G. y Andreatta M. (2007). Diagrams, gestures and formulae in music. *Journal of Mathematics and Music, 1*(1): 23-46.

Schoenberg, A. (2010). *Theory of harmony*. Berkeley, California: University of California Press.

EL *NAUTILUS*, REFERENTE DEL CRECIMIENTO GNOMÓNICO CORDOBÉS

José R. Galo
Red Educativa Digital Descartes
galosanchezjr@gmail.com

La sección de la concha del *Nautilus pompilius* muestra la concomitancia entre una belleza natural y una belleza matemática y, por ello, puede plantearse como ejemplo paradigmático de la íntima coexistencia del mundo matemático virtual y de la yocto-yotta realidad. Pero, en el supuesto hipertúnel que unifica ambos mundos, se pueden producir deformaciones en las que el referente de la beldad perfecta, la idolatrada y ubicua proporción áurea o divina, queda transfigurada en la menos conocida proporción cordobesa o humana. Aquí le mostramos que el crecimiento gnomónico de la concha del *Nautilus* no sigue el idealizado canon áureo que usualmente se le atribuye, sino que tiene como referente el canon cordobés. La belleza divina versus la belleza humana.

EL *NAUTILUS POMPILIUS*

El protagonista directo de este trabajo, al menos de manera preferente, es el *Nautilus pompilius* y en concreto su concha. Como todo ser vivo: nace, crece, se reproduce y muere, y en su devenir vital va escribiendo un cuaderno de bitácora que refleja y muestra en su concha exterior; pero mediante una radiografía o, mejor aún, al realizar una sección de esa concha es cuando nos encontramos con otra bitácora secreta que incrementa aún más su belleza, una gran belleza geométrica al servicio de sus necesidades vitales (Figuras 1 y 2).

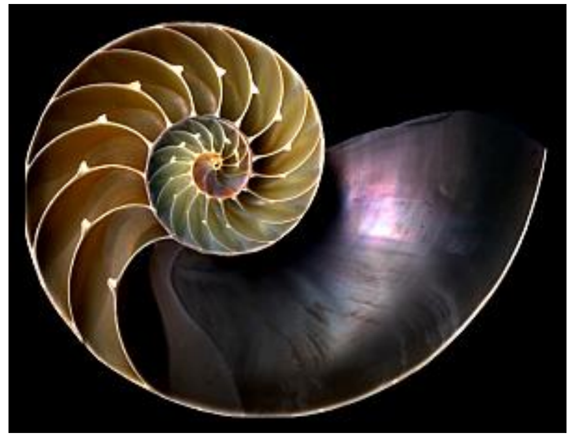
¿Es la naturaleza matemática o somos nosotros los que matematizamos la naturaleza? Independientemente de cuál fuera la alternativa cierta —si alguna lo es, o si no lo fuera ninguna de ellas, o si lo son ambas—, lo que sí parece obvio es que basta observar nuestro entorno para reconocer atractivas formas naturales y asimilarlas a modelos matemáticos que recíprocamente se mimetizan, estableciendo un hipertúnel entre la concreción y la abstracción, entre el mundo real y el virtual. Una proyección sobre nuestra yocto-yotta realidad[14] del mundo matemático o "continuo

---

[14] En longitud, el orden de magnitud de aquello que es físicamente apreciable o medible en nuestro entorno se ubica actualmente en el rango determinado por el intervalo $[10^{-35}, 10^{26}]$ metros, es decir, desde la longitud de Planck al tamaño del universo observable. Pero en el Sistema Internacional el rango de prefijos para múltiplos y divisores se sitúa en el intervalo [yocto-yotta], es decir, $[10^{-24}, 10^{24}]$, y de ahí surge nuestra denominación de yocto-yotta realidad.

Galo, J. (2019). El *Nautilus*, referente del crecimiento gnomónico cordobés. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 25-32). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

virtual”. Una muestra explícita de cómo las matemáticas pueden servir de base a la concreción de la belleza y, a su vez, cómo la belleza se plasma en las propias matemáticas.

	
Figura 1. *Nautilus pompilius*. Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nautilus_pompilius.jpg	**Figura 2.** Sección de la concha del *Nautilus* Fuente: http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/

La concha del *Nautilus* tiene un crecimiento discoidal y su sección transversal tiene forma de una espiral. En ella podemos contabilizar el número de ciclos o verticilos. La parte que presenta cámaras es llamada fragmocono y los tabiques que conforman las cámaras se denominan septos, los cuales se intersecan con la pared del fragmocono en la sutura. El sifúnculo une las cámaras del fragmocono y fisiológicamente es el encargado de vaciar de agua esas cámaras y llenarlas de gas proporcionando un dispositivo de flotación que facilita que pueda desplazarse nadando. Como es tejido orgánico, el sifúnculo rara vez se conserva; sin embargo, sí suelen observarse los agujeros o cuellos septales por donde pasa. La cámara más externa es su cámara habitacional.

Usualmente se difunde que la espiral de la concha del *Nautilus* es una espiral áurea. Quizás, la turbación que genera la observación de tanta perfección puede generar la sublimación y transportar lo observado al canón áureo de belleza que se basa en la extrema y media razón destacada inicialmente por Euclides y posteriormente potenciada en el Renacimiento por Luca Paccioli, el cual la ascendió al ámbito de la deidad al denominarla como proporción divina y para Leonardo da Vinci fue la proporción áurea. Pero realmente esa espiral es más humana, es una espiral cordobesa.

Adicionalmente, podemos intuir su crecimiento autosemejante mediante la adición de cámaras, un crecimiento gnomónico que veremos también ha de calificarse propiamente como “cordobés”.

LAS PROPORCIONES

Aldo Mieli en el prólogo de la edición de 1959 de *La divina proporción* (Pacioli, 1959) atribuye a Luca Pacioli la afirmación de que Platón y Euclides *"sabían perfectamente que ninguna cosa se puede conocer en la naturaleza sin la proporción y que el objeto de todos los estudios consiste en buscar las relaciones de una cosa con la otra" (p. 25)*. Y Pacioli al titular su libro de esa manera lo que hace es establecer como proporción excelsa la que fue introducida por Euclides en el libro VI de los *Elementos* como "extrema y media razón"; si bien, siguiendo el ordinal de cada libro, previamente aparece en la proposición duodécima del libro IV —en la construcción de un pentágono regular donde la razón áurea es la que acontece entre su diagonal y su lado—, y en la proposición undécima del libro II —en la que se construye el triángulo sublime[15] y donde la proporción dorada es la razón entre el radio y el lado del decágono regular—. Ciertamente la proporción divina parece que comienza a ser omnipresente.

Da Vinci construye el canon de belleza áureo cuando dibuja su interpretación del hombre de Vitrubio. En él, la razón entre la medida desde los pies al ombligo y desde este a la cabeza es la proporción áurea o también armónica, pues el hombre, como centro de la creación, se configura como el canon de la divina armonía. En esa relación umbilical incide Durero y en el siglo XX Le Corbusier en su Modulor. Así, la belleza queda ligada a la proporción, puede ser esquematizada mediante rectángulos y también asociada a polígonos regulares (Figura 3).

LAS PROPORCIONES ASOCIADAS A POLÍGONOS REGULARES Y SUS CÁNONES DE BELLEZA

Entre las infinitas proporciones posibles podemos destacar una infinidad numerable de ellas si atendemos a los diferentes polígonos regulares y a las razones existentes entre sus respectivos radios y lados. Si queremos realizar analogías al planteamiento davinciano de establecer cánones de belleza, podemos observar que la razón de proporcionalidad entre el radio y el lado en un polígono regular aumenta con el número de lados y para el polígono de doce lados es cercana a dos. Así, a partir de ese número de lados, su aplicación al canon de belleza humana comienza a ubicarse en un ámbito más calificable como de desproporción. Si nos restringimos a este rango de valores aceptables, es decir polígonos cuyo número de lados está entre tres y once, al ubicarnos en el ámbito euclidiano de construcción con regla y compás también ha de excluirse el heptágono, el eneágono y el endecágono. Nos queda la secuencia 3, 4, 5, 6, 8, 10 que conducen, respectivamente a las proporciones: $\sqrt{3}$ o *vesica piscis*, $\sqrt{2}$ o raíz de dos, $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ que no tiene un nombre específico

[15] Triángulo isósceles de ángulos 36º, 72º y 72º que puede dividirse de manera autosemejante mediante la proporción áurea y que coincide con cada uno de los diez triángulos iguales en los que puede dividirse un decágono regular.

al verse opacada por la relación entre la diagonal y el lado del pentágono que es la áurea, 1 o cuadrada, $\varsigma = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ o cordobesa,[16] $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ o áurea.

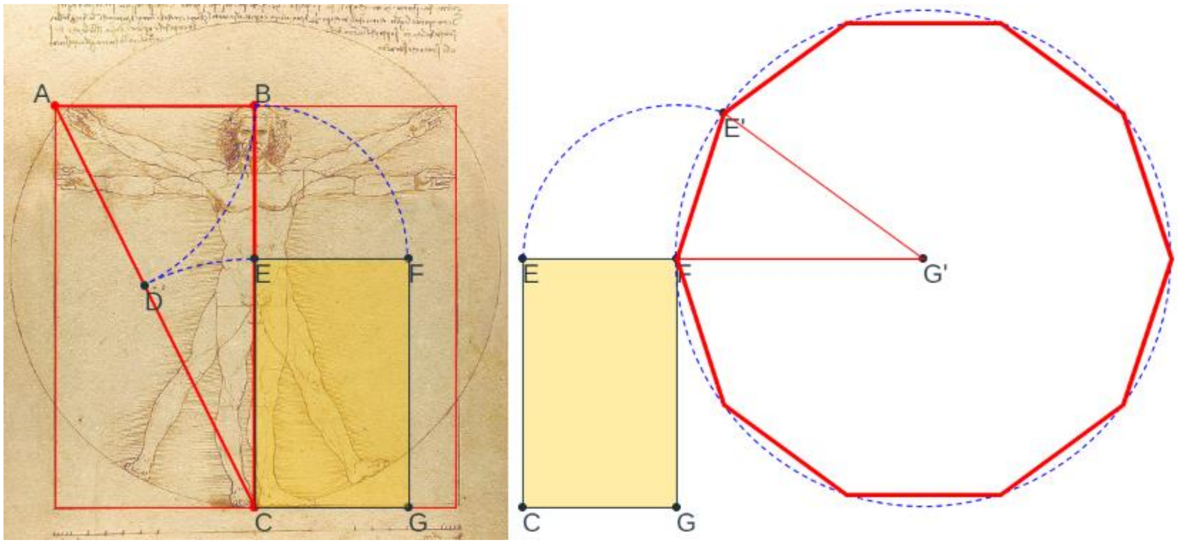


Figura 3. La proporción áurea CE:EB en el hombre de Vitrubio; rectángulo áureo CEFG; triángulo sublime E'FG' y en la razón entre el radio y lado del decágono regular FG':FE'. Fuente: adaptada a partir de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Da_Vinci_Vitruve_Luc_Viatour.jpg

El crecimiento gnomónico aristotélico

Aristóteles estableció el concepto de crecimiento gnomónico cuando decía: "Hay ciertas cosas que cuando crecen no sufren alteración salvo en magnitud" y definió el gnomon como toda figura cuya yuxtaposición a otra dada produce una resultante que es semejante a la inicial (Sachs, 1995). Este crecimiento gnomónico puede presentarse bien de manera continua o bien de forma discreta. En el *Nautilus* (Figura 2) puede verse el primero en el crecimiento de la concha y el segundo en la construcción de los septos que conforman las cámaras.

La espiral logarítmica áurea y la cordobesa

En el recurso *El grillo y la espiral logarítmica* (Galo, Cabezudo y Fernández, 2016a) se sintetiza la construcción dinámica de la denominada espiral logarítmica $r = a\,b^{\theta}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^{+}$- o también equiangular, geométrica o como Bernouilli la denominó más poéticamente: *spira mirabilis* o espiral maravillosa, y desglosamos detalladamente sus propiedades. Por el carácter equiangular, fijado un punto M de ella, esta puede inscribirse en un rectángulo de proporción $b^{\frac{\pi}{2}}$ (Figura 4) y

[16] Proporción sin nombre específico hasta que fue nombrada así por Rafael de la Hoz (de la Hoz, 1973), también denominada por él como proporción humana.

como consecuencia diremos que la espiral es áurea cuando este rectángulo es áureo ($\mathrm{b} = \Phi^{\frac{2}{\pi}} = 1{,}3584\ldots$) y cordobesa cuando el rectángulo es cordobés ($\mathrm{b} = \varsigma^{\frac{2}{\pi}} = 1{,}1855\ldots$). El factor de crecimiento respectivo ($b^{2\pi}$) es 6,854… y 2,914...

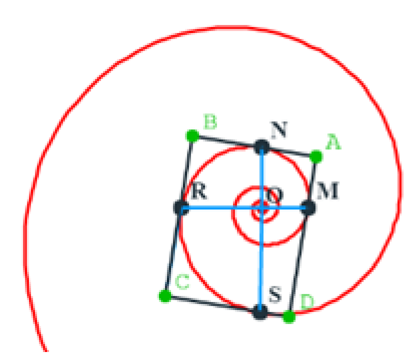
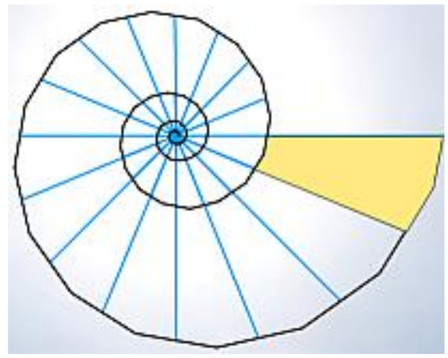
	

Figura 4. Rectángulo circunscrito a una espiral logarítmica. Fuente: Elaboración propia.	**Figura 5.** Crecimiento gnomónico de paso $2\pi/n$ con $n = 16$. Fuente: Elaboración propia.

La región plana delimitada por toda espiral logarítmica puede aproximarse mediante el crecimiento gnomónico discreto de hexágonos construidos en base a los rectángulos circunscritos asociados a ella de paso $\frac{2\pi}{n}$ (Figura 5) y cuando $n \to \infty$, es decir, cuando el crecimiento es instantáneo el factor de crecimiento es la unidad (*Eadem mutato resurgo*).

MODELACIÓN DEL *NAUTILUS POMPILIUS*

En un reconocimiento visual de la sección de la concha del *Nautilus* se observa que las cámaras ocupan aproximadamente dos verticilos y medio y la cámara habitacional un sector de amplitud 3π/4 (Figuras 6 y 7). En el primer verticilo se contabilizan ocho cámaras, dieciséis en el segundo y ocho en la siguiente mitad. Utilizando una escena interactiva desarrollada con la herramienta Descartes (Galo, Cabezudo y Fernández, 2016b; RED Descartes, 2012) en la que podemos dibujar diferentes espirales logarítmicas, superponiéndolas con la imagen podemos seleccionar aquella que mejor se ajusta[17].

[17] El procedimiento tradicional se basa en mediciones que pueden catalogarse como locales, mientras que el uso de la escena es global al ser un ajuste comparativo entre dos curvas, una la correspondiente a la sección de la concha y otra la aportada por la escena.

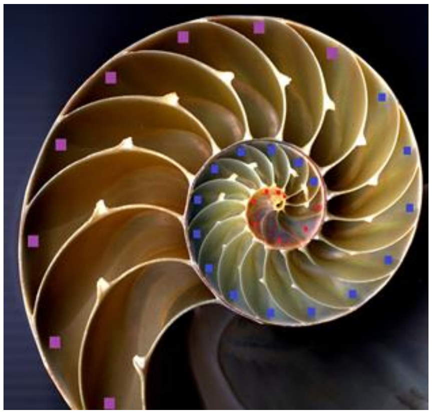
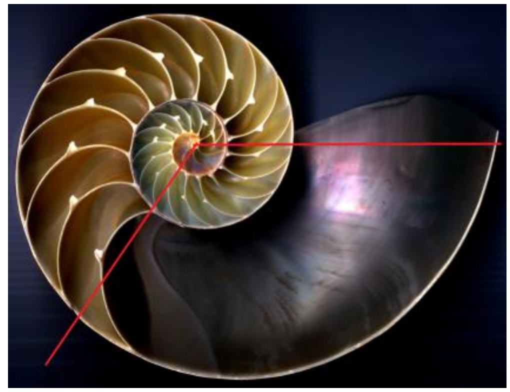
	

Figura 6. *Nautilus pompilius* Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/	**Figura 7.** Sección de la concha del *Nautilus* Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/

Hay una tendencia a tratar de asociar o encontrar en todo aquello que es bello la proporción divina y ello, como no, ha acontecido con el *Nautilus* si bien sin éxito (Figura 8) porque como se dice coloquialmente "la realidad es tozuda". La proporción por la que se rige el *Nautilus* (Figura 9) se observa que es la denominada proporción cordobesa o humana[18]. Y no solo el perfil de esta concha sigue el patrón de la espiral logarítmica cordobesa, sino que todo su interior, el sifúnculo y los septos siguen el mismo patrón de crecimiento humano-cordobés (Figuras 10 y 11). Así, la empecinada esperanza de encontrar el ideal de belleza divino se ve trastocada y lo que aparece es el ideal de belleza humano en nuestra "yocto-yotta realidad".

	
Figura 8. Ajuste por una espiral logarítmica áurea o divina Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/	**Figura 9.** Ajuste por una espiral logarítmica cordobesa o humana Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/

[18] Hay que señalar que Mosely (1813) asigna a la espiral del *Nautilus* un factor de crecimiento aproximado de 3, según lo referencia Thompson (1945). Este factor difiere bastante del correspondiente a la espiral áurea que es 6,854… y sin embargo está muy próximo al factor de la espiral cordobesa que como se ha señalado es 2,914....

En general, todo punto del interior de la concha del *Nautilus* es la intersección de dos espirales cordobesas: una “longitudinal” y otra “transversal” (como parte de un septo o de un arco semejante).

Figura 10. Aproximación de las cámaras e interior con familias de espirales cordobesas.
Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/

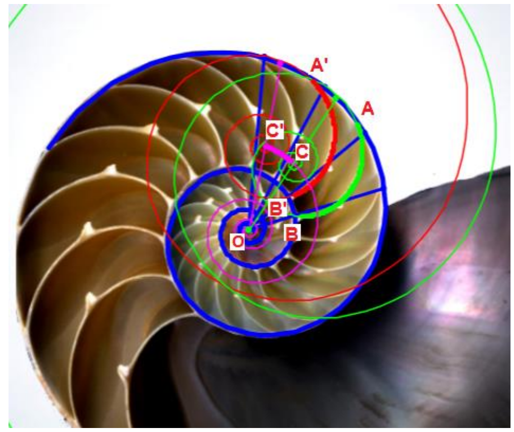


Figura 11. Ajuste de los septos por una espiral logarítmica cordobesa.
Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/

Y como todo ha de ser consecuencia de una causa fijarse en la amplitud angular de los septos es algo significativo porque nos aporta información acerca de cuál sería la base inicial teórica del fragmacono, y en relación a ella se establece el modelo de crecimiento de la concha y de los septos. Su análisis (Figura 12) conduce a que $\widehat{ABE} = \frac{\pi}{8} = \frac{2\pi}{16}$ es el valor del ángulo de crecimiento gnomónico discreto interseptos y que coincide con el ángulo del gnomon del triángulo cordobés (Figura 13); y $\widehat{ACB} = \widehat{BEA} = \frac{5\pi}{8}$ es la amplitud del arco de espiral cordobesa que determina cada septo. En ese sentido, el triángulo cordobés y su gnomon se configuran como la base del crecimiento del *Nautilus*, su germen y la razón primigenia de su forma y crecimiento cordobés.

Ciertamente la belleza nautílica se configura como un referente del crecimiento gnomónico cordobés.

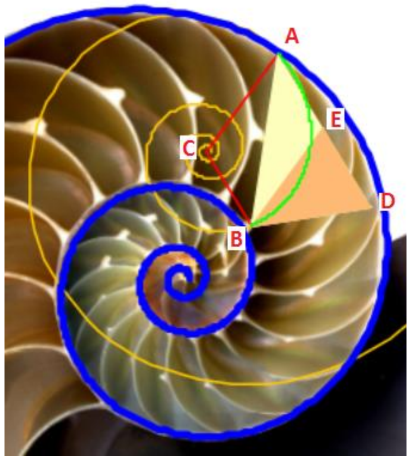


Figura 12. Base teórica del crecimiento cordobés del fragmacono
Fuente: adaptada a partir de http://www.imagexia.com/concha-de-nautilus/

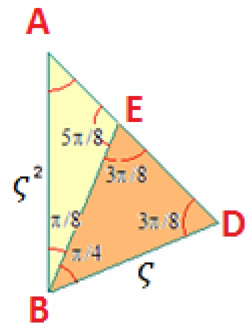


Figura 13. Triángulo cordobés (naranja) y su gnomon discreto (amarillo).
Fuente: Elaboración propia.

REFERENCIAS

Galo, J., Cabezudo, Á. y Fernández, I. (2016a). *El grillo y la espiral logarítmica.* Recuperado de https://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/1978-el-grillo-y-la-espiral-logaritmica.

Galo, J., Cabezudo, Á. y Fernández, I. (2016b). *Sobre la forma y el crecimiento cordobés del Nautilus pompilius.* Recuperado de https://proyectodescartes.org/descartescms/blog/difusion/item/2355-sobre-la-forma-y-el-crecimiento-cordobes-del-nautilus-pompilius.

Hoz Arderius, Rafael de la. (1973). La proporción cordobesa. *Actas de la quinta asamblea de instituciones de Cultura de las Diputaciones*. Córdoba: Diputación Provincial de Córdoba, España.

Moseley, H. (1813). On the geometrical forms of turbinated and discoid shells. *Phil. Trans. R. Soc. Lond*, 128, 351-370

Pacioli, L. (1959). *La divina proporción*. Buenos Aires: Losada.

RED Descartes, Red Educativa Digital Descartes. (2012). Recuperado de https://proyectodescartes.org

Sachs, J. (1995). *Aristotle's Physics: A Guided Study.* New Brunswick and London: Rutgers University Press.

Thompson, D. (1945). *On Growth and Form*. Nueva York: Dover Publications Inc.

AUTOMATIZACIÓN DE ACTOS DE DEVOLUCIÓN A TRAVÉS DE RETROACCIONES DIDÁCTICAS MEDIANTE DGPAD

Luis Ángel Pérez, **Marcos Chacón, Adriana Galeano, Gennifer Lisseth Hernández**
Universidad Industrial de Santander, grupo EDUMAT
laperezf@saber.uis.edu.co, lcmar@outlook.es, nanisitagale@gmail.com, gennifer_hernandez@hotmail.com

En el grupo EDUMAT-UIS, estamos investigando el potencial del software de geometría dinámica para desarrollar conocimiento matemático, a la luz de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD). Particularmente el software DGPad usado como medio, ofrece la posibilidad de programar retroacciones didácticas, que a priori, constituyen actos de devolución automatizados. Esto permite darle una configuración determinada al medio para obtener un modelo que favorezca la interacción adidáctica y por ende el desarrollo de aprendizaje por adaptación. Como resultado, presentamos una ingeniería didáctica desarrollada con DGPad, con la cual ilustramos cómo algunas retroacciones didácticas programadas constituyen actos de devolución.

INTRODUCCIÓN

La principal característica de los programas de geometría dinámica es la posibilidad de arrastrar los objetos directamente con el ratón, respondiendo a la teoría matemática; a estas respuestas las llamamos retroacciones matemáticas. DGPad es un programa de geometría dinámica que ha incorporado la posibilidad de programar otro tipo de respuestas que no corresponden a propiedades matemáticas (por ejemplo, bloquear, ocultar, mostrar y mover objetos; esto dependiendo de las acciones que se lleven a cabo durante la interacción), permitiendo diversificar la interacción del alumno con el programa. A estas respuestas las llamamos retroacciones didácticas, en el marco de la TSD, considerando DGPad como medio material (Pérez, Fiallo y Acosta, 2017).

Atendiendo a la pregunta: ¿Cuál es el rol de las retroacciones didácticas en el diseño de situaciones adidácticas? la TSD nos permitió identificar cuatro roles, con el objetivo de producir aprendizaje por adaptación: gestión y articulación de las tareas, automatización de actos de devolución, promoción del proceso de validación y explicitación o destacamiento de propiedades que no son fácilmente perceptibles (Pérez et al., 2017). En esta conferencia hacemos énfasis en la automatización de actos de devolución, ilustrando este rol de las retroacciones didácticas, mediante una ingeniería didáctica diseñada en DGPad.

Pérez, L., Chacón, M., Galeano, A. y Hernández, G. (2019). Automatización de actos de devolución a través de retroacciones didácticas mediante DGPad. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 33-37). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Teoría de las situaciones didácticas

Esta teoría se construye sobre el concepto de aprendizaje por adaptación y postula que un individuo aprende adaptándose a las condiciones de su entorno. Brousseau retomó este planteamiento para adaptarlo a la enseñanza de las matemáticas. Como resultado propone que un sujeto aprende adaptándose a un medio que responde a sus acciones de manera autónoma y siguiendo ciertas reglas. Tal aprendizaje, consecuencia de la interacción del sujeto con el medio, se manifiesta en el refuerzo o abandono de sus acciones.

> Asumimos como supuesto que el aprendizaje se logra por medio de una adaptación del sujeto que aprende al medio creado por esta situación, haya o no intervención de un docente en el transcurso del proceso. Los conocimientos se manifiestan esencialmente como instrumentos de control de las situaciones. (Brousseau, 2007, p. 18).

Podemos describir la interacción del sujeto con el medio de la siguiente manera: 1) El sujeto, motivado por una necesidad o deseo personal, tiene una intención u objetivo; para lograrlo realiza acciones que inciden en el medio. 2) El medio reacciona siguiendo ciertas reglas, es decir no es cuestión de azar sino una consecuencia natural de las acciones del sujeto, proporcionando respuestas llamadas retroacciones. 3) El sujeto hace una interpretación de la respuesta del medio y decide la validez de su acción, en términos de si logró o no el objetivo. Este hecho se conoce como validación.

Situación didáctica y adidáctica

Las situaciones adidácticas, que son las de nuestro principal interés, son definidas por Brousseau (2007, p. 31) de la siguiente manera:

> Los problemas, elegidos de modo tal que el alumno pueda aceptarlos, deben lograr, por su propio movimiento, que actúe, hable, reflexione y evolucione. Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer… el alumno no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. Tal situación es llamada situación adidáctica.

Dicho de otro modo, una situación es adidáctica si propicia el aprendizaje por adaptación. Ahora, una situación didáctica en la TSD se define como una situación de clase, entre un profesor y uno o más alumnos en relación con un saber que se enseña (Brousseau, 2007).

Margolinas (2009) sugiere que una parte de una situación didáctica debe ser vivida como situación adidáctica, y esta a su vez debe darse durante todo el proceso de enseñanza, puesto que se espera que los alumnos resuelvan los problemas como matemáticos y no en términos del contrato didáctico.

Medio didáctico

El medio es muy importante en el aprendizaje por adaptación puesto que determina tanto las acciones que puede realizar el estudiante como las retroacciones que se pueden ofrecer; por lo tanto el medio es determinante para la interpretación y la validación. Brousseau lo caracteriza de la siguiente manera:

> …son los comportamientos de los alumnos los que revelan el funcionamiento del medio, considerado como un sistema. Lo que se necesita modelizar, pues, es el medio. Así, un problema o un ejercicio no pueden considerarse como una simple reformulación de un saber, sino como un dispositivo, como un medio que "responde al sujeto" siguiendo algunas reglas. (Brousseau, 2007, p.15).

Entonces el medio es un sistema autónomo, modelizado con el fin de lograr objetivos de aprendizaje. Para que la interacción del alumno con tal medio sea adidáctica, Brousseau considera indispensable que el alumno reconozca en él una existencia tanto objetiva como material: objetiva en tanto ente autónomo independiente de la intención del profesor; y material teniendo en cuenta que el alumno debe interactuar con él mediante acciones.

Por lo tanto, consideramos que el potencial de un medio yace en la posibilidad que tienen los alumnos para realizar acciones en él, las restricciones que este ofrece a ciertas acciones, y sus posibles retroacciones. En efecto, estas últimas deben ser reconocibles e interpretables por el alumno, teniendo en cuenta que “una condición necesaria para que una situación permita un juego adidáctico es que incluya un medio que permita una fase de validación” (Margolinas, 2009, p. 43).

DGPad como medio didáctico

Teniendo en cuenta los elementos de la teoría expuestos anteriormente, consideramos DGPad como un medio material con el cual interactúan los alumnos para desarrollar aprendizaje por adaptación y definimos dos tipos de retroacciones: las *retroacciones matemáticas* y las *retroacciones didácticas*. Las primeras corresponden a respuestas naturales del programa que obedecen a la teoría matemática, pero sin ningún tipo de intención didáctica, mientras que las retroacciones didácticas son aquellas que permite programar el *software*, para modelar y gestionar el medio, sin contradecir de ninguna manera la teoría matemática. Las retroacciones matemáticas se manifiestan en la pantalla como fenómenos visuales, por ejemplo al arrastrar un triángulo otro se mueve de manera que conserva la relación de simetría con el anterior, y por lo tanto se mantienen también las propiedades que esta relación implica (característica principal de la geometría dinámica). Por otra parte, las retroacciones didácticas pueden manifestarse por la imposibilidad o restricción de acciones, también por una respuesta programada en función de las acciones del alumno.

METODOLOGÍA: INGENIERÍA DIDÁCTICA

Artigue caracteriza la ingeniería didáctica como "un esquema experimental basado en las 'realizaciones didácticas' en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (1995, p.36) asociada principalmente a una validación por estudio de casos y basada en la confrontación de un análisis a priori y un análisis a posteriori de tales secuencias. Este proceso está delimitado por cuatro fases: análisis preliminar, análisis a priori, experimentación, y por último el análisis a posteriori. Veamos en qué consisten las diferentes etapas de esta metodología.

Análisis preliminar

Artigue (1995) distingue tres dimensiones desde las cuales se debe realizar el análisis preliminar: epistemológica, cognitiva y didáctica. Están asociadas respectivamente a las características del saber en juego, las características cognitivas del público al cual se dirige la enseñanza y a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Esta etapa, ceñida a los objetivos del trabajo, permite determinar las variables que se pondrán en juego en la investigación, así como sus posibilidades y restricciones.

Análisis a priori

Esta etapa —caracterizada especialmente por la intervención del investigador sobre algunas variables en juego y por la organización de una secuencia didáctica—, busca "precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores" (Artigue, 1995, p. 12). El análisis a priori está basado fundamentalmente en un conjunto de hipótesis y comprende una parte descriptiva y otra predictiva, centradas en las características de una o más situaciones adidácticas que pretenden diseñarse para llevar a los alumnos. Por lo tanto, en esta fase de la metodología se analiza "lo que está en juego en esta situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone" (Artigue, 1995, p. 45).

Experimentación

La experimentación concierne a la puesta en escena de las situaciones adidácticas diseñadas, y la observación de las producciones de los alumnos durante el desarrollo de las mismas, mediante el estudio de casos.

Análisis a posteriori

Es esta la fase en la que "el análisis a priori se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado" (Artigue, 1995, p. 12). Es decir en esta etapa se analizan los datos tomados en la fase de experimentación en términos del análisis a priori. La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de investigación (Artigue, 1995).

AVANCES

Uno de nuestros principales propósitos es describir, desde la TSD, el rol de las retroacciones didácticas en el diseño de situaciones, con el objetivo de producir aprendizaje por adaptación. En esta conferencia mostramos el potencial que las retroacciones didácticas tienen para la automatización de actos de devolución y el efecto que tienen en el aprendizaje de los alumnos cuando interactúan con las situaciones diseñadas.

Sugerimos seguir indagando sobre el rol de las retroacciones en el diseño de situaciones adidácticas, de modo que se puedan obtener más resultados que ratifiquen o modifiquen las propuestas de este trabajo.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas.* Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander Ediciones.

Pérez, L., Fiallo, J. y Acosta, M. (2017). *Situaciones adidácticas para la enseñanza de la homotecia usando Cabri ELEM como medio*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

CONSTRUCCIÓN DE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES DADO EL PERÍMETRO Y LA ALTURA RELATIVA A LA BASE: UNA OPORTUNIDAD CÓNICA

Óscar Fernando Soto
Universidad de Nariño
fsoto@udenar.edu.co

El problema que estudia este artículo se ufana, sin duda, de clasificarse en la categoría de gran problema, pues teniendo infinitas soluciones, osa de que elementos geométricos como la recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola se adopten como instrumentos de la solución, a través de soluciones sencillas, claras, precisas y creativas, en las que se ve el rol principal del concepto de mediatriz. Se presenta una solución por cada uno de los instrumentos o curvas mencionadas. Aunque para los casos de la recta, parábola y circunferencia, parece que existe una única solución, no se aborda el problema de unicidad, pues tal demostración, está fuera del objetivo del artículo. En la construcción final, se advierte la forma en que infinitas hipérbolas y elipses resuelven el problema.

ELEMENTOS INICIALES

Resolver un problema en el modelo euclídeo implica la utilización de la regla y el compás a la usanza clásica. Pero, con otras libertades, se pueden combinar métodos y atacar el problema, por ejemplo, usando las cónicas como instrumentos de trabajo, es decir, como herramientas físicas que viabilizan la solución. Ello no asegurar que, por usar estas curvas, la solución al problema sea más fácil o se cargue de trampa o truco.

De hecho, al usar diferentes estrategias y herramientas, hay mayor riqueza y goce estético con la posibilidad de contemplar la belleza infinita de la matemática en la construcción de su conceptos y teorías. Además, si el problema no se puede resolver con regla y compás (plan A), al haber otros caminos, aparecen planes B, C D, etc., que enriquecen, de manera heurística, el mismo planteamiento del problema.

Soto, O. (2019). Construcción de un triángulo isósceles dado el perímetro y la altura relativa a la base: una oportunidad cónica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 39-48). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

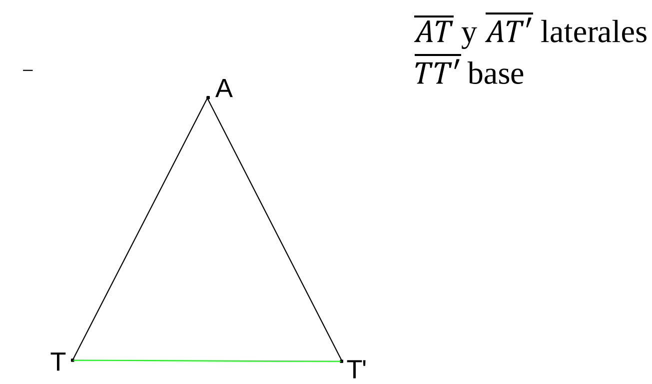


Figura 1. Triángulo isósceles

El problema consiste en construir un triángulo isósceles, si se conoce su perímetro y la medida de la altura desde el vértice común a los lados congruentes.

Para todas las construcciones que se exponen a continuación, se tiene en cuenta que PQes el perímetro, B es el punto medio del $\overline{PQ}$ y el $\overline{AB}$ es la altura del triángulo a construir, como se indica en la Figura 2. Se debe tener en cuenta que, para realizar la construcción, se debe cumplir la condición, $AB < \frac{p}{2}$.

Construcción 1. Usando la mediatriz

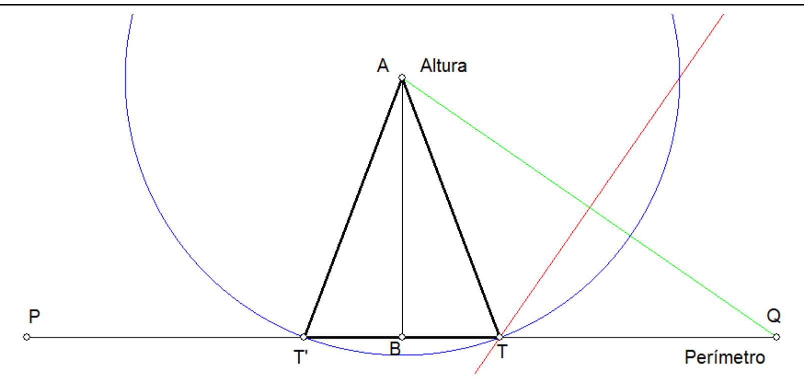


Figura 2. Mediatriz

Se traza el $\overline{AQ}$y luego su mediatriz, que corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro en Ay radio ATse traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'. El $\Delta T'TA$ es el triángulo pedido. El triángulo es isósceles por construcción. Ahora, $TA = TQ$ por ser T un punto de la mediatriz. Se tiene que:

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = \text{"}(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 2. Usando el circuncentro

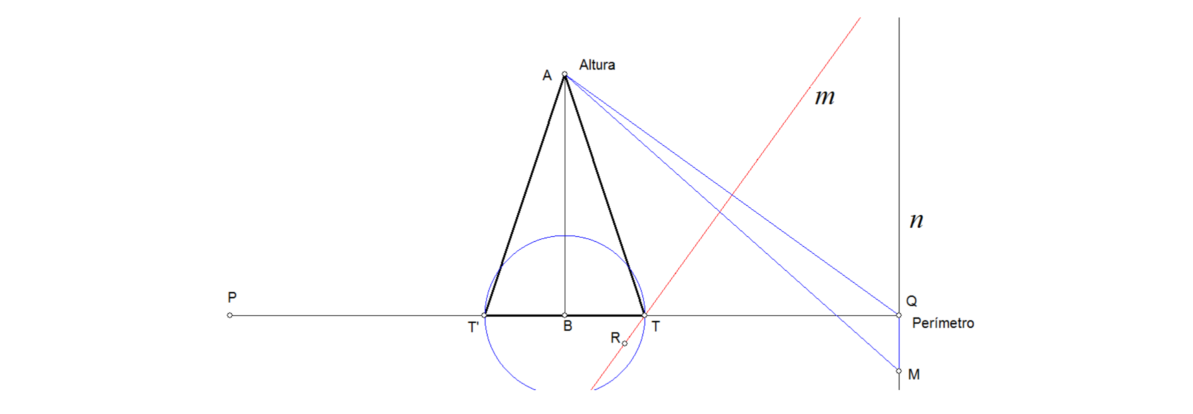


Figura 3. Circuncentro

Se traza por Q la recta $n \perp \overline{PQ}$ y se toma, en la recta n, el punto móvil M. Se considera el ΔMAQ y se determina su circuncentro R. Cuando el punto M se mueve por la recta n, el circuncentro genera un lugar geométrico, en este caso la recta m, que corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT, se traza una circunferencia cuya intersección con el $\overline{PQ}$ es T'.

El triángulo $\Delta TAT'$es isósceles por construcción. Como T es circuncentro, se tiene $TA = TQ$.

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 3. Usando la elipse

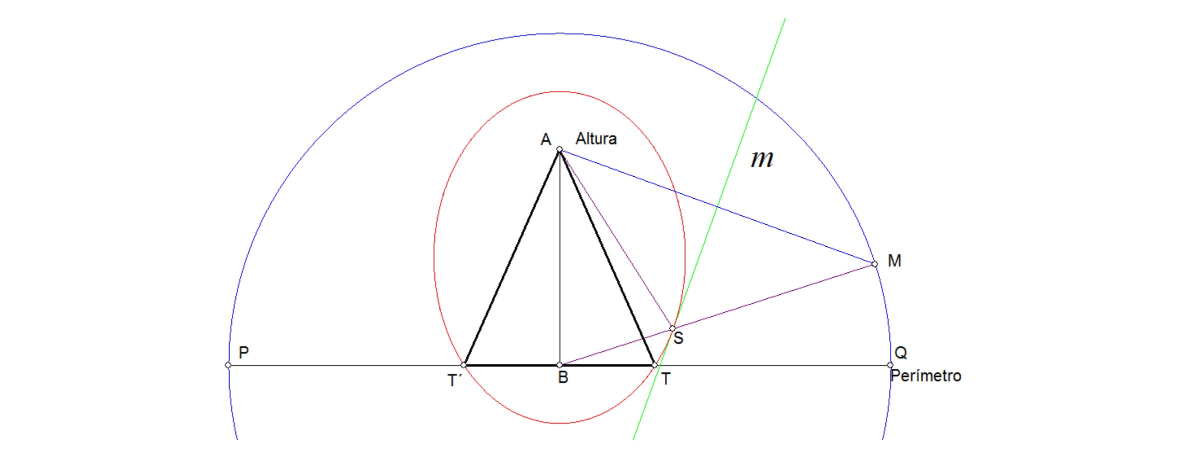


Figura 4. Elipse

Con centro en B y radio BP se traza una circunferencia. En ella, se toma un punto móvil M, se traza el $\overline{AM}$, el $\overline{BM}$ y la mediatriz m del $\overline{AM}$. Sea S el corte de m con el $\overline{BM}$. $SM = SA$, ya que $S \in m$. $BM = BQ = s = \frac{p}{2}$, por construcción. $BM = BS + SM = BS + SA$, reemplazando a SM por SA. $BS + SA = s, S \in m$, en donde A y B son puntos fijos y S es un punto móvil. Al moverse M, s es constante. Lo anterior significa que S describe una elipse con focos A y B, y eje focal de longitud BQ. Ella corta al $\overline{PQ}$ en T y T'.

El $\Delta T'TA$ es el triángulo pedido. $BT = BT'$ por simetría de la elipse. Como $\overline{AB} \perp \overline{PQ}$, entonces $\angle TBA \cong \angle T'BA$. El $\overline{AB}$ es lado común del ΔTBA y del $\Delta T'BA$. Entonces, $\Delta TBA \cong \Delta T'BA$ y, por ende, $AT = AT'$. Cuando $M = Q$, se tiene $TA = TQ$. Así,

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 4. Usando la parábola

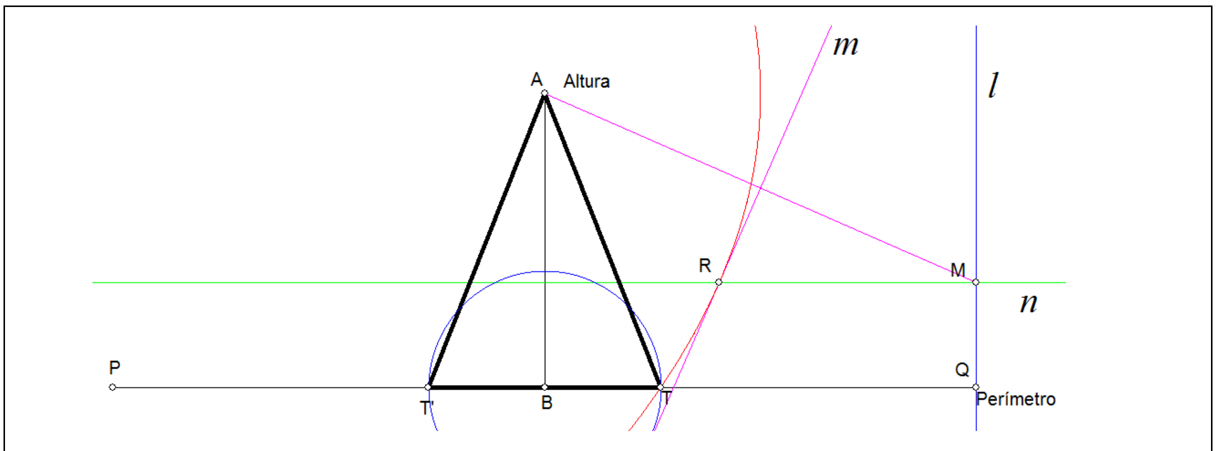


Figura 5. Parábola

Por Q se traza la recta $l \perp \overline{PQ}$, se toma $M \in l$, y por M se traza $n \perp l$. Se traza el $\overline{AM}$ y su mediatriz m que corta a n en el punto R. $RA = RM$, ya que $R \in m$. $\overline{RM} \perp l$, por construcción.

El punto A es fijo y la recta l es fija. Entonces R es un punto de la parábola con foco en A y directriz l, que se genera cuando el punto M se mueve a lo largo de la recta l. La parábola corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT, se traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo solicitado es $\Delta ATT'$. Es isósceles por construcción. $TA = TQ$ por ser T punto de la parábola. Se cumple que

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 5. Usando la hipérbola

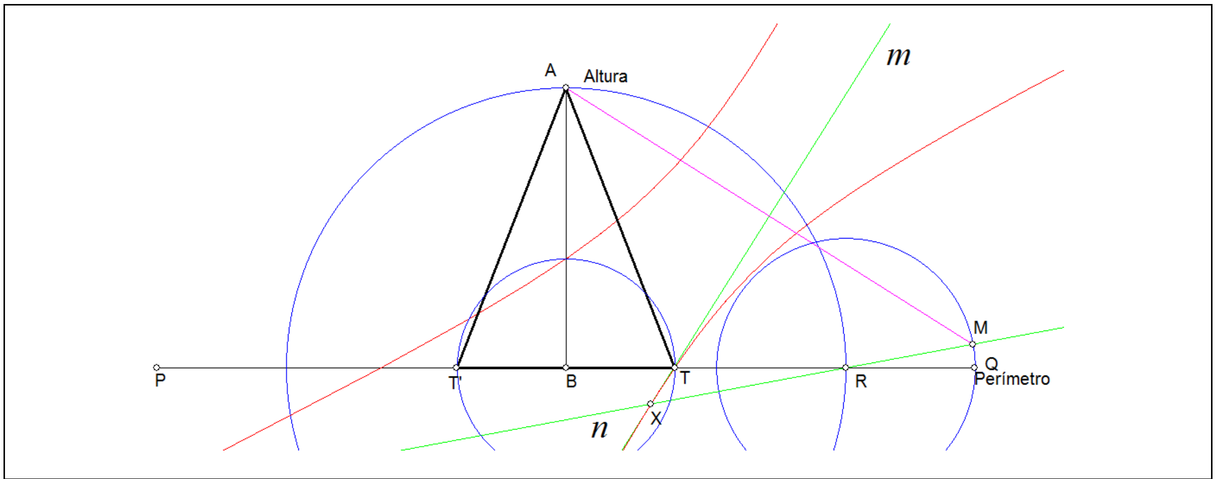


Figura 6. Hipérbola

Se traza la circunferencia con centro B y radio BA que corta al $\overline{PQ}$ en R por cumplirse que $AB < \frac{p}{2}$. Se traza la circunferencia de centro R y radio RQ. En esta circunferencia, se toma un punto móvil M y se traza la recta n, $n = \overleftrightarrow{MR}$. Se traza el $\overline{AM}$ y su mediatriz m que corta a n en X. $XA = XM$, ya que $X \in m$. $XM = XR + RM$, ya que X, R y M son colineales. $XM - XR = RM$. Por tanto, $XA - XR = RM$, ya que $XM = XA$. RM es constante.

Lo anterior significa que X es un punto de la hipérbola de focos A y R, y eje real de medida RM. X es un punto móvil cuando M se mueve sobre la circunferencia de centro R y genera la hipérbola que corta a $\overline{PQ}$ en T.

Con centro A y radio AT, se traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'. El triángulo solicitado es $\Delta ATT'$. Es isósceles por construcción. Como T es un punto de la hipérbola, se tiene $TA - TR = RM = RQ$, de dónde $TA = TR + RQ = TQ$. De nuevo,

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 6. Usando la circunferencia

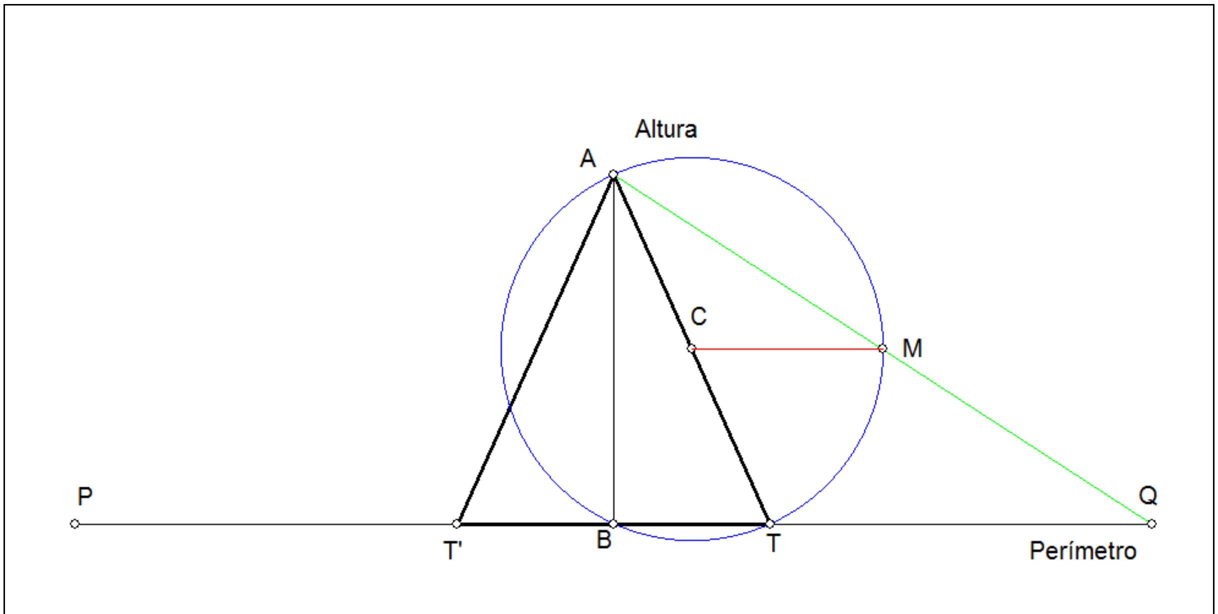


Figura 7. Circunferencia

Sea M el punto medio de $\overline{AQ}$. Se traza la circunferencia que pasa por los puntos A, B y M que corta al $\overline{PQ}$ en T. Con centro A y radio AT se traza una circunferencia que corta al $\overline{PQ}$ en T'.

El triángulo solicitado es $\Delta ATT'$, que es isósceles por construcción. Se traza el $\overline{AT}$. Se sabe que $m\angle ABT = m\widehat{AMT}$. Pero $m\angle ABT = 90°$, de donde $m\widehat{AMT} = 180°$. Esto significa que $\overline{AT}$ es diámetro de la circunferencia. Sea C el centro de la misma; se traza el $\overline{CM}$. Entonces, se cumple que $\overline{CM} \parallel \overline{TQ}$ lo que implica que $\Delta TQA \sim \Delta CMA$. Por lo tanto, se puede establecer la proporción $\frac{TQ}{TA} = \frac{CM}{CA} = 1$, de donde $TQ = TA$. De nuevo, se tiene que

$$p = TT' + TA + AT' = 2BT + 2TA = 2(BT + TA) = 2(BT + TQ) = 2BQ = PQ$$

Construcción 7. Caso especial

Supongamos que usando cualquier método anterior se halló el triángulo isósceles $\Delta ATT'$. Se toma un punto móvil $O \in \overleftrightarrow{PQ}$. Con centro O y radio OQ, se traza una circunferencia y en ella se toma el punto móvil M que se desplaza por la circunferencia.

Si O está a la derecha de T, se traza la mediatriz m del $\overline{AQ}$ y la $\overleftrightarrow{MO}$ que corta a la mediatriz en el punto X. En este momento, tenemos la construcción 5 que usa la hipérbola y la demostración es la misma. Hay que anotar que al mover el punto O, se va generando una familia de hipérbolas. Cuando $O \to T^{+}$ (O tiende a T por la derecha), la hipérbola se degenera en dos rayos $\left(\overleftrightarrow{AT} - \overline{AT}\right) \cup \{A, T\}$.

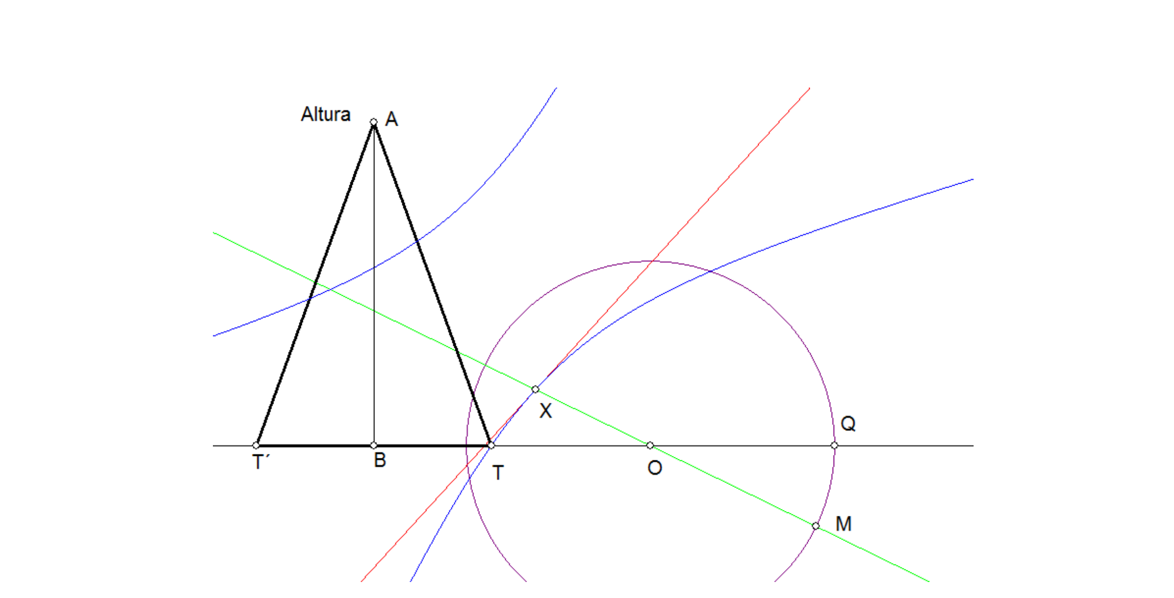


Figura 8. El punto O está a la derecha de T

Si O coincide con Q, la hipérbola se degenera en una recta, precisamente en la mediatriz m que corresponde al primer caso.

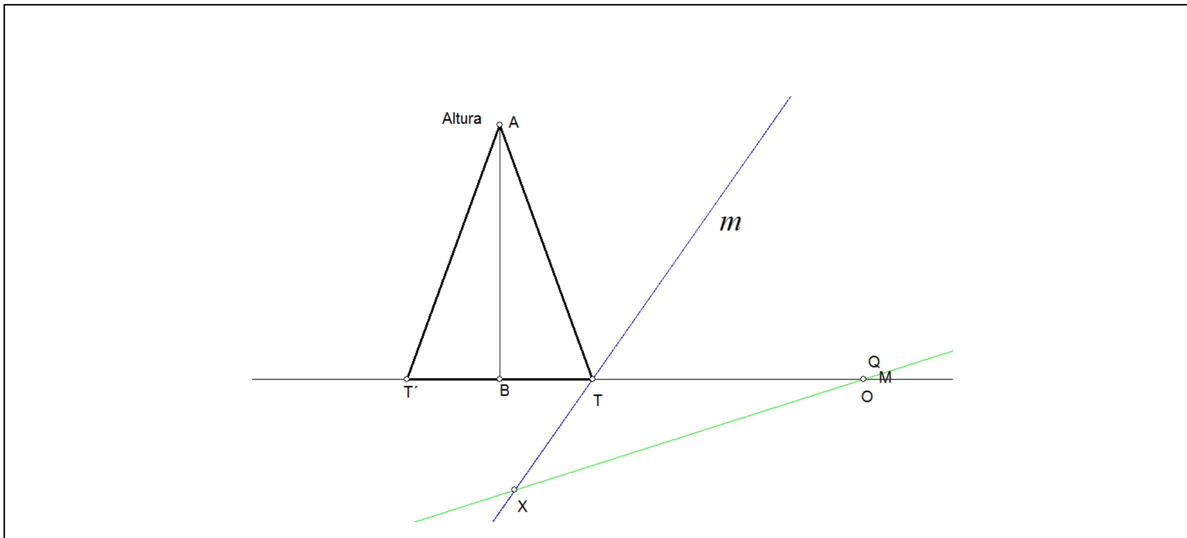


Figura 9. El punto O coincide con Q

Si O está a la izquierda de T, se presenta un caso similar a la construcción que usó la elipse, y la demostración es la misma. Hay que anotar que al mover el punto O se va generando una familia de elipses. Cuando $O \to T^-$ (O tiende a T por la izquierda), la elipse se degenera en el $\overline{AT}$.

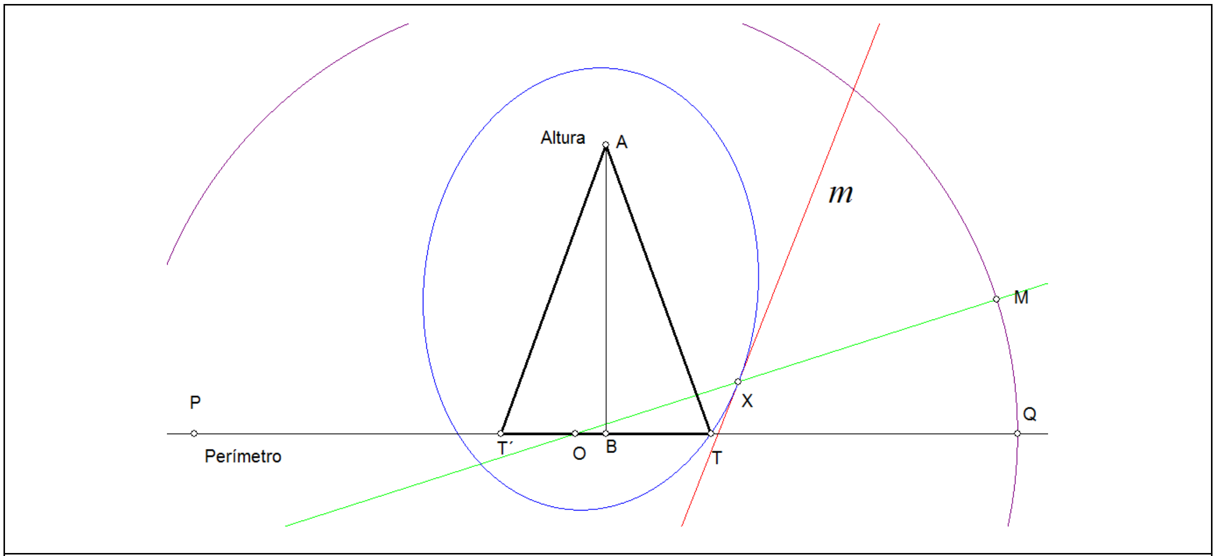


Figura 10. El punto O está a la izquierda de T

Construcción en el plano cartesiano

Se puede construir el $\overline{PQ}$ sobre el eje de las x, de manera que el punto medio B coincida con el origen de los ejes. Se coloca la altura sobre el eje y. De esta manera se puede identificar claramente la ecuación en coordenadas cartesianas de la cónica que entra en juego en la construcción.

Se da el ejemplo para el caso especial de la construcción donde la hipérbola es protagonista del momento matemático.

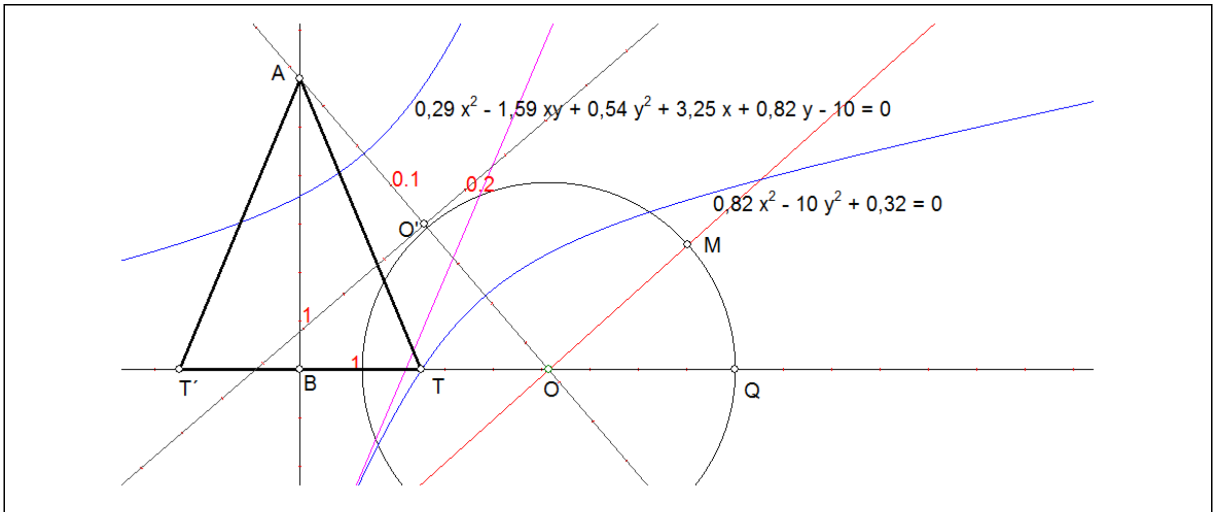


Figura 11. Plano cartesiano: hipérbola

En primera instancia, se muestra la ecuación completa de segundo grado. Pero se puede avanzar más, estableciendo la ecuación en los nuevos ejes: la $\overleftrightarrow{AO}$ y la mediatriz del $\overline{AO}$. Así, la ecuación se presenta simplificada a la máxima expresión.

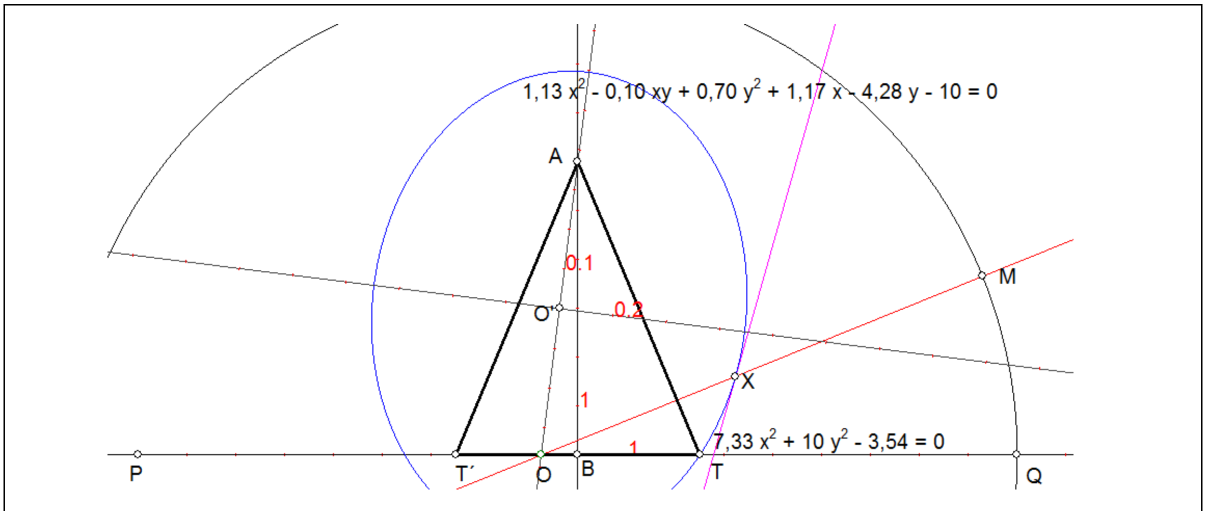


Figura 12. Plano cartesiano: elipse

Reflexiones

Queda la pregunta si es posible, utilizando otras curvas como la espiral, la lemniscata, flores de cuatro pétalos u otros, construir un triángulo isósceles o un triángulo cualquiera, de manera que resuelva el problema.

¿Estas construcciones son fortuitas, es decir, son fruto de un momento de iluminación o es cuestión de proponerse a realizar una construcción y poner manos a la obra?

¿Será cuestión de dedicarse horas y días enteros para realizar una construcción con unas condiciones dadas?

¿Será que el tiempo de solución puede trascender una vida humana, quizá generaciones o tal vez nunca se pueda resolver?

¿Se pueden considerar las construcciones 3, 4 y 5 como las construcciones de la elipse, parábola e hipérbola?

La solución del problema resalta la importancia de la mediatriz como instrumento y vía que da apertura a todas las soluciones, hecho que se justifica con la siguiente explicación. Si M es un punto arbitrario en el plano y X es el circuncentro del ΔAQM, la traza de X, al arrastrar a M por todo el plano, coincide con la mediatriz de los puntos A y Q. De modo que es suficiente con elegir arbitrariamente, en el plano, los puntos M y M' y calcular los circuncentros X y X' del ΔAQM y del $\Delta AQM'$, respectivamente; los puntos X y X' determinan una recta que interseca en el punto T al $\overline{PQ}$ que es el que se requiere para resolver el problema. De hecho, la $\overleftrightarrow{XX'}$ coincide con la mediatriz entre A y Q.

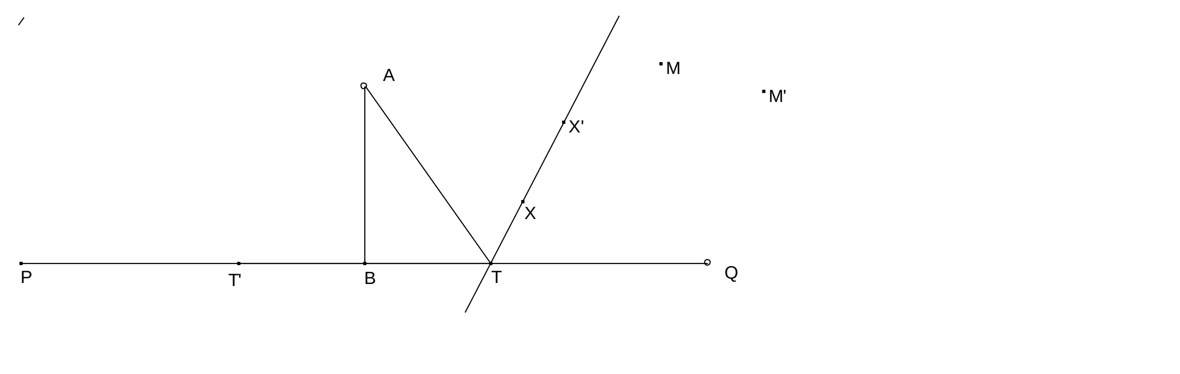


Figura 13. La mediatriz del $\overline{AQ}$

REFERENCIAS

Hemmerling, E. M. (2005). *Geometría elemental*. Ciudad de México: Limusa.

Guerrero, A. B. (2002). *Geometría en el plano y en el espacio*. Bogotá: Universidad Nacional.

Lehmann, C. (1989). *Geometría analítica*. Ciudad de México: Limusa.

Cursillos

ADAPTACIÓN DE RECURSOS DIDÁCTICOS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL EN CONTEXTOS DIVERSOS

Edwin Alfredo Carranza, Claudia Cecilia Castro
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
eacarranzav@udistrital.edu.co, cccastroc@udistrital.edu.co

Reconocer que las aulas de matemáticas son diversas implica reflexionar y entender que los estudiantes acceden al conocimiento a partir de diferentes formas, canales, recursos y sentidos. Esto conlleva a identificar elementos pedagógicos y didácticos que permitan la construcción de propuestas de enseñanza que respondan por la equidad en las aulas. El acercamiento a experiencias sobre acogimiento a la diversidad llevará a que el participante del cursillo explore en el uso de algunos recursos didácticos, su accesibilidad y las posibilidades que estos brindan para la construcción de conocimiento y el desarrollo de pensamiento matemático. En particular, esta propuesta se dedicará al pensamiento espacial, con fin de favorecer la educación "de los otros y con otros".

CONTEXTUALIZACIÓN

La propuesta que se presenta surgió en el marco de la investigación *Desarrollo didáctico y tecnológico en escenarios didácticos para la formación de profesores que acogen la diversidad: factores para su implementación y su validación en la UDFJC*. El proyecto estuvo inmerso en AIDETC (Alianza de Instituciones para el Desarrollo de la Educación y la Tecnología en Colombia. Programa Nacional Colciencias, código 1419-6614-44765). Este busca contribuir a la formación de profesores de matemáticas que puedan configurar y participar en prácticas que acojan la diversidad de poblaciones, con proyectos de innovación y desarrollo. El propósito central del proyecto gira alrededor de la creación de diseños didácticos accesibles, aplicables a múltiples ambientes de aprendizaje, que integren tecnologías adecuadas y consideren la diversidad como la posibilidad de aprender de otros y con otros.

En este cursillo, los participantes trabajarán con algunos recursos didácticos accesibles, relacionados con la ubicación y manejo espacial, con el propósito de generar discusiones en pro del acogimiento de la diversidad y el desarrollo del pensamiento espacial.

Formación didáctica de profesores de matemáticas que acogen la diversidad

Ante la presencia de población diversa en los diferentes niveles de educación, es necesario que los

Carranza, E. y Castro, C. (2019). Adaptación de recursos didácticos para el desarrollo del pensamiento espacial en contextos diversos. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 51-57). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

profesores de matemáticas no sean ajenos a esa situación. El reconocimiento, la participación y la promoción de la diversidad deben estar presentes en la formación inicial y continuada de profesores. Castro y Carranza (2017) indican que se trata de seleccionar, organizar y planificar las experiencias de aprendizaje necesarias para que los estudiantes para profesor o profesores en ejercicio, aprendan la práctica de enseñar incorporando la comprensión, apropiación crítica y exploración de diversas tecnologías, sus objetos y sus nuevos lenguajes en los contextos educativos, atendiendo a la diversidad (León, 2014). Estos autores aseguran que lo anterior implica la presencia de dos campos:

- el *pedagógico*, que favorece el reconocimiento y coexistencia de la diversidad en los contextos educativos.
- el *didáctico*, como fuente de experiencias en ambientes de aprendizaje interculturales y pluritecnológicos, con elementos estructurantes para las experiencias de aprender la práctica de enseñar las matemáticas.

Los diseños didácticos accesibles para la formación de profesores de matemáticas que acogen la diversidad

El diseño es un dispositivo para acoger diferentes condiciones de los estudiantes en el aula. Debe cumplir las exigencias de accesibilidad: i) accesibilidad a la situación por audición, por visión, por aspectos táctiles o por aspectos perceptuales de otros órdenes; ii) accesibilidad al manejo de la información de la situación, bien sea por registro escrito, registro visual, registro auditivo, registro viso-gestual; iii) accesibilidad a las formas de representar y operar las relaciones y los objetos matemáticos emergentes de la información; iv) accesibilidad a las formas de comunicar y cooperar en el estudio de la información que propone la situación (León, Díaz, y Guilombo, 2014).

Los diseños didácticos que contemplan el uso de recursos didácticos computacionales, multimediales, manipulativos tangibles y corporales favorecen el ambiente de aprendizaje en pro de la participación y promoción de la diversidad, generando atención en términos de la accesibilidad en el aula de clase.

El manejo del espacio

Las relaciones cuerpo-espacio están asociadas a la orientación espacial que se encarga de reunir el entorno y la manera de desenvolvernos en este (Clements y Sarama, 2009). Ello exige conocimientos y procesos matemáticos, incluso el recordar la posición de objetos y la forma de movilizarlos. Esto implica tres acciones:

- Movimientos del cuerpo: uso del propio sistema de referencia.
- Reconocimiento de la distancia y la dirección: uso de sistemas de referencia externos.

- Manejo de lenguaje de referencia: arriba, abajo, dentro, fuera, izquierda, derecha y puntos cardinales, posibilitando el reconocimiento de la interacción del cuerpo con el entorno.

Según Abbagnano (citado en Quevedo, 2019), el manejo espacial ha dado origen a tres problemas diferentes, que serán abordados en esta propuesta: el problema acerca de la naturaleza del espacio; el que rige en torno a la realidad del espacio y; el concerniente a la estructura métrica del espacio.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES

El desarrollo del cursillo se hará en tres momentos, cada uno de los cuales le permitirá al participante acercarse a situaciones que le impliquen reconocer, acoger y reflexionar sobre el manejo del espacio y la diversidad en el aula de matemáticas.

Figura 1. Fases de desarrollo del taller

Cada una de las experiencias que se llevarán a cabo en el cursillo, pasarán por las tres fases de desarrollo. A continuación, se presenta la caracterización de cada una.

Sensibilización

La sensibilización consiste en llevar al asistente a vivir y participar de situaciones en las que sea el protagonista. Es el espacio donde los sentidos son usados fundamentalmente para la realización de las experiencias.

Acogimiento de la diversidad

El propósito del acogimiento de la diversidad es reconocer que es posible utilizar elementos accesibles en los procesos de gestión en el aula. Para el desarrollo de esta fase, se plantearán preguntas como: ¿qué tipo de adaptaciones debo realizar? ¿Cómo vuelvo accesible algo? ¿Cómo hago un uso adecuado del lenguaje?

Reflexión

La reflexión se generará desde dos perspectivas; la primera de ellas tiene que ver con los aprendizajes alcanzados a lo largo del cursillo en relación con la accesibilidad y uso de los recursos; la segunda se hará alrededor de los resultados que se han obtenido en las experiencias relacionadas con el manejo del espacio.

Experiencia 1. En los zapatos del otro

La experiencia tiene como propósito usar como mediación el lenguaje verbal y gestual para ubicar espacialmente a otro. Se propende por el desarrollo de las habilidades de comunicación oral, para ubicar a alguien cuando se tienen los ojos vendados, y de la comunicación gestual, para orientar a una persona que no oye.

Figura 2. Con los ojos vendados. Fuente: Sparza y Santana (2013)

El MEN (1998) indica que el proceso general de comunicación se instaura como una necesidad común de todos los seres humanos. Es por ello que este proceso requiere gran atención en pro de la constitución de un pensamiento matemático fuerte. Como consecuencia, el profesor debe reconocer las diferentes formas de comunicar, escrita, oral, kinestésica y simbólica, como manifestaciones de la necesidad de hacerse entender por otros. Así, para poder comunicar debemos ser conscientes del mensaje a transmitir, y de los medios y condiciones que requerimos para ello.

Experiencia 2. Circuito cerrado

El circuito cerrado es un juego que consiste en realizar un recorrido sobre un tablero, organizando las fichas de tal manera que la última ficha colocada señale el lugar de la primera ubicada en el juego, como se muestra en la Figura 3.

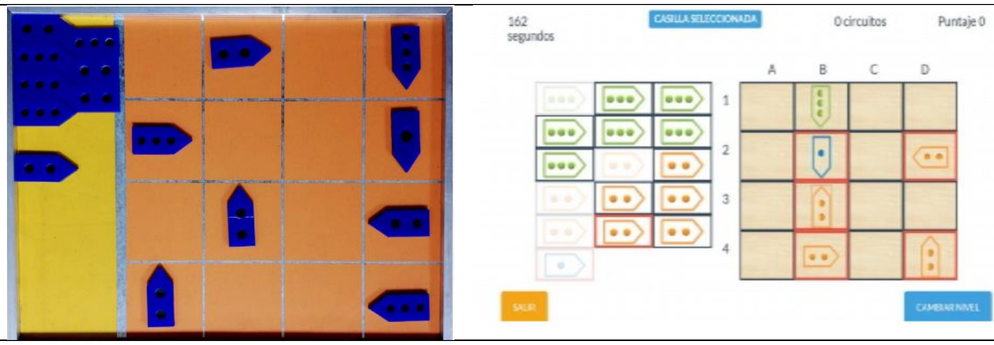


Figura 3. Ejemplo de circuito cerrado concreto y digital.
Fuente: elaboración propia.

El circuito cerrado, en cualquiera de sus presentaciones, concreta o digital, desarrolla las habilidades de ubicación espacial, que implican el manejo de coordenadas en el plano. Las indicaciones de uso del circuito cerrado digital se proveen en formato audio y en texto, e incluyen el uso del medio háptico a partir del uso del teclado. El juego, de acuerdo con Carranza y Castro (2016), es un recurso que favorece el desarrollo del pensamiento espacial y el pensamiento variacional. El uso del sistema cartesiano de referencia, caracterizado mediante ejes perpendiculares, es fundamental para alcanzar los objetivos de aprendizaje que propicia el juego.

Experiencia 3. Brújula

Haciendo uso de la brújula, el participante debe realizar distintos recorridos, teniendo presente los elementos de que dispone el artefacto. Posteriormente, algunos participantes construirán unas figuras que deben ser descubiertas por los demás, a través del movimiento. De esta manera, tanto el cuerpo como la brújula comunicarán la forma de la figura que se tiene. La brújula permite la lectura de mapas (icónica) y el uso del sistema de referencia (cuerpo kinestésico).

Figura 3. Aplicación de brújula para celular.
Fuente: Elaboración propia.

El uso de la brújula favorece cuatro procesos, planteados por Clements y Sarama (2009): generar una imagen; inspeccionar una imagen para responder preguntas acerca de ella; mantener una imagen al servicio de otras operaciones mentales, y transformar una imagen. Puesto que la brújula da información del sistema de referencia y obliga el movimiento del sujeto que la porta, la orientación espacial recae en entender el sistema, el entorno y producir algún movimiento en concordancia con la información que suministra la brújula.

Referencias

Castro, C. y Carranza, E. (2017). *Uso de recursos didácticos para el acogimiento a la diversidad en profesores de matemáticas*. Memorias II CEMACYC. Universidad del Valle, Cali.

Carranza, E. y Castro, C. (2016). *Formación de profesores de matemáticas sobre acogimiento a la diversidad*. Memorias del IV Encuentro Distrital de Educación Matemática EDEM. Universidad Distrital, Bogotá. Recuperado de https://comunidad.udistrital.edu.co/edem4/memorias/

Clements, D. y Samara, J. (2009). *Early childhood mathematics education research*. New York: Routledge.

León, O., Díaz, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 4-23.

León, O. (Ed.). (2014). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Doctorado Interinstitucional en Educación.

MEN (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Magisterio. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Quevedo, A. (2019). *Presencia de argumentos cuasi-lógicos en trayectorias reales del aprendizaje del espacio* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Sparza, A. y Santana, E. (2013). *Una propuesta inclusiva de la enseñanza de la ubicación y localización espacial para estudiantes de grado 3°*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

SISTEMA INTEGRADO DE CONSTRUCCIÓN ESPACIAL TIPO CASQUETE DE ESFERA PERFORADA

Luis Alberto Castro
Facultad de Ciencia y Tecnología - Departamento de Química
lcastro@pedagogica.edu.co, luiscastrop@gmail.com

El Sistema Integrado de Construcción Espacial Tipo Casquete de Esfera Perforada (SICETCEP) es un recurso didáctico de uso individual (autorefenciador), diseñado a partir de grupos de isometría, para el desarrollo correlacional de la capacidad de abstracción espacial. Las operaciones concretas como rotaciones, inversiones, traslaciones y simetrías, realizadas individualmente con el sistema, llevan a la elaboración de operaciones formales (pensamiento formal), para la interpretación de formas y lenguajes (representaciones/convenciones) que son usados en el lenguaje científico. En los sistemas geométricos, se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales.

PROBLEMÁTICA

El mejoramiento permanente de la calidad de la educación es un asunto dinámico y multifactorial, en donde confluyen diferentes aspectos que condicionan o impiden el avance hacia mayores estados de complejidad en el pensamiento de los niños(as) y profesores(as) que se encuentran en el sistema. El aula es un espacio donde se evidencia un importante grado de desarticulación entre los lineamientos planteados en los proyectos educativos y las dinámicas dirigidas, orientadas, coordinadas por el docente con su grupo de estudiantes. En este sentido, tanto los recursos como las ideas, concepciones, pensamientos, etc., que tenga el profesor sobre el acto pedagógico influirán de manera definitiva en la cualificación del sistema educativo; es así como el aula se convierte en un factor de suma importancia para adelantar investigaciones que ayuden a articular las temáticas con las realidades que vive el estudiante.

Si se reflexiona sobre del aula como el espacio en el que se mueven profesores y estudiantes buena parte del tiempo, es indispensable para tal efecto partir de algunos supuestos que seguramente introducirían buenos ruidos al acto pedagógico en la clase, escenario donde es posible generar acciones concretas que dinamizarían el proceso para la transformación pedagógica. Los modelos pedagógicos, diseños curriculares, uso de recursos didácticos, lógicas en los esquemas evaluativos, etc., han sido marcados por concepciones clásicas que no permiten dinamizar las potencialidades tanto de profesores, estudiantes y administrativos, que se encuentran confrontadas al cambio cada

Castro, L. (2019). Sistema integrado de construcción espacial tipo casquete de esfera perforada. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 59-65). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

vez más veloz en la frontera del conocimiento. Por el contrario, se consolida en nuestra estructura educativa la descontextualización y pérdida de vigencia del conocimiento, que ingenuamente se refuerza con acciones repetitivas, memorísticas y desarticuladas en el aula de clase.

Las orientaciones curriculares emanadas por el Ministerio de Educación Nacional corresponden a las rutas pedagógicas y curriculares para apoyar el proceso de fundamentación y planeación de las áreas obligatorias y fundamentales definidas por la Ley General de Educación, tanto en matemáticas como en ciencias naturales. A partir de ellas, se han definido unos lineamientos que deben ser implementados en las instituciones públicas y privadas. Cinco tipos de pensamiento matemático apuntan al cumplimiento del objetivo de ser “matemáticamente competente”, a través del desarrollo del pensamiento lógico y del pensamiento matemático. Estos tipos de pensamiento son: (i) numérico, (ii) espacial, (iii) métrico o de medida, (iv) aleatorio o probabilístico y (v) variacional.

El Pensamiento Espacial (PE) y Sistemas Geométricos (SG), al igual que los otros cuatro tipos de pensamiento, están diseñados para ser implementado desde el grado cero hasta el grado once. El PE y los SG hacen énfasis en el desarrollo de habilidades para interpretar, describir y representar la espacialidad, que es considerada como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales (MEN, 1998).

Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración *activa* y modelación del espacio, tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor hacia un espacio conceptual o abstracto. El primero se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc. El segundo se relaciona con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales. (MEN, 1998).

POSIBILIDADES PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO ESPACIAL

La geometría, como una de las ramas de la matemática, debe estar pensada a partir de currículos que integren sus diversas dimensiones y polos. Tanto los diseños como los recursos didácticos deben incluir actividades enfocadas a: estudiar propiedades espaciales y establecer un juego dialéctico entre los entes construidos al dibujar, plegar, visualizar, cortar y pegar, construir, medir, mover, manipular objetos físicos con las proposiciones del mundo geométrico; conjeturar acerca de propiedades de objetos geométricos formales o abstractos, a partir de diversas representaciones bidimensionales, tridimensionales y en perspectiva (Camargo y Acosta, 2012).

La manera de resolver un problema en matemáticas tiene relación estrecha con las herramientas disponibles, y su manejo depende de la integración del conocimiento matemático y de la propia herramienta. Como lo comenta Santillán (2002, citado por Sandoval, 2008):

> El medio […] es la base material que hace posible las acciones del sujeto […] La meta o fin no cambia si utilizamos una u otra herramienta, pero el proceso para alcanzar la meta, según los medios que se utilicen, cambia y cambia la estrategia. La planeación, una actividad cognitiva compleja, queda marcada por la herramienta […]. La actividad cognitiva es inherente al instrumento. (pp. 11-12).

La geometría es un área que está estrechamente vinculada al lenguaje de la química. Los términos para explicar los comportamientos de la materia están directamente relacionados con la geometría molecular. Para tal fin, se requiere de modelos (materiales didácticos) que permitan la migración de un pensamiento concreto a un pensamiento formal, a través de la manipulación directa e individual de operaciones concretas (rotaciones, inversiones, traslaciones, simetrías, etc.) a operaciones formales (desarrollo de pensamiento formal), donde emergen formas (convenciones) que son usadas en el lenguaje científico.

La capacidad de interpretar, describir y representar (leer y escribir) las formas de las arquitecturas moleculares (estructura molecular) requiere de una serie de habilidades como rotaciones, inversiones y traslaciones, que necesariamente tienen que ser aprendidas a través de la práctica. No obstante, estos temas han sido tratados como contenidos, sin ningún tipo de laboratorios y/o ejercicios que permitan desarrollar las habilidades descritas anteriormente. Por el contrario, el proceso de formación en el bachillerato, e incluso a nivel superior, se ha reducido a la interpretación de representaciones bidimensionales que de objetos tridimensionales.

EL RECURSO: SISTEMA DE CONSTRUCCIÓN ESPACIAL TIPO CASQUETE DE ESFERA PERFORADA

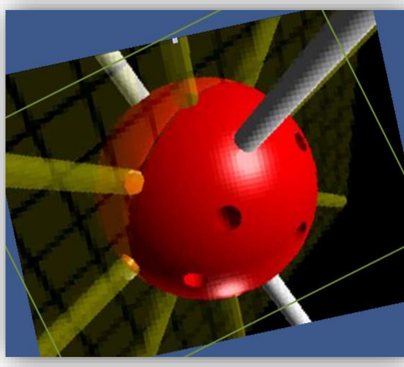


Figura 1. Recurso didáctico.
Fuente: Elaboración propia.

El Sistema de Construcción Espacial Tipo Casquete de Esfera Perforada (SCETCEP) es un recurso didáctico autoreferenciador, diseñado a partir de grupos de isometrías del espacio euclídeo. A través de la interacción individual con el material, se busca que se desarrolle, de manera significativa y correlacional, la abstracción espacial. El Sistema tiene dos componentes: el recurso propiamente dicho para el proceso de construcción (Figura 1) y las Unidades Didácticas[19] (Castro, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d, 2009e, 2009f), que al ser abordadas bajo las ciencias de la complejidad permiten generar ambientes no lineales de aprendizaje, constituyéndose paulatinamente en una herramienta con sentido pedagógico que contribuye a aumentar los grados de complejidad del Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.

El SCETCEP es una propuesta pedagógica conformada por cuatro componentes vinculados dinámica e integralmente, los cuales, en contextos educativos, dinamizan desarrollos de pensamiento para fortalecer competencias científico-tecnológicas y aprendizajes significativos en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

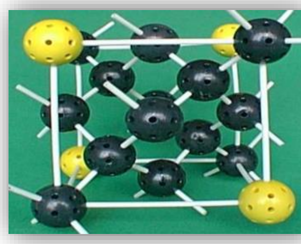
Características del material y algunas de sus aplicaciones

El material consta de esferas "Tipo Casquete de Esfera Perforada", con perforaciones simétricamente dispuestas en diferentes colores, conectores duros y flexibles para la representación de enlaces, pinzas de ajuste, transportador y cajas organizadoras (Figura 1). El diseño está dirigido para desarrollar pensamiento espacial, conformar sistemas geométricos, construir arquitecturas moleculares (inorgánicas, orgánicas, bioquímicas), estudiar componentes de la física del estado

[19] Las Unidades Didácticas (Química, Física, Matemáticas, Biología y Geometría) están registradas en la Dirección Nacional de Derechos de Autor del Ministerio del Interior y de Justicia.

sólido, etc. A través del contacto y manejo directo con el sistema, cada niño(a) puede desarrollar operaciones de manejo básico en pensamiento espacial: rotaciones, inversiones, translaciones, simetrías, homotecias, etc.

Uno de los campos de más amplia aplicación corresponde al estudio de las estructuras moleculares que son el eje principal sobre el cual se mueve la química orgánica e inorgánica. Esta temática ha sido débilmente desarrollada, lo que ha generado, en la enseñanza superior, problemas como la dificultad de los estudiantes por interpretar las tres dimensiones, reduciendo el estudio de la estereoquímica a dos dimensiones. Son muchos los temas que se pueden abordar con el uso del material; entre otros se encuentran: química inorgánica, química orgánica, enlace químico hibridaciones, formas de las moléculas inorgánicas, grupos funcionales, sólidos, isomería conformacional, nomenclatura y configuracional, estereoquímica polímeros, en bioquímica los grupos funcionales, carbohidratos, aminoácidos, péptidos y proteínas, ácidos carboxílicos, ácidos nucleicos, etc. (Figura 2).



Diamante
Sistema cúbico de cara centrada

Figura 2. Configuraciones moleculares.
Fuente: Elaboración propia.

La física del estado sólido estudia las propiedades físicas de los materiales sólidos, utilizando disciplinas tales como la mecánica cuántica, la cristalografía, el electromagnetismo y la metalurgia física. Constituye la base teórica de la ciencia de materiales y su desarrollo ha sido fundamental en el campo de las aplicaciones tecnológicas (nanotecnología, microelectrónica, etc.), al posibilitar el desarrollo de múltiples materiales.

Es posible construir elementos de simetría, para introducir al estudiante en forma comprensiva y sin formalismos matemáticos (inicialmente) al análisis de las propiedades de la simetría, así como permitirle reconocer y ejercitar algunas operaciones de "grupo puntual" (Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos). La determinación del "grupo puntual" está fundamentado en la identificación de ciertos elementos de simetría, y en la realización de operaciones propias de una geometría dinámica transformacional.

Redes de Bravais o celdas unitarias son paralelepípedos que constituyen la menor subdivisión de una red cristalina que conserva las características generales de toda la retícula (Figura 3). Así, por simple traslación del mismo, puede reconstruirse el sólido cristalino completo en función de los parámetros de la celda unitaria, a partir de las longitudes de sus lados y ángulos que forman. Así, es posible distinguir siete sistemas cristalinos.

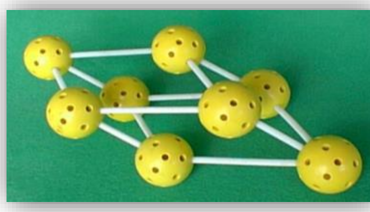


Figura 3. Red de Bravais
Fuente: Elaboración propia.

El Sistema de Construcción Espacial Tipo Casquete de Esfera Perforada pretende integrar las diferentes experiencias exitosas de su uso y compartir los alcances en el desarrollo de pensamiento matemático. Se trata igualmente de incidir en la formación básica y media vocacional, en lo relacionado con los sistemas geométricos y así mejorar la calidad del razonamiento espacial para la comprensión de la química molecular.

REFERENCIAS

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis,* 32, 4-8.

Castro. L. (2009a). *Introducción - soportes - sistema de construcción espacial tipo casquete de esfera perforada*. Registro Libro 10 – Tomo 215 – Partida 49 - / Junio de 2009. Bogotá: Ministerio del Interior y de Justicia - Propiedad Intelectual.

Castro. L. (2009b). *Unidades Didácticas Geometría - sistema de construcción espacial tipo casquete de esfera perforada*. Registro Libro 10 – Tomo 215 – Partida 45 - / junio 17 de 2009. Bogotá: Ministerio del Interior y de Justicia - Propiedad Intelectual.

Castro. L. (2009c). *Unidades Didácticas Química - sistema de construcción espacial tipo casquete de esfera perforada*. Registro Libro 10 – Tomo 215 – Partida 40 - / junio 17 de 2009. Bogotá: Ministerio del Interior y de Justicia - Propiedad Intelectual

Castro. L. (2009d). *Unidades Didácticas Física - sistema de construcción espacial tipo casquete de esfera perforada*. Registro Libro 10 – Tomo 215 – Partida 48 - / junio 17 de 2009. Bogotá: Ministerio del Interior y de Justicia - Propiedad Intelectual

Castro. L. (2009e). *Unidades Didácticas Biología - sistema de construcción espacial tipo casquete* *de esfera perforada*. Registro Libro 10 – Tomo 215 – Partida 47 - / junio 17 de 2009. Bogotá: Ministerio del Interior y de Justicia - Propiedad Intelectual

Castro. L. (2009f). *Unidades Didácticas Matemáticas - sistema de construcción espacial tipo casquete de esfera perforada*. Registro Libro 10 – Tomo 215 – Partida 46 - / junio 17 de 2009. Bogotá: Ministerio del Interior y de Justicia - Propiedad Intelectual

MEN (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas.* Serie Lineamientos Curriculares. Bogotá: Autor.

Sandoval, I. (2008). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática, 21*(1), 5-27.

CURSILLO DE *DESCARTES*

José R. Galo
Red Educativa Digital Descartes
galosanchezjr@gmail.com

Descartes es el nombre de la herramienta de autor que nació en el año 1998 y que es el soporte mediante el que se ha desarrollado el proyecto educativo y la red de profesorado homónima. A lo largo de los veintiún años transcurridos *Descartes* ha ido creciendo, evolucionando y adaptándose a los cambios tecnológicos y a los sucesivos estándares acaecidos, mostrando actualmente una madurez plena y una integración completa con su entorno. Este cursillo tiene como objetivo adentrarse en el desarrollo de recursos educativos interactivos con *Descartes* a partir de la elaboración de escenas cuyo contenido se encuadra en la conferencia "El Nautilus, referente del crecimiento gnomónico cordobés". La belleza humana captada y canalizada por la belleza cartesiana.

LA HERRAMIENTA *DESCARTES*

Descartes es una herramienta de autor, multipropósito, que nació en junio de 1998 en el contexto de preparación del año mundial de las matemáticas que se celebraría en el año 2000. Fue promovida y mantenida por el Ministerio de Educación de España hasta el año 2012 y posteriormente por la Red Educativa Digital *Descartes* y el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México. *Descartes* es *software* libre. El *software* inicial se desarrolló usando la tecnología *Java* (hasta la versión 5) y la versión actual, *DescartesJS*, con *javascript* siendo compatible HTML5 y, por tanto, es ejecutable en cualquier dispositivo, sistema operativo y navegador que cumpla ese estándar. Son veintiún años de crecimiento continuo, de introducción pautada de nuevas funcionalidades y de evolución permanentemente para adaptarse a los diversos cambios tecnológicos y a los sucesivos estándares que han ido aconteciendo en este entorno técnico.

Con *Descartes* se pueden desarrollar recursos educativos interactivos no solo en el ámbito de las matemáticas, área en la que surge, sino en cualquier área de conocimiento científico o literario. La unidad básica de desarrollo se denomina "escena". Al emplear este término teatral y cinematográfico para denominar a las actividades realizadas con *Descartes*, lo que se persigue es trasladar su significado y sus acepciones al contexto educativo poniendo especial énfasis en que es algo muy diferente de una animación; si bien con una escena también pueden construirse animaciones. No es lo mismo ser un espectador viendo una película (animación) que ser actor en

Galo, J. (2019). Cursillo de *Descartes*. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 67-74). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

una obra de teatro. *Descartes* aporta el escenario, el decorado, la infraestructura técnica, y es el usuario, nuestro alumnado y nosotros mismos, el que en cada escena ha de abordar su papel de actor protagonista. Y en el desarrollo de esa obra teatral habrá escenas en las que se verá guiado por el director, en algunas tendrá que descubrir el guión y en otras aportar su destreza e iniciativa para construir su propio guión, pero todo lo hará gracias a la interacción con *Descartes*. El escenario se adapta al actor y este construye la obra.

EL PROYECTO *DESCARTES* Y LA RED EDUCATIVA DIGITAL *DESCARTES*

El *Proyecto Descartes* (Galo y Madrigal, 2009) fue un proyecto educativo del Ministerio de Educación español que surgió ligado a la herramienta *Descartes*, pero que se apoyó en la experiencia acumulada en el desarrollo de otros proyectos educativos que buscaban promover el uso de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) en la educación. Su objetivo principal era la utilización de la tecnología para la mejora educativa, mediante la comprensión de aspectos encuadrables en la investigación, desarrollo e innovación (I+D+i), y era coordinado y desarrollado por profesorado. Este proyecto en el año 2013 se reconvirtió en una organización no gubernamental denominada “Red Educativa Digital *Descartes*” (RED *Descartes*, 2013) desde la que se le ha dado continuidad. Los socios de RED *Descartes* somos profesores de todos los niveles educativos. Nuestro lema es: “trabajando altruistamente por la comunidad educativa de la aldea global”, y nuestros recursos y actividades se difunden a través de nuestro portal https://proyectodescartes.org, que actualmente sirve una media de dos millones de páginas mensuales, gran parte de ellas hacia Colombia donde se constituyó la asociación homónima y hermana “Red Educativa Digital *Descartes* Colombia” —https://www.coldescartes.org/— con la que colaboramos intensamente y que es parte fundamental y protagonista de los logros y éxitos alcanzados.

Los recursos de RED *Descartes* se han ido desarrollando ligados a subproyectos y una descripción detallada de los mismos es accesible desde la opción “Subproyectos” del menú superior de nuestro portal web (Figura 1).

Figura 1. Menú superior del sitio proyectodescartes.org donde se puede acceder a una descripción de RED *Descartes*, de la herramienta *Descartes* y de sus subproyectos.

INSTALACIÓN DE *DESCARTES*, DOCUMENTACIÓN Y FORMACIÓN

La instalación de la herramienta *Descartes* puede realizarla accediendo a la web de la herramienta cuya dirección es https://descartes.matem.unam.mx/. Descargue el instalador adecuado a su sistema operativo y proceda a su ejecución. En la página antes citada y en la opción *DescartesJS*[20] del menú incluido en la Figura 1 tiene acceso a la documentación de la herramienta en formato imprimible (PDF) y en formato interactivo. También puede acceder a cursos interactivos en el apartado "Formación".[21]

EL CURSILLO DE *DESCARTES* EN EL 24.° ENCUENTRO DE GEOMETRÍA Y SUS APLICACIONES

El cursillo de *Descartes*[22] de este congreso tiene como objetivo introducir a los interesados en el desarrollo de escenas interactivas y se ha planteado para que los asistentes elaboren varias de ellas con un contenido que está relacionado con la conferencia inaugural de este congreso titulada "El *Nautilus*, referente del crecimiento gnomónico cordobés" y el artículo "Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius"* (Galo, Cabezudo y Fernández, 2016). Para cada escena propuesta se dispone de un recurso interactivo en el que se establece cual es el objetivo final y se detalla paso a paso la forma de obtenerlo. Obviamente es una mera guía y la iniciativa y creatividad de cada cual mejorará el resultado final.

Primera escena: detectando el canon de belleza del *Nautilus*

El *Nautilus pompilius* tiene una concha cuya sección transversal tiene forma de espiral logarítmica $r = a\, b^{\theta}$. Se plantea como objetivo (Figura 2) determinar la ecuación de esa espiral, es decir, cuánto vale a y b. También comprobar que los septos son arcos de una espiral de ese tipo.

En esta escena se toma contacto con la herramienta, se observa e interactúa con su entorno de edición (paneles: espacios, definiciones y gráficos), objetos cartesianos (imagen, curva, control numérico y gráfico, variables) y sus propiedades parametrizables.

[20] https://proyectodescartes.org/descartescms/descartesjs
[21] https://proyectodescartes.org/descartescms/formacion
[22] https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/index.html

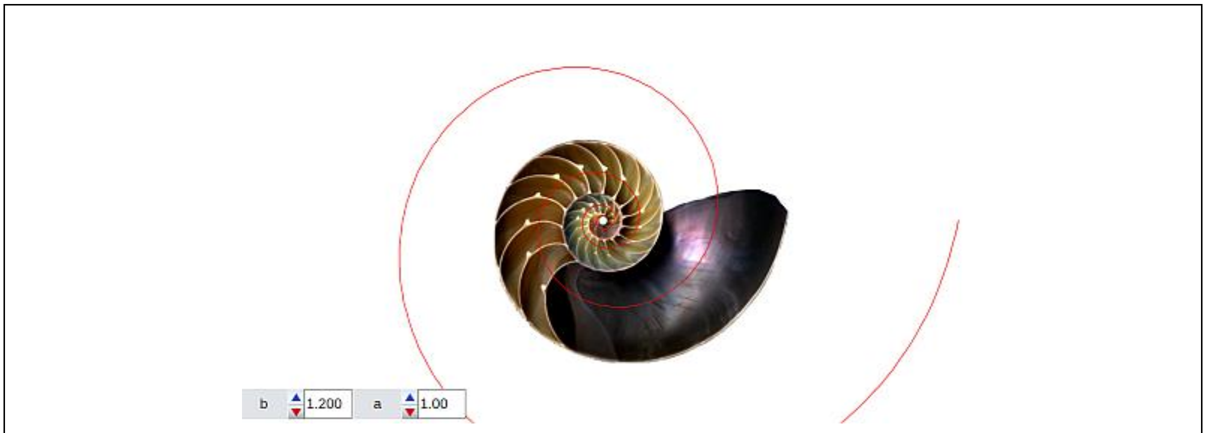


Figura 2. Escena interactiva para determinar la ecuación del perfil de la concha del *Nautilus*. Fuente: https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/Escena1/

Segunda escena: experto clasificador de conchas discoidales

Una concha se dice que es de tipo discoidal si la traza de su crecimiento está ubicada en un plano perpendicular al eje de giro. La concha *del Nautilus pompilius* es discoidal y en esta segunda escena (Figura 3) vamos a trasladar el análisis realizado en la primera a cualquier otra concha de ese tipo.

En este desarrollo se aprenderá a mostrar objetos cartesianos según una condición, se cambiarán algunas propiedades de los espacios, y curvas, se introducen los gráficos tipo punto, segmento, flecha (vector) y texto, se usarán controles numéricos de tipo menú y botón y a realizar acciones con ellos como abrir enlaces externos y se usaran vectores de variables.

Tercera escena: modelado teórico del crecimiento gnomónico

Aristóteles estableció el concepto de crecimiento gnomónico cuando decía: “Hay ciertas cosas que cuando crecen no sufren alteración salvo en magnitud” y definió el gnomon como toda figura cuya yuxtaposición a otra dada produce una resultante que es semejante a la inicial. En esta escena (Figura 4) modelamos el crecimiento de algunas conchas de moluscos. Son modelos teóricos simplificados, pero suficientemente significativos de lo que acontece en la realidad. Crecimiento conoidal, discoidal y helicoidal.

Se continúa con el aprendizaje funcional de la herramienta *Descartes* y en esta escena se trabaja con espacios bi y tridimensionales y sus propiedades, experimentando la superposición de los mismos y la importancia del orden de los mismos en el panel “Espacios” de la ventana de configuración. Se trabajan con objetos gráficos tridimensionales y con familias de ellos.

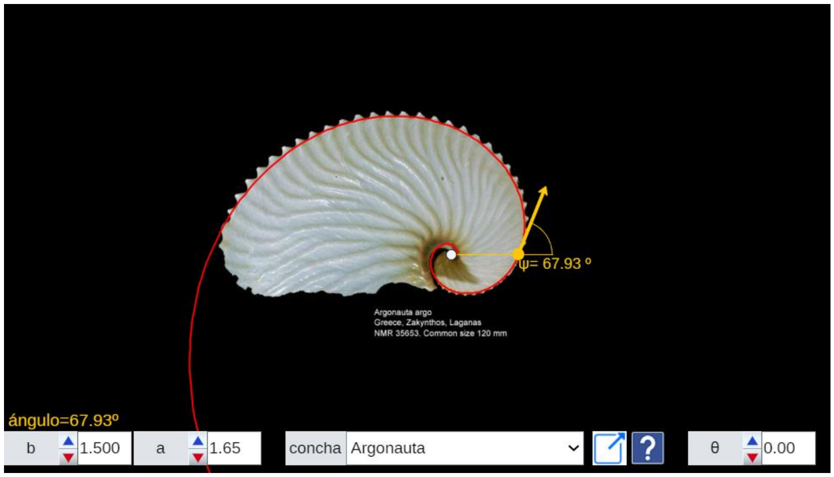


Figura 3. Escena interactiva para ser un experto clasificador de conchas discoidales. Fuente: https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/Escena2/

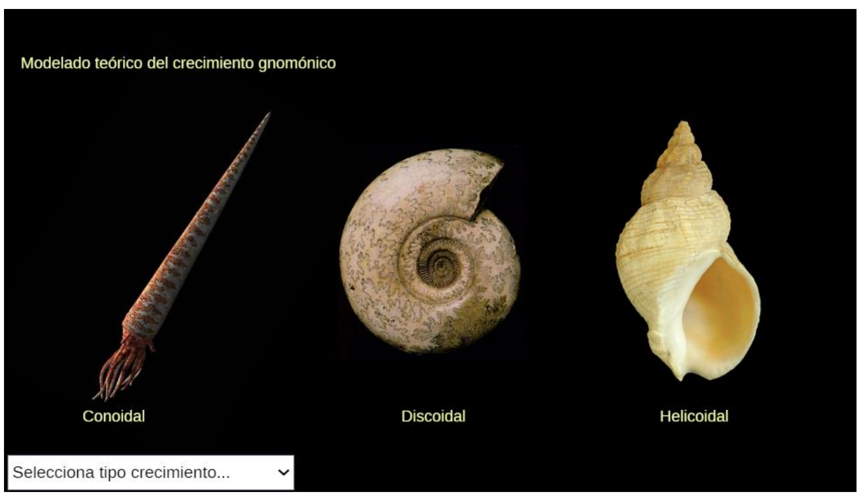


Figura 4. Escena interactiva para modelar el crecimiento gnomónico de las conchas de los moluscos. Fuente: https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/Escena3/

Cuarta escena: animación de rectángulos asociados a polígonos regulares

A partir del lado de un polígono regular y del radio de la circunferencia circunscrita puede construirse un rectángulo. En particular, el triángulo equilátero se corresponde con el rectángulo de proporción $\sqrt{3}/3$, el cuadrado con el de proporción $\sqrt{2}/2$, el hexágono con el cuadrado o de proporción la unidad y el decágono con el rectángulo áureo (de extrema y media razón o proporción áurea, divina o armónica). Y en el estudio del *Nautilus* detectamos la proporción cordobesa o humana que se corresponde con el rectángulo cordobés asociado al octógono.

En este caso (Figura 5) el objetivo técnico cartesiano principal es aprender a realizar animaciones con *Descartes*, pero también se practicará con el cambio de tamaño de las escenas y los objetos gráficos arco, polígono, textos enriquecidos y textos con inclusión de valores variables. Esto último conduce a iniciarse en el editor de textos y fórmulas de *Descartes*.

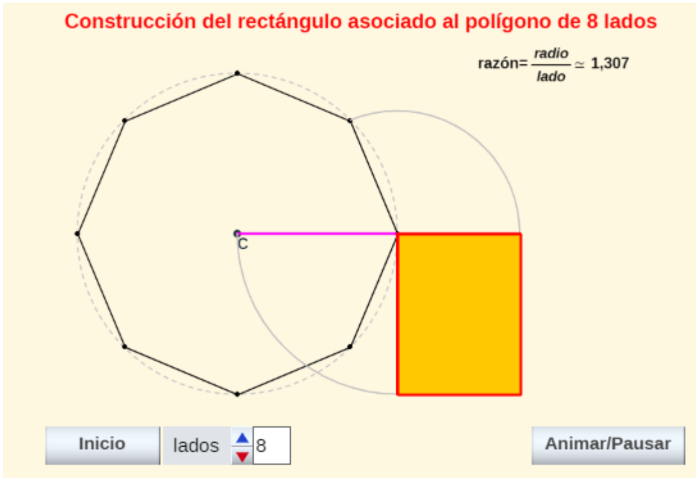


Figura 5. Escena interactiva para realizar una animación de la construcción de los rectángulos asociados a los polígonos regulares. Fuente: https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/Escena4/

Quinta escena: el hombre de Vitrubio polifacético

Leonardo da Vinci plasmó el canon de belleza armónico (áureo o divino) en su dibujo del hombre de Vitrubio. En él toma como referencia la razón entre la distancia de los pies al ombligo y de este a la cabeza plasmando la razón áurea. El ombligo como centro armónico del cuerpo. Con *Descartes* procedemos a visualizar un hombre de Vitrubio polifacético, pues podemos variar la posición del ombligo y observar el efecto que acontece. En particular conoceremos al hombre de Vitrubio cordobés. Adicionalmente, todas las proporciones consideradas se pueden mostrar mediante un rectángulo y relacionar este con las razones entre el radio y el lado en los polígonos regulares; y también la situación inversa.

En el aspecto técnico cartesiano se aprende a trabajar con la escala de un espacio y con las escalas de las imágenes. Se hace uso del panel “Programa” y de los algoritmos “Inicio” y “Calculos” que se incluyen por defecto. Se usan textos enriquecidos que incluyen fórmulas y expresiones variables. Se detecta si un control está activo, se activan o desactivan controles y se trabaja con las acciones asociadas a los mismos. Se profundiza en el uso de condicionales y en la definición de funciones.

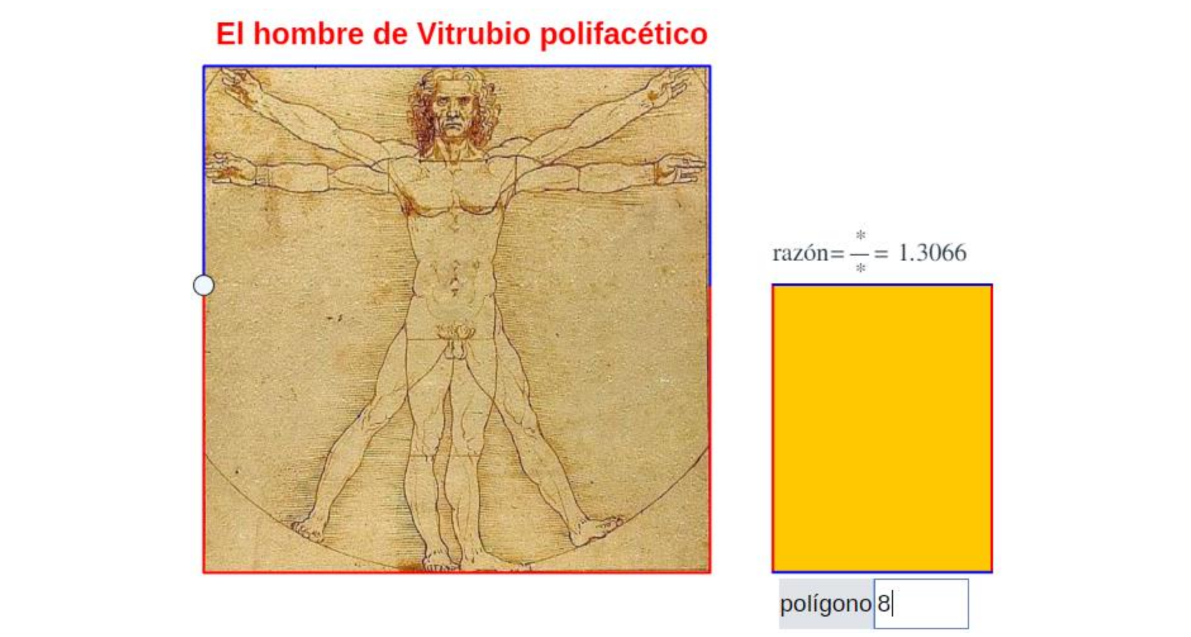


Figura 6. Escena interactiva para mostrar diferentes cánones de belleza partiendo del canon armónico o divino reflejado por Leonardo da Vinci en su hombre de Vitrubio. En la imagen se muestra el canon humano o el hombre de Vitrubio cordobés.

Fuente: https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/Escena5/

Sexta escena: constructores de conchas

En escenas anteriores hemos observado conchas de dos tipos: discoidal y helicoidal. En esta escena nos convertimos en constructores de conchas discoidales sin más que definir el perfil de su boca mediante una curva y la espiral logarítmica que define su crecimiento gnomónico y añadiendo en el caso helicoidal el ángulo del cono que la envuelve.

En el desarrollo de esta escena se aprende a embeber escenas en otras escenas mediante el uso de espacios HTMLIframe y se profundiza en el conocimiento de los parámetros asociados al objeto cartesiano "Superficie".

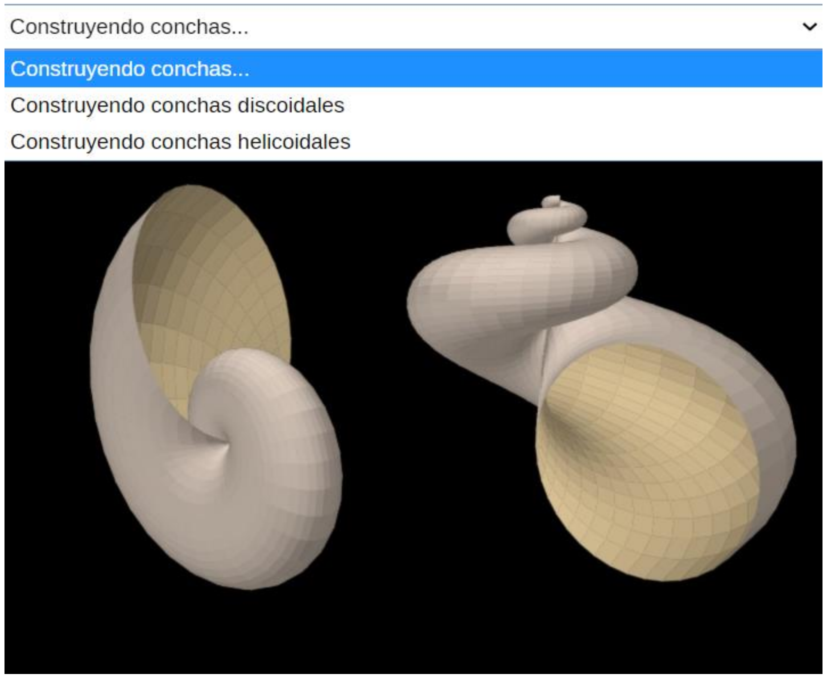


Figura 7. Escena interactiva para construir conchas discoidales y helicoidales.
Fuente: https://proyectodescartes.org/escenas-aux/taller24ega/Escena6/

REFERENCIAS

Galo Sánchez, J.R. y Madrigal Muga, J. (2009). El proyecto Descartes: 10 años innovando con tic. XIV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Girona, España: FESPM. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/260399565_El_proyecto_Descartes_10_anos_innovando_con_TIC

Galo Sánchez, J., Cabezudo Bueno, Á. y Fernández Trujillo, I. (2016). Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*. *Epsilon*, 94, 81-110. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/321686865_Sobre_la_forma_y_el_crecimiento_cordobes_del_Nautilus_pompilius_On_the_form_and_the_Cordovan_growth_Nautilus_pompilius.

RED *Descartes*, Red Educativa Digital *Descartes*. (2013). Recuperado de https://proyectodescartes.org

AMBIENTES DE APRENDIZAJE ACCESIBLES Y AFECTIVOS EN EDUCACIÓN GEOMÉTRICA

Olga Lucía León, **Nancy Johanna Alonso**, **Fredy Alejandro Barbosa**, **Elba Azucena Martínez**, **Weimar Muñoz**, **John Páez**, **Natalia Andrea Palomá**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
olgleon@yahoo.com, johannaalonso1@gmail.com, fabdieud@gmail.com, eamc.real.math@gmail.com, wmunozv@correo.udistrital.edu.co, johnpa@live.com, napaba31@hotmail.com

Este documento tiene como propósito presentar avances de una investigación sobre ambientes de aprendizajes y accesibilidad en la educación geométrica. Primero, se presentan fundamentos sobre los ambientes de aprendizaje accesibles; segundo, se destacan la investigación sobre la relación currículos y comunidades rurales; tercero, se presenta la relación geometría-aritmética y accesibilidad. Y finalmente, se presentan algunas relaciones históricas entre geometría y cálculo para la no exclusión, de formas para la comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo en las carreras de ingeniería. Los anteriores enfoques destacan la relación investigación-práctica escolar y accesibilidad como una relación necesaria para el desarrollo de la educación geométrica en Colombia.

FUNDAMENTOS SOBRE AMBIENTES DE APRENDIZAJE ACCESIBLES

La reflexión sobre ambientes de aprendizaje en la educación tiene diversas fuentes: la investigación educativa en general (Kaiser y Hester, 1993); la educación matemática en general (Wittmann, 2013); la didáctica de la matemática (Brousseau, 2010); la investigación social en educación matemática (Espasadin Lopes y Jaramillo, 2017); la investigación en las ciencias del diseño y los experimentos de enseñanza (Rico, 1997), y la investigación en redes neuronales e inteligencia artificial (Lahoz-Beltrá, 2007). En las investigaciones recientes sobre accesibilidad e inclusión en la educación matemática se articulan los resultados de fuentes tan diversas como las mencionadas anteriormente para fomentar la presencia en la educación de poblaciones marginadas de los procesos escolares.

Las relaciones entre accesibilidad, afectividad y ambientes de aprendizaje se desarrollan a partir de las caracterizaciones que se presenten sobre los tres componentes mencionados. La accesibilidad puede ser estudiada como un derecho fundamental, como una característica y compromiso de las prácticas grupales; como un signo de desarrollo cultural y económico; y en el espacio educativo como un atributo de los diseños didácticos (Castiblanco y León Corredor, 2018). La accesibilidad

León, O., Alonso, N., Barbosa, F., Azucena, E., Muñoz, W., Páez, J, et al. (2019). Ambientes de aprendizaje accesibles y afectivos en educación geométrica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 75-93). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

es según el artículo 9 de la "Convención sobre los derechos de las personas con discapacidad de las Naciones Unidas":

> […] medidas pertinentes para asegurar el acceso de las personas con discapacidad, en igualdad de condiciones con las demás, al entorno físico, el transporte, la información y las comunicaciones, incluidos los sistemas y las tecnologías de la información y las comunicaciones, y a otros servicios e instalaciones abiertos al público o de uso público, tanto en zonas urbanas como rurales. (Organización de las Naciones Unidas, 2006, art. 9, p. 10).

La presencia de enfoques complementarios al jurídico en el estudio de la accesibilidad en el campo de la educación se materializa en el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) que refiere a

> las condiciones que deben cumplir los entornos, procesos, bienes, productos y servicios, así como los objetos o instrumentos, herramientas y dispositivos para ser comprensibles, utilizables y practicables por todas las personas en condiciones de seguridad y comodidad y de la forma más autónoma y natural posible. (Banco Interamericano de Desarrollo, 2001, p. 12).

De acuerdo con lo anterior, cualquier diseño en educación debe ser accesible. La afectividad entendida como "capacidad para ser influido por agentes externos o internos a través de la experimentación de emociones vinculadas con vivencias de la realidad externa" (León Corredor, Alfonso, Romero, Bravo-Osorio y López, 2018, p. 23). Este es otro de los elementos necesarios en el desarrollo de una educación geométrica para todos.

En las investigaciones cuyos resultados se presentan en este documento se asume un ambiente de aprendizaje como

> […] lugar, concepto vivo, resultado, e instrumento dinamizador para que ocurran fenómenos del aprendizaje en una población específica. Es decir, permite crear condiciones para la participación activa y permanente de estudiantes y profesores desde un ejercicio interactivo para la co-construcción del conocimiento, lo cual da lugar a la constitución de redes de donde la participación crítica de personas constituye comunidades de aprendizaje con propósitos y responsabilidades comunes que les permite identificarse como parte de un colectivo. (León Corredor, Alfonso, Romero, Bravo-Osorio y López, 2018, pp. 10-11).

Un ambiente de aprendizaje accesible y con afectividad da cuenta del alcance de aprendizaje para todas las personas involucradas en la práctica pedagógica y didáctica, se diseña retomando principios del DUA. La comprensión de la presencia de la accesibilidad y de la afectividad en los ambientes de aprendizaje requiere investigación que, para el caso de la educación geométrica, incorpore las relaciones entre geometría, aritmética, educación, tecnología y formación profesional.

Problemas, emociones, tecnología y aprendizaje

Tradicionalmente, los ejercicios de investigación en solución de problemas se han enfocado en las habilidades cognitivas generales, aunque durante los estados iniciales del proceso de solución de problemas se han encontrado relaciones con el proceso de reconocimiento, definición y representación del problema. Para comprender el proceso de solución de problemas, actualmente se cuenta con las teorías cognitivas. Desde este campo, la cognición es la capacidad para procesar información. Los estudios en cognición se han desarrollado desde dos perspectivas: la psicología cognitiva y la ciencia cognitiva. La psicología cognitiva estudia los procesos mentales desde la teoría del procesamiento de información y la teoría evolutiva. Desde la segunda ola de la revolución cognitiva, la explicación de del funcionamiento de la mente, no se simplifica en el procesamiento de información, sino como resultado de la regulación adaptativa que ilustran nuevas características de atención, categorización, razonamiento, aprendizaje, emoción y motivación.

Un problema significa obstáculo, el cual genera una incertidumbre que debe ser examinada y resuelta. Sin embargo, la forma de solucionarlos depende del tipo de problema y su complejidad (Mayer y Wittrock, 1996). Solucionar un problema es desarrollar un proceso cognitivo para encontrar un camino que permita la transición de un estado inicial a un estado meta. Las cuatro tradiciones son: Gestalt, comportamiento, procesamiento de la información y psicosométrica. La tradición de la Gestalt propone que la reestructuración es un proceso esencial en el pensamiento y parte fundamental de la solución de problemas. Esta tradición busca comprender el *insight*, el pensamiento productivo y la reorganización estructural. De los ejemplos más tradicionales se encuentra el problema de la vela de Duncker, mediante el cual se demuestra cómo la presentación de los componentes de un problema incide en la percepción del sujeto y por lo tanto en su solución. La tradición del estudio del comportamiento está asociada a los procesos de estímulo respuesta. La tradición del procesamiento de información está basada en la idea de búsqueda en un espacio del problema, donde sus componentes están asociados a la entrada de información, proceso, codificación, representación, almacenamiento y salida de información (Montealegre, 2007).

El desarrollo de las nuevas tecnologías permite aumentar las estrategias para el reconocimiento de los estados emocionales y cognitivos de los estudiantes durante la solución de problemas. El reconocimiento de los estados emocionales no solo corresponde a los gestos tradicionales, actualmente hay un interés en la comunidad académica por reconocer como el cuerpo, en su totalidad, es utilizado para expresar emociones relacionadas con el aprendizaje. De otra parte, las herramientas tecnológicas brindan la posibilidad de realizar seguimientos de los estados de la solución del problema transitados por los estudiantes. Así, la relación entre los datos emocionales y cognitivos abre nuevas posibilidades en la comprensión del aprendizaje y el beneficio para promoverlo más asertivamente (Kim y Hannafin, 2011).

Las emociones están compuestas de varios códigos que se presentan a lo largo del aprendizaje y están relacionadas con el proceso y esfuerzo cognitivo de los estudiantes (Kadar et al., 2016). Los gestos emocionales están clasificados de acuerdo con los procesos mentales y al uso de diferentes partes del cuerpo en la intensión de buscar alternativas para acercarse a la representación y solución del problema. Los gestos de los estudiantes pueden ser capturados por sistemas sensoriales que no solo reconocen las expresiones faciales, sino además las expresiones corporales asociadas a aspectos como: manos en el mentón, manos en la cabeza, mirada hacia el problema, mirada hacia un punto específico fuera del problema, etc. Por ejemplo, desde la teoría del fluir, los gestos emocionales están relacionados con las variables "Habilidades del aprendiz" y "Desafío del problema de aprendizaje", y se pueden agrupar en expresiones como aburrimiento, concentración y ansiedad. Cuando un estudiante tiene suficientes habilidades en relación con el desafío planteado, entonces la reacción emocional es aburrimiento; por otra parte, cuando las habilidades del estudiante son bajas en relación con el desafío del problema, entonces la respuesta emocional es estado de ansiedad. Mediante técnicas de aprendizaje automático se han desarrollado modelos que clasifican las expresiones faciales en gestos emocionales asociados al aprendizaje (Graesser et al., 2014). La entrada de datos del sistema informático incluye expresiones faciales, el movimiento de las manos, la posición de las manos y las intenciones expresadas mediante la combinación de los órganos de cuerpo de acuerdo con estados específicos del problema. La generación del sistema clasificador se hace mediante técnicas de agrupamiento como *k-means*, *canopy* y redes neuronales. Las perspectivas de uso de esta tecnología ofrecen nuevas posibilidades en atención al soporte asertivo durante el aprendizaje en distintas poblaciones.

De otra parte, el reconocimiento del estado cognitivo a través del seguimiento de los pasos empleados por los estudiantes durante la solución del problema también brinda nuevas posibilidades en tanto supera las limitaciones de memoria de los tutores humanos para recordar de manera precisa los diferentes estados asertivos y no asertivos de los sujetos en la solución. Por ejemplo, muchos de los juegos matemáticos emplean fichas físicas o bloques en la solución de problemas de transformación. Juegos como ajedrez, torres de Hanoi y la escalera requieren la habilidad de manipulación. Entonces, la forma en que los estudiantes manipulan las fichas y su orden durante la solución del problema puede ser detallada con sistemas tecnológicos para determinar aspectos como: errores de los estudiantes, conceptos errados, conceptos correctos, tendencias a errores, etc. (Pea, 2004). Las nuevas tendencias de herramientas didácticas apoyadas en la tecnología de *internet de las cosas* permite hacer seguimientos de fichas y de esta manera construir, sobre los espacios de los problemas de aprendizaje, el espacio del estudiante y de esta manera realizar comparaciones sobre el desempeño del estudiante y de otros estudiantes para también mejorar la asertividad de las intervenciones del docente.

CURRÍCULOS Y ACCESIBILIDAD: LOS AMBIENTES DE RURALIDAD

Las reformas curriculares en geometría han jugado un papel preponderante en el fortalecimiento de la economía colombiana. Inicialmente se promovió un currículo prescrito que varió de un periodo a otro así: desde 1903 hasta 1956, los currículos se centraron en la enseñanza de la geometría euclidiana a través de demostraciones; luego, a partir de 1962, se enfatizó en el análisis matemático (León, 2005). Sin embargo, los currículos no fueron la solución para el progreso científico y tecnológico de la nación, por ello la Ley General de Educación de 1994 promovió la autonomía curricular que dio libertad a las instituciones educativas para elaborar su propio currículo y formular los logros de su trabajo pedagógico.

La literatura en Educación Matemática, en el ámbito internacional, hace énfasis en incrementar investigaciones para formular currículos en ambientes rurales en los que se integren: la cultura, la historia y los intereses de las comunidades (Apple, 1994), apoyando los proyectos de vida de la juventud rural (Howley, Howley y Huber, 2005), conectándolos con los conocimientos matemáticos y culturales (William, 2002);, al identificar qué varía y qué permanece en las culturas rurales, en virtud de que no toda "cultura" rural es igual, ya que su densidad poblacional y su actividad económica hace que cambie (Long, Bush, y Theobald, 2003). Y se invita a que los profesores que enseñan en las escuelas rurales a diseñar currículos en los que los estudiantes puedan formular y expresar sus ideas matemáticas orientadas a la articulación teorías matemáticas y los lugares en los que habitan (Howley y Hopkins, 2005).

En el ámbito nacional, algunos esfuerzos como los desarrollados por ACACIA[23] relacionados con la formación del educador matemático en poblaciones indígenas de América Latina y el Caribe, invitan a realizar organizaciones curriculares en las que se vincule lo regional (las raíces históricas y las prácticas ancestrales) con las matemáticas (formales y convencionales) (León et al., 2014; Lipka y Adams, 2004).

En lo que respecta al diseño curricular para la geometría escolar, se enfatiza en que la geometría es un producto social y cultural de la humanidad; este conocimiento emergió de algunas actividades rurales como fueron: construir edificios, construir estanques de agua, canalizar, sembrar, distribuir terrenos, entre otras. Por ejemplo, algunas investigaciones han reconocido las prácticas de tejedores, alfareros y granjeros, con poca o ninguna escolaridad y sin influencia de la cultura occidental, y han mostrado las cómo estas comunidades logran desarrollar distintas representaciones planas del espacio (Mukhopadhyay, 1987, citado en Hershkowitz, 1990). Esto permite reconocer que históricamente los conocimientos geométricos emergen de la exploración que hace el hombre de su cuerpo en relación con espacio que le circunscribe (Heamon, 1978).

23 Este es un proyecto financiado por Erasmus de la Unión Europea, que está siendo coordinado por la Dra. Olga Lucía León.

A nivel internacional, algunos esfuerzos curriculares han tomado como referencia los del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (inglés National Council of Teachers of Mathematics, NTCM, 2000) para mostrar dos maneras de proceder en matemáticas: una informal y otra formal, y con ellas ofrecer oportunidades para que los escolares rurales puedan acceder al conocimiento geométrico. Una de las organizaciones representativas de este asunto es ACCLAIM, que ha fomentado las conexiones entre las matemáticas y la cultura de las comunidades rurales a través de programas como: la Pedagogía Cultural del Lugar de la Educación Matemática (PMBE) (Showalter, 2013), y la reforma curricular de Matemáticas en un Contexto Cultural Math in a Cultural Contexto (MCC), que promueven conexiones entre las matemáticas y la cultura de las comunidades rurales (Howley y Hopkins, 2005).

Dentro de esta propuesta se aborda el pensamiento métrico y geométrico. Las investigaciones desarrolladas por Lipka et al. (2012) y Rickard (1980, 1995, 2005, 2010, 2013, 2016, 2017) con la cultura Yup'ik ayudan a consolidar el módulo "construyendo un estanque para pescados: una investigación sobre la demostración, propiedades, perímetro y área". En esta última investigación se parte de cómo la cultura construye estanques de pescado para secar el salmón y luego se articula con la malla curricular de matemáticas propuesta para grado sexto, con los cuales se enseña a los estudiantes a descomponer los rectángulos que están vinculados a los estantes de peces y en los que se requiere un conjunto de conexiones matemáticas que deben realizar los estudiantes.

Lenguaje y forma con poblaciones sordas

Un ambiente de aprendizaje afectivo y accesible tiene en cuenta no solo el desarrollo cognitivo, sino también el desarrollo emocional, lingüístico y cultural, como parte de la integralidad del ser humano (Baquero, 2017). En los primeros años de vida un niño utiliza los gestos deícticos, simbólicos e icónicos, que evolucionan de uno a otro hasta adquirir un lenguaje "verbal", (Chamarrita, 2007). En el caso de los niños sordos el gesto va estrechamente unido a ese desarrollo lingüístico. Gran parte de los sentimientos, emociones y deseos pueden transmitirse a través de gestos. La imitación y la designación como parte del desarrollo del lenguaje, en los primeros desarrollos comunicativos, son del tipo viso-gestual y le dan al niño sordo la posibilidad de conocer y comunicar las cosas que le rodean (Castro, 2002).

El cuerpo como unidad multiestructural de expresión, de cognición, de generación de emociones y de interacción se convierte no solo en una mediación para el aprendizaje (es herramienta), sino también se constituye en un organismo que aprende, produce, transforma y guarda aprendizaje (Calderón y León, 2016). En la siguiente secuencia que pertenece a una sesión de un ambiente de aprendizaje del número con poblaciones sordas se identifican las relaciones:

- Cantidad-Forma: La estudiante no expresa de manera inmediata “cuatro”, presenta la forma que percibe para la cantidad y recupera la cantidad con su forma (ver fotos 1-5; Figura 1).
- Lengua-Forma: La estudiante expresa con su mano derecha parte del signo lingüístico que designa una forma (el signo lingüístico análogo en español es la palabra “rombo”), con su mano izquierda expresa el proceso de conteo (movimiento deíctico) (ver fotos1- 4; Figura 1) y al final dos signos lingüísticos, el de la forma y el numeral (ver foto 5; Figura 1).
- Cognición-Lengua-Emoción: La estudiante concentra su atención en la cantidad, se presenta una expresión emotiva neutra, se percibe concentración, no hay signos de emociones particulares, el estado afectivo parece vincularse al objeto (mirada fija en las manos) (ver fotos 1-4; Figura 1), cuando obtiene la doble expresión lingüística con la que se presenta la cantidad identificada, hay una expresión de satisfacción o de alegría (sonrisa y mirada al interlocutor) (ver foto 5; Figura 1).

Figura 1. Fotografías de participación de una estudiante en la representación de cantidad
Fuente: Elaboración propia.

Los niños utilizan la lengua para designar objetos de su entorno y se acompañan de actos deícticos y gestos simbólicos que corresponden a las formas que perciben, lo que quieren expresar de ello e incluso un estado emotivo o afectivo que se vincula al desarrollo cognitivo. “Para Piaget, los niños no ‘leen’ de su medio ambiente espacial, sino que por el contrario construyen sus ideas acerca de las formas mediante su manipulación activa en el entorno” (citado por Clements y Sarama, 2015, p. 200); existe entonces también un desarrollo aritmético que pasa por la lengua, forma y espacio, lo que manifiesta el avance en diferentes trayectorias de aprendizaje que se complementan entre sí. Las características de la lengua de señas y la importancia de la información viso-gestual pueden ser consideradas como un recurso potente para integrar diferentes enfoques en los procesos de aprendizaje de la geometría (Duval, 2016).

La presencia de estudiantes con capacidades diferentes en la investigación con las trayectorias de aprendizaje contribuye a la comprensión de procesos de aprendizaje de las matemáticas en poblaciones diversas, a partir de experiencias con personas sordas y ciegas. En la investigación llevada a cabo por Palomá (2018) se tuvieron en cuenta aspectos del desarrollo emocional, gestual y corporal de las personas al momento de participar en el juego, y se analizó la importancia de estos aspectos para el aprendizaje de las matemáticas. En la Figura 2 se muestran algunos de los participantes del juego "La Escalera" con quienes se empezaron a hacer estudios sobre los gestos y emociones frecuentes de los jugadores. En la investigación participaron diferentes poblaciones como amas de casa, estudiantes de colegio, universidad y profesores de diferentes asignaturas.

Figura 2. Prototipo del juego "La Escalera" con adaptaciones a poblaciones.
Fuente: Elaboración propia.

En la investigación se establecieron niveles de una trayectoria del juego "La Escalera" en los que los jugadores van transitando (principiante, intermedio y experto). En la Figura 3 se observan dos grafos de dos jugadores diferentes, uno intermedio y otro experto durante la realización del juego.

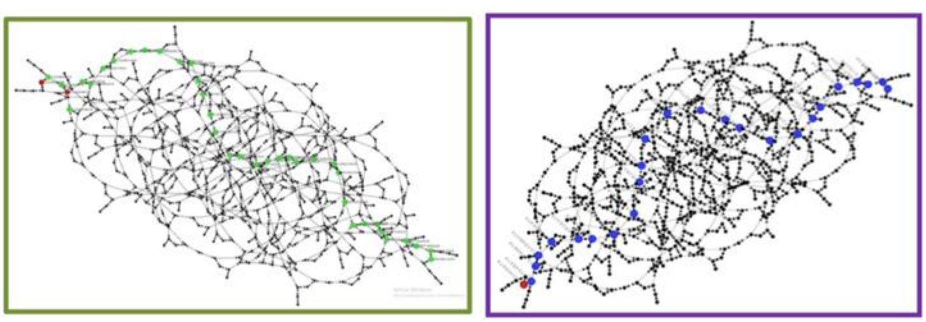


Figura 3. Algunas emociones del jugador al desarrollar el juego "La Escalera".
Fuente: Elaboración propia.

Paralelamente, la investigación buscaba articular elementos de las emociones de los jugadores, tanto los gestos emitidos por ellos como las situaciones de juego. En la Figura 4, se muestra una gráfica con el porcentaje de nueve emociones que un jugador de "La Escalera" presentó al desarrollar el juego en las primeras ocho jugadas.

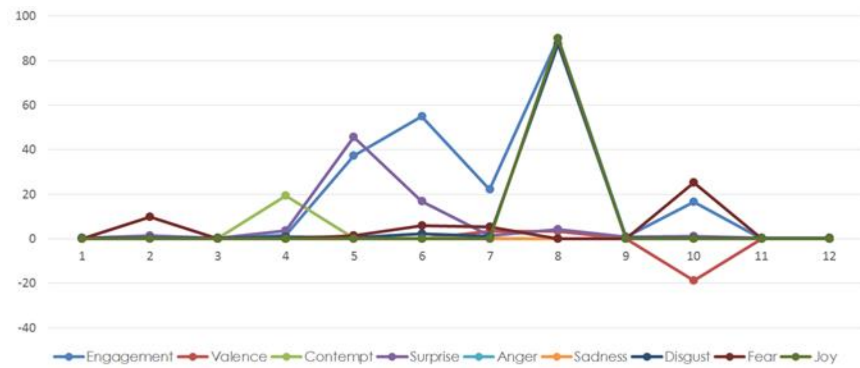


Figura 4. Algunas emociones del jugador al desarrollar el juego "La Escalera".
Fuente: Elaboración propia.

En este estudio exploratorio se muestran resultados que indican que al construir patrones aritméticos simultáneamente se desarrollan procesos como la orientación, localización y ubicación espacial, que son necesarios para la formulación de patrones aritméticos. Así, en esta investigación se encontraron los siguientes patrones:

- Corporales. Los movimientos orientados de las unidades básicas (M: mirada, M: mano y C: cabeceo) se consolidan en una secuencia de movimientos que se manifiesta en un ritmo corporal reiterativo. Es decir, se manifiesta un patrón corporal.

- Lingüísticos. La enunciación de las unidades básicas (A: movimiento de amarilla y R: movimiento de roja) se consolida en una secuencia de enunciaciones que se manifiesta en un "tarareo tipo canción" reiterativo. Se manifiesta un patrón lingüístico.

- Aritmo-geométrico. El registro de cantidades en organizaciones espaciales siguiendo regularidades para la organización de las cantidades, según una forma geométrica. Se manifiesta un patrón aritmo-geométrico.

En la Figura 5, se muestra que en el nivel 8 de la trayectoria de aprendizaje de patrones estudiada se encuentran procesos de representación de patrones en el que cada número de cada fila significa la cantidad de movimientos de una ficha de un color. Así, en la fila 3 se halla: el 1 es un movimiento de la ficha roja, el 2 de la ficha amarilla, y los siguientes 2 de la roja, y así sucesivamente.

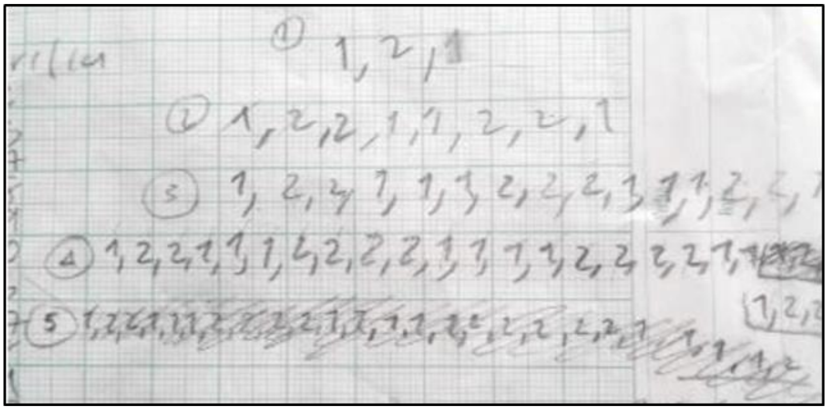


Figura 5. Conteo mínimo de movimientos en el juego “La Escalera”.
Fuente: Elaboración propia.

El diseño de una trayectoria hipotética para el desarrollo de patrones incorporando un juego accesible a poblaciones, como el de “La Escalera”, permitió relacionar emociones, grafos para representar los posibles recorridos de los jugadores y patrones de diversos tipos. En este tipo de estudio se articulan de manera natural procesos aritméticos y procesos geométricos.

NÚMERO, FORMA, ESPACIO Y LA DISCAPACIDAD INTELECTUAL

En la entrada geométrica como una vía para el desarrollo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje asociadas al número, se encuentra el manejo del espacio. Se puede considerar, por ejemplo, que dos elementos de una misma naturaleza ocupan más espacio que uno; un bebé de meses puede reconocer la diferencia de cantidad al identificar perceptualmente el espacio que algunos elementos ocupan.

Un factor importante para el diseño de tareas de subitización es el arreglo espacial de los objetos (Clements y Sarama, 2015). Para los niños pequeños, los objetos puestos en una fila son los más fáciles, luego vienen los arreglos rectangulares (pares de objetos en filas) y arreglos de tipo “dado” o “dominó”, seguido por combinaciones de arreglos. Sin embargo, se aclara que estos aspectos pueden potenciar las habilidades o generar obstáculos si no se reconocen las conexiones entre la cardinalidad y los arreglos figúrales, es decir que se hace necesario cuantificar ese espacio.

En los estudios con población en condición de discapacidad intelectual, se reconoce que se debe generar un sistema de apoyo continuo que fortalezca las experiencias de aprendizaje y dote de significado los procesos que va desarrollando. Clements y Sarama (2015) plantean que con poblaciones que tengan necesidades especiales, los profesores deben cultivar la familiaridad con los patrones regulares, mediante la realización de juegos; no se debe subestimar en estas poblaciones las competencias numéricas básicas como la subitización.

Previo a la cantidad cinco, las cantidades 1, 2, 3 y 4 se trabajan desde distintas configuraciones y al realizar procesos de subitización con fichas los niños no solo discriminan la cantidad, sino también la forma. En la imagen se muestra el grupo de piezas dado a los niños para un taller de imágenes instantáneas, los modos de organización asociados a la cantidad y procesos de reparación de forma dada una misma cantidad.

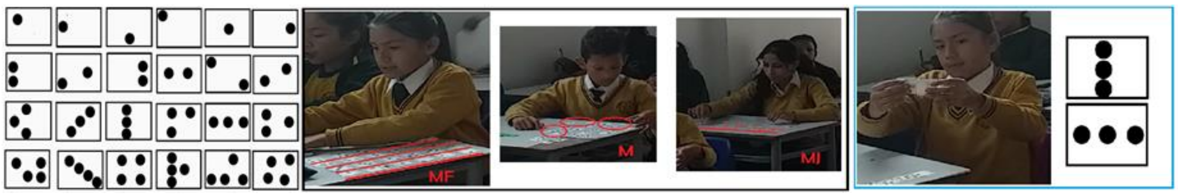


Figura 6. Procesos de subitización perceptual.
Fuente: Elaboración propia.

Patrones figurales posteriores a la cantidad cinco dan cuenta de ideas de composición y descomposición a través de la subitización conceptual y asociado a la forma se pueden establecer colecciones estructuradas como las siguientes, en las cuales los niños dicen cuánto falta para ser cinco o para ser diez, o hacen relaciones como “cinco y dos, siete”. Esto permite establecer una relación directa entre las configuraciones, la percepción de cantidad y las características aditivas del sistema numérico.

Por otro lado, cuando se trabaja una trayectoria de conteo, además de presentar patrones figurales, se hace necesario proponer diferentes configuraciones espaciales de la cantidad, ya que se requiere que el niño genere un orden para realizar el conteo y pueda explicitar la serie numérica acompañada de gestos manuales y movimientos de los ojos. Esto muestra que el niño ejerce una actividad al establecer una correspondencia entre el conjunto de los objetos por una parte y la serie numérica hablada por la otra. (Vergnaud, 2003, p. 102).

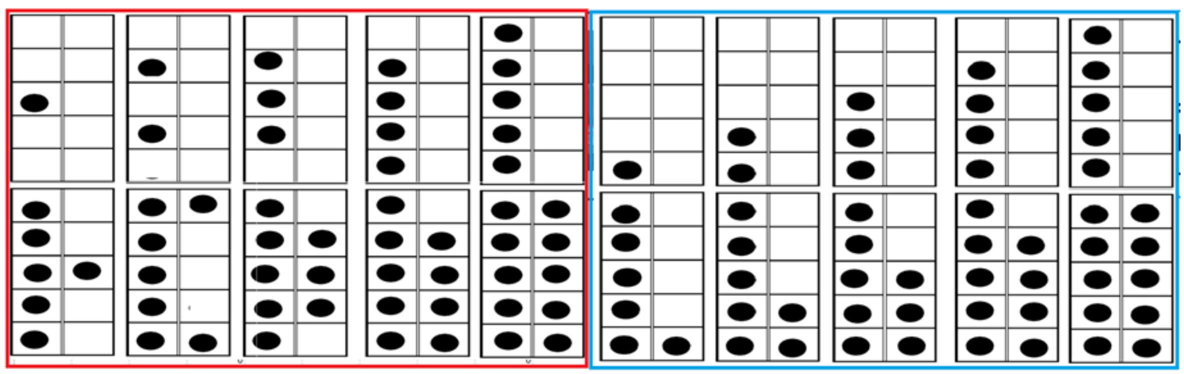


Figura 7. Numerales con forma.
Fuente: Elaboración propia.

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) es una piedra angular dentro de la estructura, que conocemos hoy en día como análisis matemático. La forma en la cual se presenta el TFC actualmente en las universidades se desarrolla desde un punto de vista a-histórico. Esta manera es correcta matemáticamente, pero ha ofrecido problemas para su comprensión. En este escenario, surge la necesidad de ofrecer una manera distinta de enseñanza del TFC que incorpore diferentes vías de acceso al este para disminuir barreras de acceso a estudiantes en diferentes condiciones de comprensión. En este pequeño apartado se propone retomar como vía alterna la presentación actual, la que recupera macro-argumentos de Leibniz, de carácter geométricos con alto valor explicativo.

En efecto, la idea que desarrolló Gottfried Leibniz para crear su cálculo infinitesimal fue que la suma y la resta son operaciones inversas, lo que conlleva a pensar que el TFC es obvio (Katz, 2008). Leibniz buscaba hallar el área bajo una curva y para eso construyó una curva auxiliar para la cual la pendiente es proporcional a la altura de la curva original (Bressoud, 2011), mediante el uso de herramientas geométricas. Su TFC apareció en 1693, en el *Acta Eruditorum*, una revista mensual que él mismo ayudó a fundar (Struik, 1969).

En la mayoría de textos (salvo pequeños cambios), se suele enunciar el TFC de la forma como se muestra en la Figura 8.

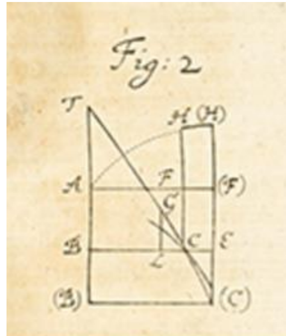
Teorema Fundamental del Cálculo: Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$

(1) Si $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

(2) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ donde F es una antiderivada de f, es decir, $F'(x) = f(x)$.

Figura 8. Presentación habitual del TFC en textos universitarios.
Fuente: Adaptado de Stewart (2015, p. 326).

La presentación del TFC que se muestra en la Figura 9 corresponde a la segunda parte del TFC, el numeral 2 o parte evaluativa (Figura 2 en *Acta Eruditorum*, citado por Roinila, 2012). Los puntos entre paréntesis (*H*), (*F*), (*C*) y (*B*) son infinitesimales. La curva *AH(H)* es la figura a la que se le quiere hallar el área, y la curva *C(C)* es la curva cuya derivada en *C* es precisamente *FH*. Se debe tener en cuenta que Leibniz alcanzó su resultado comparando los triángulos *TBC* (triángulo característico) y *CE(C)* (el triángulo diferencial).



(Mathematical Treasure: Leibniz's Papers on Calculus)

(a) Primero denominó a $AF = y$, $FH = z$, $BT = t$ y $FC = x$

(b) Definió un distancia constante a, tal que $TB : BC = FH : a$ (el uso de estos parámetros era usual en la época (**Bressoud; 2011**) y (**Lopez; J. 2011**)).

(c) Como $FC = x$ y $AF = y$, entonces $dy = F(F) = CE$ y $dx = E(C)$.

(d) De la relación de los triángulos característico y diferencial, se tiene que $TB : BC = E(C) : EC$, luego $TB : BC = dx : dy$

(e) Concluyó que, $dx : dy = z : a$, es decir, $adx = zdy$. Este último producto es el área de la región $F(F)(H)H$ y adx es el área de un rectángulo de altura $E(C) = dx$ y ancho el parámetro a.

(f) Al *sumar* a ambos lados de esta igualdad, se obtiene que $\int adx = ax$, es el área de un rectángulo de altura $FC = x$ y ancho a, mientras que $\int zdy$ es el área de la región $AFHA$. Lo que muestra que $C(C)$ es la antiderivada (quadratrix como se denominaba) de la curva $AH(H)$.

✠

Figura 9. Reconstrucción de la demostración de Leibniz del TFC.
Fuente: *Acta Eruditorum*, citado por Roinila (2012).

Leibniz dio así una forma para encontrar el área bajo una curva. Al igual que Newton, propone un resultado y da el algoritmo para su uso. En efecto, al utilizar nuestra notación moderna y usando el resultado de Leibniz, se puede concluir (2):

Si se quiere hallar el área bajo una curva con ordenada y, lo que se necesita es encontrar una curva z tal que $z = \int ydx$. Es decir, si $y = f(x)$, se debe buscar $z = F(x)$ (su antiderivada) que satisfaga: $\frac{dz}{dx} = \frac{y}{1} \rightarrow dz = ydx$. De manera particular, $\int_a^x dz = \int_a^x ydx$, o análogamente,

$$F(x) = \int_a^x dz = \int_a^x ydx = \int_a^x f(x)dx.$$

En estos términos, *F(a)=0*, entonces $F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)dx$. Se acaba de demostrar la siguiente versión del TFC (2) (Lopez, 2011):

Teorema: Sea $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ una función continua y suponga que $F: [a, b] \to \boldsymbol{R}$ es una cuadratrix para *f*, es decir, *F* es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y $F'(x) = f(x)$ para todo *x* en (a, b). Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Leibniz llega al TFC empleando el triángulo diferencial y su relación con el triángulo característico. Esta relación también fue usada en su Teorema de Transmutación (Katz, 2008). Sin embargo, el uso del triángulo diferencial no fue exclusivo de él. Isaac Barrow en su versión del TFC ya lo había empleado. ¿Por qué entonces no se dice que Barrow fue el creador del TFC? Según D. T. Whiteside, puede ser por la posibilidad de ofrecer un algoritmo (como sí lo hicieron Newton y Leibniz) para hallar la solución de un problema de áreas, más que mostrar, únicamente, que la derivación e integración son procesos opuestos (Bressoud, 2011).

Como datos para el lector, pueden verse las similitudes entre la demostración de Leibniz y Barrow en Lopez (2011).

REFLEXIONES FINALES

La presencia de la accesibilidad y la afectividad en la educación geométrica, además de generar la articulación de estructuras provenientes desde diversos campos del saber en las investigaciones que la incorporan, es una oportunidad para desarrollar una postura ética y política para el sistema educativo colombiano, en donde se reconozca el derecho a la educación para todas las poblaciones, y en particular el derecho una educación geométrica desde la primera infancia hasta la educación universitaria.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al proyecto ACACIA (561754-EPP-1-2015-1-COEPPKA2- CBHE-JP) cofinanciado por el programa Erasmus + ACACIA: Centros de Cooperación para el Fomento, Fortalecimiento y Transferencia de Buenas Prácticas que Apoyan, Cultivan, Adaptan, Comunican, Innovan y Acogen a la comunidad universitaria.

REFERENCIAS

Apple M. W. (1994). *Educación y poder*. Barcelona: Paidós.

Aurtunduaga, S. y Ortega, K. (2012). *Identificación de competencias asociadas a la resolución de problemas matemáticos en un grupo de estudiantes sordos de la educación media colombiana.* (Trabajo de grado). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Baquero, G. (2017). *Modelo para creaciones didácticas accesibles y afectivas en cooperación.* (Trabajo de grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Bressoud, D. M. (2011). Historical reflections on teaching the fundamental theorem of integral calculus. *American Mathematical Monthly, 118*(2), 99-115.

Brousseau, G. (2010). *Education et didactique des mathématiques*. Recuperado de https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00466260/document

Calderón, D., y León, O. (2016). *Elementos para una didáctica del lenguaje y las matemáticas en estudiantes sordos de niveles iniciales.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Castiblanco, A., y León Corredor, O. (2018). *Fundamento Conceptual Accesibilidad.* Recuperado de https://acacia.red/udfjc/wp-content/uploads/sites/5/2019/05/AA-Accesibilidad.pdf

Castro, P. (2002). Aprendizaje del lenguaje en niños sordos: fundamentos para la adquisición temprana de lenguaje de señas. *Revista Temas de Educación,* 9, 14-27.

Chamarrita, F. (2007). Comunicación Gestual en la Infancia Temprana: Una Revisión de su Desarrollo, Relación con el Lenguaje e Implicancias de su Intervención. *Psykhe*, *16*(2), 107-115.

Clements, D., y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana edad: El Enfoque de las Trayectorias de Aprendizaje.* Dember: Learning Tools LLC.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas.* (Vol. 2, pp. 61-94). Bogotá: UFD Editorial.

Espasadin Lopes, C., y Jaramillo, D. (2017). *Escenas de la insubordinación creativa en las investigaciones en educación matemática en contextos de habla española*. North Caroline: Lulu Press Inc.

Graesser, A. C., D'Mello, S. K., y Strain, A. C. (2014). Emotions in advanced learning technologies. *International handbook of emotions in education*, 473-493.

Heamon, A. J. (1978). *The concept of visuo-spatial ability and associated psychological processes* (Tesis doctoral). Universidad de Surrey, Guildford, Surrey, Inglaterra.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and Cognition* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge University Press.

Howley, A. A., y Hopkins, T. (2005). *Does place influence mathematics achievement outcomes? An investigation of the standing of appalachian Ohio School Districts*. Ohio: Appalachian Collaborative Center for Learning.

Howley, C. B., Howley, A. A., y Huber, D. S. (2005). Prescriptions for rural mathematics instruction: Analysis of the rhetorical literature. *Journal of Research in Rural Education. Journal of Research in Rural Education, 20*(7), 1-16.

Kadar, M., Ferreira, F., Calado, J., Artifice, A., Sarraipa, J., y Jardim-Goncalves, R. (2016). Affective computing to enhance emotional sustainability of students in dropout prevention. *Proceedings of the 7th International Conference on Software Development and Technologies for Enhancing Accessibility and Fighting Info-exclusion*, 85-91.

Kaiser, A. P., y Hester, P. (1993). Generalized Effects of Enhanced MIlieu Teaching. *Journal of Speechh, Language, and Hearing Research*, 1320-1340.

Katz, V. (2008). *A History of Mathematics*. Nueva York: Harper Collins.

Kim, M. C., y Hannafin, M. J. (2011). Scaffolding problem solving in technology-enhanced learning environments (TELEs): Bridging research and theory with practice. *Computers & Education, 56*(2), 403-417.

Lahoz-Beltrá, R. (2007). *BIOINFORMÁTICA simulación, vida artificial e inteligencia artificial.* Madrid: Díaz de Santos, S.A.

Landaverde, Felipe de Jesús (1955). *Curso de Geometría para Secundaria y Preparatoria.* México D. F.: Editorial Progreso.

León, O. (2005). *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría* (Tesis doctoral no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

León Corredor, O., Alfonso, G., Romero, J., Bravo-Osorio, F. y López, H. (2018). *Fundamento Conceptual Ambientes de Aprendizaje*. Recuperado de https://acacia.red/udfjc/: https://acacia.red/udfjc/wp-content/uploads/sites/5/2019/05/AA-F.Conceptual.pdf

León, O. L., Bonilla, M., Romero Cruz, J. H., Gil Chavez, D., y Otros, Y. (2014). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Lipka, J., y Adams, B. (2004). Appalachian Collaborative Center for Learning, Assessment and Instruction in Mathematics Culturally Based Math Education as a Way to Improve Alaska Native Students' Math Performance Jerry Lipka University of Alaska Fairbanks Barbara Adams University of. *Science and Technology*, 20, 1-52.

Lipka, J., Kisker, E. E., Adams, B. L., Rickard, A., Andrew-ihrke, D., Yanez, E. E., y Millard, A. (2012). The Potential of a Culturally Based Supplemental Mathematics Curriculum to Improve the Mathematics Performance of Alaska Native and Other Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(1), 75-113.

Lopez, J. (2011). *Reflexions on Leibniz' proof of the fundamental theorem of calculus*. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Jorge_Fernandez25/publication/280938138_REFLEXIONS_ON_LEIBNIZ%27_PROOF_OF_THE_FUNDAMENTAL_THEOREM_OF_CALCULUS_Jorge_M_Lopez_Fernandez/links/55cce6af08aebd6b88e05a46.pdf

Long, V., Bush, W. S., y Theobald, P. (2003). *«Place» Value: The Rural Perspective*. Occasional Paper, 3, 5-17. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED478060.pdf

Mayer, R. E., y Wittrock, M. C. (1996). Problem-solving transfer. *Handbook of educational psychology*, 47-62.

Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1994). *Ley 115 de febrero 8 de 1994*. Por la cual se expide la Ley General de Educación. Bogotá: Autor.

Montealegre, R. (2007). The Solution of Cognitive Problems: A Cognitive and Socio-Cultural Reflection. *Avances en Psicología Latinoamericana, 25*(2), 20-39.

National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). *Principles and standards for school mathematics* (Vol. 1). Reston, Virginia: Autor.

Organización de las Naciones Unidas (2006). *Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad y Protocolo Facultativo*. Recuperado de https://www.un.org/disabilities/documents/convention/convoptprot-s.pdf

Palomá, B. (2018). *Una trayectoria real del juego La Escalera vinculada a hipótesis que potencian el aprendizaje de las funciones desde poblaciones diversas* (tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Pea, R. D. (2004). The social and technological dimensions of scaffolding and related theoretical concepts for learning, education, and human activity. *The journal of the learning sciences, 13*(3), 423-451.

Rickard, A. (1980). Evolution of a Teacher´s Problem Solving Instruction: A Case Study of Aligning Teaching Practice with Reform in Middle School Mathematics. *RMLE Online, 1*(20), 1-15.

Rickard, A. (1995). Teaching Prospective Teachers about Mathematics and Culture: An Example from a Teacher Education Program in Alaska. *Journal of Experimental Education, 64*(1), 1-16.

Rickard, A. (2005). Constant Perimeter, Varying Area: A Case Study of Teaching and Learning Mathematics to Design a Fish Rack. *Journal of American Indian Education, 44*(3), 80-100.

Rickard, A. (2010). Analysis of a Culturally Based Sixth Grade Mathematics Module: Addressing Multicultural Education in School Mathematics. *National Forum of Multicultural Issues Journal, 7*(1), 306-307.

Rickard, A. (2013). Unpacking Middle School Student's Ideas about Perimeter: A Case Study of Mathematical Discourse in the Classroom. *Mathematics Educator, 23*(2), 60-87.

Rickard, A. (2016). Teaching prospective teachers about mathematical reasoning: An example from practice. *National Forum of Teacher Education Journal*, *26*(3), 1-10.

Rickard, A. (2017). Rectangles and Fish Racks: An Example of Connecting Indigenous Culture and Mathematics. *National Forum of Multicultural Issues Journal, 14*(1), 1-8.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Universitat de Barcelona.

Roinila, M. (2012). *Gottfried Leibniz*. Recuperado de https://www.mv.helsinki.fi/home/mroinila/leibniz1.htm

Showalter, D. A. (2013). Place-Based Mathematics Education: A Conflated Pedagogy? *Journal of Research in Rural Education, 28*(6), 1-13.

Stewart, J. (2015). *Calculus.* Boston: Cengage Learning.

Struik, D. J. (1969/2014). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Princeton: Princeton University Press.

Verganud, G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad*. Ciudad de Mexico: Editorial Trillas.

William, B. (2002). *Culture and mathematics: An overview of the literature with a view to rural contexts. Working Paper Series*, 2, 4-23. Recuperado de https://archive.org/details/ERIC_ED471919/page/n21

Wittmann, E. C. (2013). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Wiesbaden: Springer-Verlag.

Reportes de investigación

RESIGNIFICACIÓN DE LOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN LOS POLIEDROS PLATÓNICOS A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN

Pablo Andrés Carmona, Paola Andrea Correa

I. E. José Eusebio Caro-Medellín, I. E. Luis Carlos Galán Sarmiento-Medellín

pacodim25@hotmail.com, paocorrea00@yahoo.es

Esta investigación estudió la construcción de conocimiento matemático a través de la modelación como práctica social, para generar procesos de resignificación de los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos, incorporando el origami modular como herramienta pedagógica en las prácticas de aula. Para este propósito nos apoyamos en la teoría Socioepistemológica, la cual asume "la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto" Cantoral (2013). Se utilizó como Metodología de Investigación la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). Se diseñaron y aplicaron tareas, sustentadas en las prácticas de modelación de Arrieta y Díaz (2015) para analizar sus resultados y generar conclusiones.

INTRODUCCIÓN

La matemática hace parte de la vida; la percibimos en las diferentes formas y figuras bidimensionales y tridimensionales que nos rodean, en las edificaciones, las estructuras de puentes, los medios gráficos publicitarios y los diferentes objetos del entorno. Esta relación con el mundo que habitamos despierta nuestro interés, ya que podemos relacionarla con el objeto matemático de estudio en esta investigación: los poliedros platónicos.

A pesar de la relación observada, notamos que, en nuestras instituciones, había una escasa articulación del contexto en que viven los estudiantes con la geometría y la matemática que se enseñaba en el aula; se sustentó desde aquí la problemática de nuestra investigación. Para atenderla y transformar estas prácticas, encontramos en la Socioepistemología una teoría desde la cual se plantea "la necesidad de realizar un rediseño del DME (Discurso Matemático Escolar) basando en

Carmona, P. y Correa, P. (2019). Resignificación de los conceptos geométricos en los poliedros platónicos a través de la modelación. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 97-105). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

las prácticas" (Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012, p. 243). En la investigación nos centramos en fortalecer la dimensión didáctica y social de las prácticas de modelación y predicción, como medios para generar conocimiento y construir argumentos para resignificar conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos. En palabras de Arrieta (2003) "…en el ejercicio de ciertas prácticas sociales, usando herramientas, es donde aparecen, se estructuran y se movilizan, como argumento, ciertas nociones matemáticas" (p. 6). En consonancia con esto, el origami modular fue la herramienta pedagógica para una matemática con funcionalidad, ya que su uso, además de ser una manera divertida de aprender, permite la construcción de los poliedros platónicos a para su exploración desde lo concreto, lo visual y lo analítico.

Guiados por la Socioepistemología y la modelación tuvimos claridad sobre el foco de nuestra investigación, la cual dejó de lado los contenidos para centrarse en las prácticas sociales vivenciadas por los estudiantes y las interacciones con el entorno, el trabajo cooperativo y la herramienta pedagógica: el origami modular.

Esta investigación se realizó con un enfoque cualitativo, siguiendo la ingeniería didáctica como metodología de investigación. El estudio de caso se desarrolló con 18 estudiantes de grado quinto de Básica Primaria de la I. E. José Eusebio Caro de Medellín.

REFERENTE TEÓRICO

Encontramos en la Socioepistemología, un marco teórico que da importancia a las múltiples dimensiones que hacen parte del saber, incluyendo el contexto, los escenarios no escolares y las diferentes formas de saber de los estudiantes; las falencias sobre estos asuntos se plantean como problemáticas a estudiar en esta investigación. En consecuencia, pretendimos validar el efecto de traer al escenario académico una técnica como el origami modular, que se desarrolla en escenarios no académicos, pero que puede ser utilizada como una herramienta con intencionalidad pedagógica y funcional en el aula de clase para generar procesos de resignificación.

> La Socioepistemología tiene un aporte fundamental: Modela la construcción social de conocimiento matemático conjuntamente con su difusión institucional, esto es, modeliza las dinámicas de saber o conocimiento puesto en uso. (Cantoral 2013, p. 97).

En este sentido, las prácticas de modelación fueron las que construyeron, reconstruyeron, significaron y resignificaron nuestro objeto matemático.

> La Socioepistemología (del latín *socialis* y el griego episteme "conocimiento" o "Saber" y logos "razonamiento" o "discurso"), también conocida como epistemología de las prácticas o filosofía de las experiencias, es considerada como una rama de la epistemología que estudia la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional. (Cantoral 2013, p. 141)

Cantoral (2013) sustenta que la matemática escolar es "rediseñable" con fines de aprendizaje. Esto hace que el matemático educativo se cuestione no solo sobre cómo enseñar, sino qué enseñar, a quién enseñar y cuándo enseñar. Así, los actores del sistema educativo —el saber, el profesor y el alumno— desde una mirada social, tienen una comprensión propia del contexto social y se modifican las ideas de aprendizaje y enseñanza.

> La Socioepistemología incorpora contextos sociales y perspectivas culturales para la significación, aparecen ahora como principales actores de los procesos didácticos, el aprendiz, el saber en tanto conocimiento en uso o como construcción social del conocimiento y los entornos socioculturales portadores del mundo real, cuyas relaciones son orientadas por prácticas de referencia y normadas por prácticas sociales. (Cantoral, 2013, p. 141).

En este sentido desde la teoría, el estudiante es entendido como sujeto individual o sujeto colectivo, el profesor como individuo o como institución escolar personificada y "el aprendizaje como una práctica intencional normada, que coloca en interacción al aprendiz con el entorno regulado y normado" (Cantoral, 2013, p. 142). Es decir, modifica la idea de aprendizaje como adquisición, para dar lugar al aprendizaje como construcción social del conocimiento.

Puede verse, que esta es una teoría que busca atender diferentes dimensiones del saber matemático, dimensiones que se entretejen en una sola unidad de análisis, entendida esta por Cantoral (2013) como la que articula sistémicamente a las dimensiones con el fenómeno en juego y elige para ello, saberes funcionales y transversales.

UN ACERCAMIENTO METODOLÓGICO

Fundamentamos nuestro proceso de investigación en la ingeniería didáctica, haciendo consciente e intencional su doble función. En el aula, en cada acción que se genera en los procesos de enseñanza en relación con un objeto matemático de estudio, y en la investigación, como metodología específica.

Michéle Artigue (1995) define y caracteriza la Ingeniería Didáctica:

> Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Allí se distinguen por lo general dos niveles: el de la micro-ingeniería y el de la macro-ingeniería, dependiendo de la importancia de la realización didáctica involucrada en la investigación. (p. 36)

En este sentido, nuestra investigación se ubica en la micro-ingeniería ya que se centró en el estudio de un objeto específico, los poliedros platónicos, analizando las actividades al interior del aula de clase de una institución educativa específica.

Como investigación que recurre a la experimentación en clase, se ubica, "en el registro de los estudios de caso y cuya validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori" (Artigue, 1995, p. 37).

FASES DE LA METODOLOGÍA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Fase 1. Los análisis preliminares

La investigación se basó "no solo en un cuadro teórico didáctico general y en los conocimientos didácticos previamente adquiridos en el campo de estudio, sino también en un determinado número de análisis preliminares" (Artigue, 1995, p. 38). Estos fueron: un análisis epistemológico, el estudio de formas enseñanza tradicional, el análisis de dificultades y obstáculos de aprendizaje de un contenido; lo anterior teniendo en cuenta los objetivos específicos de la investigación.

Fase 2. La concepción y el análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería

El análisis a priori comprendió una parte descriptiva y una predictiva, centrando la atención en las características de la situación didáctica que se quiso diseñar y que se llevó a los estudiantes.

> El objetivo del análisis a priori es determinar en qué las selecciones hechas permiten controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Por lo anterior, este análisis se basa en un conjunto de hipótesis. La validación de estas hipótesis está, en principio, indirectamente en juego en la

> confrontación que se lleva a cabo en la cuarta fase entre el análisis a priori y el análisis a posteriori (Artigue, 1995, p. 45)

En nuestra investigación, se diseñaron tareas a priori direccionadas desde las prácticas de modelación y el uso del origami modular en las prácticas de aula.

En dichas tareas se describen aspectos relacionados con lo que se espera sobre: la forma como los estudiantes se enfrentan a las actividades, el trabajo en equipo, la manera en que emplean sus conocimientos previos, interpretan y pone en uso nuevos saberes. Lo anterior, en torno a la experimentación, predicción, articulación y las actividades propuestas.

Fase 3. Experimentación

En la fase de experimentación, el diseño se puso en práctica con la población de estudiantes. En el caso de nuestra investigación, el docente investigador hizo recolección de datos a partir de las observaciones, fotos, videos y las producciones de los estudiantes.

Fase 4. Análisis a posteriori y evaluación

Esta es la última fase de la ingeniería didáctica en la que se confrontaron las observaciones, las producciones y los hallazgos realizados durante las sesiones de intervención en el aula con el análisis a priori.

> Estos datos se completan con frecuencia con otros obtenidos de la utilización de metodologías externas, como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. Y, como ya lo habíamos indicado, en la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación. (Artigue, 1995, p. 48).

En nuestra investigación, en el análisis a posteriori se describieron y se mostraron, a través de imágenes, los procesos y construcciones logrados por los estudiantes, divididos en tres equipos de trabajo, con los cuales se aplicaron las actividades. Se hizo un análisis a partir de la confrontación con el análisis a priori realizado y la teoría que sustenta nuestra investigación.

A continuación se anexa algunos ejemplos del proceso de investigación realizado con los estudiantes:

Un equipo logró la construcción del hexaedro gracias a la interpretación de la guía que se les entregó, siguiendo los pasos y realizando un trabajo en equipo. Claramente lograron identificar las características del hexaedro construido, como el número de caras, vértices y aristas. Lograron interpretar la fórmula dada en la guía, e inmediatamente identificaron que la podían relacionar con la forma de resolver ejercicios de potenciación. Midieron la longitud de las aristas del Hexaedro que es de 7 cm y sustituyeron el valor en la fórmula, el cual multiplicaron tres veces, para hallar el volumen del hexaedro construido ($343\ \text{cm}^3$, Figura 1).

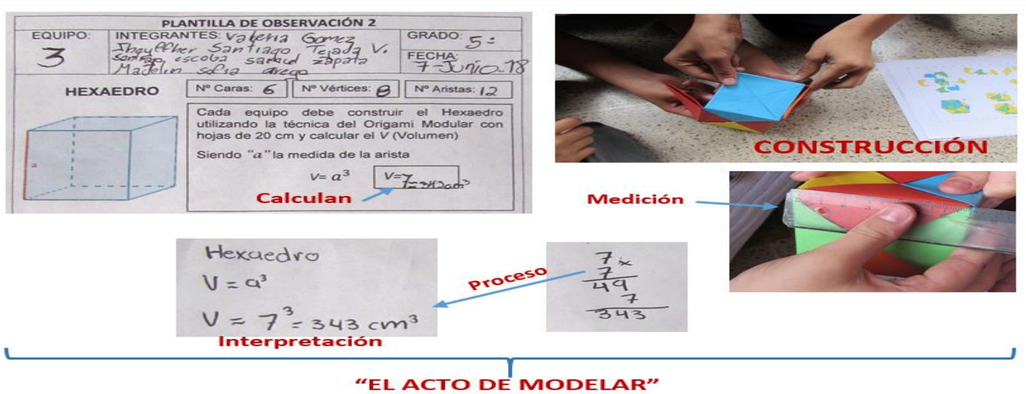


Figura 1. El acto de modelar, la predicción.

Fuente: Elaboración propia.

Otro de los equipos logró apropiarse de los saberes adquiridos en la tarea descrita previamente, calculando el volumen y articulando los saberes con otros conceptos geométricos, para interpretar la fórmula del área lateral y del área total del Hexaedro. El equipo construyó un hexaedro con hojas iris de 26 cm y al utilizar la regla midieron las aristas de 9 cm, interpretaron la fórmula dada y realizaron el proceso para calcular el área lateral del Hexaedro (81cm^2) y su área total (486cm^2) (Ver Figura 2).

Figura 2. La articulación de los modelos y el fenómeno en una red.

Fuente: Elaboración propia.

Conclusiones

La Socioepistemología reconoce la construcción social del conocimiento matemático tanto en ámbitos escolares como no escolares. Por ello, plantea que los sistemas de enseñanza deben ser "rediseñables," y favorecer la resignificación continua. Con esta finalidad, articula dimensión didáctica, cognitiva, social y epistemológica, en las que se validan los saberes adquiridos por los estudiantes y su interacción con el maestro, el contexto y el saber. Resignificar los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos es validar sus interpretaciones, relaciones, cálculos, predicciones, articulaciones y transferencias hechas durante el proceso, las cuales se evidenciaron en análisis a posteriori de las actividades aplicadas.

Las resignificaciones de los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos suceden en los procesos que se generar en las prácticas intencionadas de modelación y predicción y no en el objeto matemático como tal. La predicción y la modelación se constituyen en argumentos para resignificar los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos. Estos argumentos son construidos por los estudiantes durante la implementación de las actividades de predicción y modelación y se evidencian en tres aspectos: la construcción de significados, de procedimientos y de procesos.

Al implementar las actividades fundamentadas en la Socioepistemología, en las que los estudiantes experimentan, predicen, articulan y transfieren el conocimiento matemático adquirido a través de las prácticas de modelación, se evidencian procesos de resignificación de los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos. Los hallazgos y las vivencias durante la aplicación de las tareas con los estudiantes del grado quinto nos muestran que sí se logra resignificar. Se evidencia comprensión al enfrentarse a situaciones concretas de modelación y predicción, interpretando y articulando los aprendizajes previos y los adquiridos durante la aplicación de cada uno de los momentos. Durante la implementación, se evidenció la resignificación de los conceptos geométricos de volumen —área lateral—, área total del Hexaedro, como uno de los cinco poliedros platónicos.

Se logran vincular al aula los conocimientos geométricos y matemáticos adquiridos por los estudiantes de forma espontánea en sus contextos; estos se organizan y estructuran a partir de las relaciones establecidas en la interacción individual y grupal en cada momento propuesto. Desde estas particularidades, cada grupo logra articular sus saberes previos con los modelos construidos para ser transferidos a una nueva situación de modelación. En este sentido, el conocimiento matemático adquirido pasa de un aprendizaje abstracto, memorístico y desarticulado, a un aprendizaje con significado, que puede ser aplicado en su contexto porque ha sido explorado, modelado e interpretado.

El análisis de resultados del proceso de investigación es el insumo para el rediseño de la unidad didáctica, de tal suerte que permita resignificar los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos, en un escenario de modelación, incorporando el origami modular.

Nuestra intervención en el aula, durante el proceso de investigación, transformó nuestra manera de pensar y asumir la construcción del conocimiento matemático que se desarrolla con nuestros estudiantes. Hemos encontrado en la Socioepistemología un fundamento para hacer de las prácticas de aula, situaciones funcionales y generadoras de conocimiento. Nuestro aporte a la institución se constituye en el diseño de una unidad didáctica que enriquece el currículo institucional y plantea una estructura que puede adaptarse a cualquier objeto geométrico de estudio y en diversos niveles de la educación.

REFERENCIAS

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas sociales de modelación como procesos de matematización en el aula*. (Resumen de la tesis doctoral). Cinvestav, Ciudad de México.

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp.19-48). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica.* En R. Douady y L. Moreno. (eds.) *Ingeniería Didáctica en la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* (p. 33-59). Bogotá: Ed. Iberoamérica.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa.

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 *(3)*, 237-256.

ANGULARIDAD EN LA ESFERA. UNA EXPLORACIÓN DIDÁCTICA

Melvin Cruz-Amaya, **Gisela Montiel**

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional

(Cinvestav-IPN)

melvin.cruz@cinvestav.mx, gmontiele@cinvestav.mx

Se le atribuye a la geometría escolar la función de desarrollar un pensamiento que permita describir y representar nuestro entorno, y como la Geometría Euclidiana resulta un buen modelo de él, no es común cuestionarla. Sin embargo, las geometrías no euclidianas permiten significar a la geometría euclidiana, cuestionando su estatus universal y su relación con el entorno. Presentamos los resultados de una investigación, sustentada teóricamente en la Teoría Socioepistemológica, cuyo objetivo fue caracterizar procesos de significación progresiva relativos al ángulo, mediante una exploración didáctica en geometría esférica. Se acepta de esta noción la variedad y la complejidad de significados tanto en la esfera como en el plano.

INTRODUCCIÓN

A la geometría escolar se le atribuye la tarea de desarrollar un pensamiento que permite describir, comprender y representar el espacio en el que vivimos. Localmente, la Geometría Euclidiana —GE— potencia una buena descripción de nuestro entorno. Además de enfocarnos en el entorno local, también podemos describirlo de manera molecular y astronómica; en estos casos las Geometrías No Euclidianas —GNE— permiten una explicación más precisa (García, 2016). Las GNE, además de favorecer el propósito atribuido a la geometría, potencian la significación de la GE. Junius (2008) expone que, si los estudiantes pueden transferir ideas geométricas del plano a la superficie de la esfera y de la superficie de la esfera al plano, descubrirán que muchas de esas ideas no funcionan en la esfera y se preguntarán por qué funcionan en el plano. Dado el interés en el desarrollo del pensamiento matemático y, en específico, la significación de la geometría, resulta una fuente importante de información la idea de atender una vieja noción geométrica en un nuevo escenario (Cruz-Amaya, 2019).

Cruz, M. y Montiel, G. (2019). Angularidad en la esfera. Una exploración didáctica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 107-115). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Entre otros, los argumentos anteriores permitieron plantear una investigación en el proceso de significación progresiva de la línea recta y el ángulo en la geometría esférica, un caso particular de la geometría elíptica, una de las GNE. En busca de la caracterización de dicho proceso mediante una exploración didáctica, esta investigación se pregunta, qué significados de la línea y el ángulo se construyen a partir de su uso en la esfera. En este documento, se reporta el proceso de investigación y los resultados obtenidos relativos al ángulo.

DE LA REVISIÓN DE LITERATURA

De las consideraciones históricas-epistemológicas, cognitivas y didácticas de las investigaciones en la disciplina sobre el ángulo y otras nociones geométricas trabajadas en el plano y en la esfera, se destaca la falta de una caracterización general de ángulo que contemple sus diferentes contextos de aplicación y sus distintas representaciones. Por ello, se acepta que el concepto de ángulo tiene naturaleza polifacética; es decir, múltiples significados que dependen de la variedad de contextos de aplicación y representaciones. Para Aristóteles (384-322 a. C.) un ángulo era una cualidad, visto como la deflexión o la fractura de una línea (por su forma), era una relación (debido a cómo se define) y una cantidad (por su medida) (Rotaeche y Montiel, 2011).

En términos cognitivos, Mitchelmore y White (2000) presentan una teoría para el desarrollo del ángulo, la cual se centra en relacionar los conceptos angulares con experiencias físicas; busca, en su etapa final, explicaciones abstractas del ángulo (ángulo abstracto), que emergen de relacionar diferentes contextos angulares (ángulo contextual). Estos contextos son clasificaciones de situaciones en las que se involucra el ángulo (ángulo situado). Mediante esta teoría, se lograron describir siete categorías de contexto angulares (giro, líneas que se cruzan, pendientes, esquinas, objetos y caminos doblados, direcciones y aperturas). A través de experiencias didácticas, se ha logrado describir al ángulo según la cantidad de lados visibles, las categorías aristotélicas y las propiedades estáticas y dinámicas del propio concepto (Rotaeche y Montiel, 2011).

ELEMENTOS TEÓRICOS

Dado el interés por los procesos de significación de las nociones matemáticas, este proyecto de investigación se cimenta teóricamente en la Socioepistemología. Esta pretende la teorización de formas de pensamiento matemático, estudiando la construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional, siendo una teoría contextualizada, relativista, pragmática y funcional (Cantoral, 2013). Se plantea un cambio de focalización al estudiar los fenómenos didácticos, "dejar de analizar exclusivamente a los conceptos matemáticos para empezar a analizarse juntamente con las prácticas que acompañan a su producción" (Cantoral, 2013, p. 46), considerando a la matemática como una producción humana situada cultural, histórica e institucionalmente.

El saber matemático es construido cuando se pone en uso el conocimiento matemático. En otras palabras, ese conocimiento adquiere un sentido mediante su uso y se convierte en un saber. Desde la Socioepistemología, se contemplan cuatro dimensiones del saber —didáctica, cognitiva, epistemológica y social—. Este proyecto profundiza en las dimensiones cognitiva y social. La dimensión cognitiva trata las formas en las cuales se construyen y se apropian significados, aceptando que la significación se da a través de los *usos* de las nociones matemáticas. En esta investigación, entendemos los *usos* como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cabañas-Sánchez, y Cantoral, 2012, p. 98). Estas formas pueden ser conscientes e inconscientes, presentes de manera implícita o explicita mediante representaciones típicamente escolares o del contexto (Rotaeche, 2012). Por medio de la dimensión social se reconoce *lo social* no solo a nivel de interacción social, sino como el elemento que muestra, explica y justifica la construcción del saber.

A través de la interacción del sujeto con el objeto en un contexto específico, se caracterizan evoluciones de prácticas que constituyen el Modelo de Anidación de Prácticas (MAP), modelo que propone la Socioepistemología para explicar la construcción del conocimiento matemático. En su evolución es posible inferir los usos de las nociones matemáticas, y, con ellos, caracterizar significados asociados a dichas nociones. En esta investigación se utilizaron para el análisis, los dos primeros niveles del MAP: i) *las acciones,* emergentes de la primera interacción del sujeto con el medio, buscando una adaptación en el entorno y una organización interna; para identificarlas y caracterizarlas las asociamos a las preguntas ¿qué hace? y ¿cómo lo hace?; y ii) *las actividades,* la cuales son prácticas instrumentales con intencionalidad, mediadas y situadas socioculturalmente, asociadas a la pregunta ¿para qué lo hace?

Dada la naturaleza geométrica de las nociones matemáticas tratadas y la búsqueda de sus usos en la evolución de prácticas, se retoma como una de las herramientas teóricas-metodológicas, el

Modelo de Trabajo Geométrico (MTG). Este emerge de un estudio sistémico de la naturaleza de la geometría desde diferentes esferas de conocimiento y sus convergencias (Rubio-Pizzorno, y Montiel, 2017). El modelo es propuesto y caracterizado por Rubio-Pizzorno (2018). Se construye desde una epistemológica pluralista; es decir, considera la construcción del conocimiento geométrico desde diferentes esferas del conocimiento, y permite el reconocimiento de lo geométrico en la experiencia. Ambas consideraciones nos permitieron adaptarlo y hacer del MTG una herramienta en función de nuestro posicionamiento teórico general y nuestro interés particular (Cruz-Amaya, 2019).

El MTG explica el trabajo geométrico —manera de hacer/estudiar geometría—, mediante un esquema con dos polos: lo concreto y lo teórico. Se describe un mecanismo de tránsito entre los dos polos. Para pasar de lo concreto a lo abstracto, se requiere la *práctica geométrica de abstracción*. Esta demanda una intuición empírica —permite caracterizar propiedades gráfico-espaciales de los *diagramas* (representaciones gráficas)— coordinada con una intuición sofisticada —permite caracterizar propiedades teóricas—, para interpretar los símbolos, reconocer e identificar propiedades antes construidas en los diagramas concretos. Para pasar de las propiedades teóricas a los diagramas de dichas propiedades, se requiere la *práctica geométrica de representación*. Esta puede generar dos tipos de diagramas: el bosquejo —con escasa precisión— y la construcción —tiene un grado aceptable de precisión—.

METODOLOGÍA

Este es un estudio cualitativo-interpretativo. La naturaleza del contenido matemático tratado, el propósito, la estructura y la fundamentación del proyecto de investigación permitieron la constitución de un método de investigación que se denominó *exploración didáctica*. Este método está enmarcado en tres grandes categorías: recolección, organización y análisis de los datos. Para lograr estos tres procesos se requiere pasar por 5 pasos —planeación del instrumento de investigación (una experiencia didáctica de tipo laboratorio de matemáticas), protocolo previo a la puesta en escena, puesta en escena, organización de los datos y análisis de los datos—. Se busca con ello cumplir un ciclo de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) —preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo—.

En esta experiencia participaron 6 estudiantes (5 mujeres y 1 hombre) de último año de bachillerato (entre 16 y 18 años), de la Escuela Preparatoria Oficial Anexa a la Normal Núm. 3 de Nezahualcóyotl, Estado de México, México. Desde un plano didáctico llamamos a la experiencia *laboratorio de matemática*, con un diseño fundamentado por nuestro posicionamiento teórico y elementos históricos-epistemológicos, cognitivos y didácticos de la revisión de la literatura. El laboratorio se diseñó con una estructura general que pretende la construcción de una noción geométrica en la superficie de la esfera y después una relación con una noción de geografía, trastocando la interdisciplinariedad. Se buscó que los participantes exploraran, describieran y resignificaran las nociones de línea y de ángulo en la esfera, al pasar por las siguientes fases: concepción de la esfera de forma intrínseca, caracterización de la línea recta esférica, caracterización del ángulo esférico y caracterización de polígonos esféricos. Cada fase está compuesta por situaciones problemas, y cada situación problema por tareas.

ANÁLISIS

De la tercera fase del laboratorio —caracterización del ángulo esférico—, se retoma una situación problema (cuarta situación problema) y de ella una tarea en particular (segunda tarea), con el fin de ejemplificar el proceso de análisis. En esta, se presentan algunas rutas de avión en el globo terráqueo. Primero se solicita a los estudiantes que relacionen dichas rutas y dibujen en una esfera de unicel en blanco; después se muestran tres modelos que relacionan segmentos de línea recta en el plano (ver Figura 1); luego, utilizando una regla plana, se les pide que dibujen dichos modelos en un globo desinflado y seguidamente inflen el globo; posteriormente, se les solicita que clasifiquen sus relaciones de rutas en los tres modelos y los caractericen en la superficie esférica.

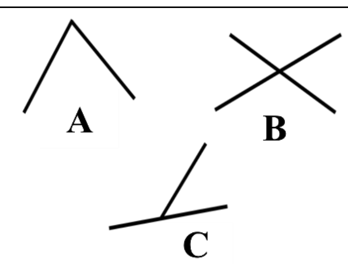


Figura 1. Modelos que relacionan dos segmentos en el plano.

Fuente: Elaboración propia.

Por medio del MTG, se describe la *práctica geométrica de representación*, en los dibujos de relaciones de rutas y modelos en el globo, y la *práctica geométrica de abstracción* al interpretar representaciones, reconocer elementos geométricos e identificar diferencias en los modelos. A través de la matriz de la Figura 2, se logró caracterizar las siguientes ***acciones*** del MAP: *relacionar* rutas, modelos y medidas; *interpretar* relaciones, modelos y ángulos; *establecer* elementos de referencia; *trazar* elementos geométricos; *clasificar* relaciones; entre otras. Por medio de los argumentos geométricos de los estudiantes, caracterizados a través del MTG y de las acciones, se plantea la pregunta *para qué hace lo que hace*, para identificar la práctica en el nivel de ***actividad***. En esta tarea, reconocemos que los estudiantes relacionan rutas, interpretan dicha relación como la intercepción de dos rutas, establecen referentes, para finalmente *representar* esa relación.

Momento e hipótesis didáctica –HD–	**Construcción social del conocimiento matemático desde la Socioepistemología**		
	Argumentos, reflexiones y confrontaciones presentados mediante los procedimientos, construcciones y explicaciones en forma escrita, icónica, corporal o verbal.	**Práctica en el nivel de acción**	
		¿Qué hacen?	**¿Cómo lo hacen?**
I. Momento: **confrontación** al representar lo observado.			

Tabla 2. Matriz para identificar y caracterizar acciones.

Fuente: Elaboración propia.

En esta evolución de prácticas y considerando los argumentos geométricos, se describieron las formas en que es empleado y adoptado el ángulo en los argumentos, reflexiones y confrontaciones presentadas por los estudiantes, es decir, los usos del ángulo en el desarrollo del laboratorio, para explicar a partir de ellos, procesos de significación progresiva asociada a dicha noción. Entre los usos del ángulo se destaca *el ángulo como líneas que se cruzan en un punto —incidencia y cruce—*, caracterizado entre otras, por las siguientes intervenciones de los participantes: cuando Luna —seudónimo de una de las participantes— explica los modelos: “no tienen las mismas medidas, no tienen la misma abertura, el modelo B está cruzado en su totalidad, el A solo se une y el C es una línea recta con un cachito"; o cuando Beka habla del ángulo como: “la unión de dos segmentos de recta en un punto, en cualquier superficie”.

ALGUNOS RESULTADOS

Del análisis de cada una de las tareas sobre el ángulo, se lograron caracterizar cuatro actividades: *representar* ángulos, *reconocer* elementos del ángulo, *identificar* ángulos, y *comparar* unidades de medida o medidas de ángulos. Las primeras tres se asocian al ángulo como cualidad y como relación, y la última se vincula al ángulo como cantidad. Con lo que se identifica la naturaleza polifacética del ángulo, también en la superficie de la esfera. Se reconoce mayor evidencia de confrontación entre el plano y la superficie esférica, en el significado del ángulo como cantidad estática y dinámica. Esta evidencia se da en la construcción —en la que se divide una línea recta en partes iguales y se trazan segmentos, considerando el papel de la superficie— y uso de un instrumento para medir ángulos.

Mediante la evolución de prácticas en los niveles de acción y actividad, se caracterizaron catorce usos del ángulo: el ángulo como figura compuesta; como una relación; como la abertura entre dos lados; como elemento de composición de otra figura; como líneas que se cruzan en un punto; como giro; como indicador de dirección; como inclinación de líneas; como unidad de medida; como argumento en propiedades, nombres y clasificaciones de polígonos —al reconocer la cantidad de ángulos en el polígono y sus medidas—; como consecuencia de propiedades de polígonos; ángulo emergente de un punto, es decir, el ángulo centrado en el punto de intercepción de dos líneas; el ángulo recto como unidad referente de medida de ángulos; y el ángulo en la medición de distancias.

CONCLUSIONES

Los usos del ángulo nos refieren a su razón de ser en tareas particulares, pero a medida que se desligan de la situación problema, nos refieren a significados propios del ángulo. Rotaeche (2012) llama *angularidad* al ángulo como saber matemático; es decir, al uso del ángulo en diferentes contextos. Este constructo lo retomamos, dada la caracterización presentada del proceso de significación del ángulo a partir de su uso. El buscar significar al ángulo en la superficie de la esfera provocó que los estudiantes lo cuestionaran en el plano y valoraran el papel de la superficie en la representación de nociones geométricas; esto permitió que se cuestionaran las características propias del ángulo.

Durante el laboratorio de matemáticas, se caracterizaba una noción geométrica y luego se potenciaba una comparación con una noción de geografía, por ejemplo: puntos con coordenadas geográficas, puntos opuestos con los polos norte y sur, líneas rectas con el ecuador y los meridianos, y ángulo con los husos horarios. En las primeras tareas los estudiantes trasladaban ideas de la esfera al plano y viceversa. En cambio, en las últimas tareas se mantenían en el escenario esférico, al trasladar ideas de geometría esférica a geografía y de geografía a geometría esférica; en ese sentido, reconocemos en la geografía un escenario fructífero para tratar la geometría esférica.

REFERENCIAS

Cabañas-Sánchez, G. y Cantoral, R. (2012). El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 1031-1040.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cruz-Amaya, M. (2019). Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de tra-bajo geométrico (Tesis de maestría inédita). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México. doi: 10.13140/RG.2.2.25114.49604

García, A. (2016). Las Teorías No Euclidianas y su influencia en la filosofía de las ciencias del siglo XX. *Journal of Education and science, 1*(1), 21-27

Junius, P. (2008). A case example of insect gymnastics: how is non-Euclidean geometry learned? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(8), 987-1002. doi:10.1080/00207390802136529

Mitchelmore, M., y White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstractions and generalization. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 209-238.

Rotaeche, A. (2012). Construcción de conocimiento matemático en escenarios escolares. El caso de la angularidad en el nivel básico (Memoria predoctoral no publicada). CICATA-IPN, México.

Rotaeche, A. y Montiel, G. (2011). Desarrollo histórico como mirador de conocimientos para la enseñanza del concepto de ángulo. En G. Buendía (ed.), *Reflexión e investigación en Matemática Educativa* (págs. 191-218). Ciudad de México, México: Lectorum.

Rubio-Pizzorno, S. (2018). Integración digital a la práctica del docente de geometría (Tesis de Maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México. doi: 10.13140/RG.2.2.15488.94728/1

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus* Aplicaciones, 23 (pp. 143-148). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

REFUTACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO: APROXIMACIONES TEÓRICAS QUE EMERGEN DE UNA CLASE DE GEOMETRÍA

Juan Gabriel Rave-Agudelo

Institución Educativa Jesús-María El Rosal, Medellín - Colombia

jugaraag@gmail.com

Esta comunicación presenta los resultados de la investigación adelantada por un estudiante de un programa de formación de maestros de matemáticas y de física donde se respondió a la pregunta por: *¿cómo favorece la refutación a la construcción social del conocimiento en clases de geometría de octavo grado?* La investigación, desarrollada a partir del diseño metodológico de la *Teoría Fundamentada*, permitió proponer una *teoría emergente de la refutación en la construcción social del conocimiento*, en la que se analizaron, se caracterizaron y se relacionaron elementos de refutación y de construcción social del conocimiento en prácticas argumentativas desarrolladas por estudiantes de octavo grado en clases de geometría.

INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El aula de clase de geometría debe considerarse como un espacio de interacción social donde suceden procesos de construcción social del conocimiento. Con este planteamiento, y con la argumentación como pretexto teórico y práctico, el trabajo de grado que se pretende socializar (Rave-Agudelo, 2018), analizó cómo favorece la refutación a la construcción del conocimiento en clases de geometría de octavo grado, a partir de una consideración inicial de la *argumentación - refutación*, la *construcción social del conocimiento* y de planteamientos acerca de la *geometría* en la *Educación Matemática contemporánea* (Rivas, 2005; Cantoral, 2013). Tuvo en cuenta también los *lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional* (MEN, 1998), desarrollos de la *Teoría de la Argumentación y de la Argumentación en Educación Matemática* (Toulmin, 2007; van Eemeren y Grootendorst, 2002; Perelman y Olbrechts-Tyteca, 1989; Bermejo, 2006; Durango, 2017), algunos desarrollos teóricos sobre *refutación y sobre refutación en Educación Matemática* (Moeschler, 1979; Lakatos, 1976; Balacheff, 1991) y algunos aspectos

Rave-Agudelo, J. (2019). Refutación en la construcción social del conocimiento: aproximaciones teóricas que emergen de una clase de geometría. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 117-125). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

teóricos sobre *construcción social del conocimiento* (Candela, 1991; 1997; De Chiaro y Leitão, 2005; Leitão, 2007; Baker, 2009; Damianovic y Leitão, 2012).

Por la revisión anterior, se consideró pertinente pensar en que la refutación, desde el punto de vista de la argumentación, tiene influencia sobre la construcción social del conocimiento en el contexto de aula de clase. Sin embargo, no existía un referente teórico que se manifestara en torno a las cualidades de la refutación y a su injerencia en la construcción social del conocimiento en clases de geometría, situación que originó el desarrollo de la investigación.

En consecuencia, la pregunta de investigación fue: *¿cómo favorece la refutación a la construcción social del conocimiento en clases de geometría de octavo grado?*; Adicionalmente, para responder a la pregunta, se caracterizaron elementos de refutación y de construcción social del conocimiento en prácticas argumentativas de los estudiantes y se identificaron relaciones entre estos elementos.

ORIENTACIONES TEÓRICAS

Las orientaciones teóricas iniciaron con la idea de considerar la *refutación* como un *desacuerdo* entre acepciones planteadas, tal y como se concibe en un contexto de diálogo cotidiano. Sin embargo, esta idea que parece tan contundente, no tiene en cuenta que el análisis de la refutación en esta investigación tiene la pretensión de considerar a la argumentación y a sus desarrollos, como un pretexto teórico y práctico con el que se fundamentan y se analizan ciertas prácticas en el contexto del aula de clase de geometría. Adicional a esto, los estudios sobre refutación han generado fragmentaciones que se ubican en diferentes posturas contextualizadas, como se presenta en los *debates parlamentarios* (Miche, 1998), en *editoriales políticas de periódicos* (Ilinca, 2009) y por supuesto, en *clases de matemáticas* (Balacheff, 1991; Lakatos, 1976).

Los estudios revisados permitieron caracterizar algunos elementos teóricos sobre la refutación, entre ellos se encontró: un *contexto reduccionista de la refutación* (Toulmin, 2007; Durango, 2017), una refutación definida a partir de la *negación* y considerada como *un acto discursivo e interactivo* (Moeschler, 1979; 1980), un reto por la *concesión en la refutación* (Moeschler y De Spengler, 1982), un estudio sobre la *contradicción* (Balacheff, 1991)¸una refutación considerada como *una estrategia argumentativa* (Ilinca, 2009) y una estudio de la *lógica de los enunciados cuando se refuta* (Lakatos, 1976).

Por el otro lado, se revisaron estudios sobre construcción social del conocimiento que la definen como los procesos que permiten la elaboración, revisión, confrontación, negociación, adaptación, aceptación y apropiación de conocimientos a partir de la interacción social (Baker, 2009; Candela, 1991; 1997). Además, se caracterizaron algunas relaciones de la *argumentación con la construcción social del conocimiento* (Damianovic y Leitão, 2011), se presentó la propuesta del *argumento*, *contraargumento* y *respuesta* y de los planos *pragmático*, *epistémico* y *argumentativo* (De Chiaro y Leitão, 2005).

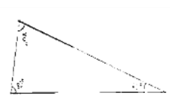
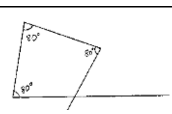
DISEÑO METODOLÓGICO Y ANÁLISIS DE DATOS

La investigación se desarrolló a partir de un *diseño emergente* de la *Teoría Fundamentada*, en la que se busca construir una teoría a partir del análisis natural de los datos, haciendo uso de procesos de codificación que permitan la búsqueda de conceptos, la generación de relaciones y la construcción de explicaciones de los conceptos y de las relaciones en una teoría sustantiva (Strauss y Corbin, 2002; Glaser, 1992; Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Los datos de la investigación se tomaron en profundidad en cuatro sesiones con un grupo de enfoque conformado por cinco estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa Gilberto Alzate Avendaño del sector oficial de la ciudad de Medellín, Colombia. Los datos se recolectaron a partir de observaciones, registros de clase, entrevistas individuales, fotografías y videograbaciones de las sesiones con el grupo de enfoque, en las que se abordaron temas como *la importancia de la geometría* y los *triángulos.*

Con la transcripción de los diálogos grabados, se realizó una codificación abierta vertical (sesión por sesión) y horizontal (código por código) con el fin de generar conceptos que permitieran definir las categorías en un ejercicio de comparación constante. Después, se encontraron relaciones entre las categorías y se propuso una *teoría sustantiva*, que fue triangulada por el asesor del trabajo de grado con los datos y con las orientaciones teóricas.

En la Tabla 1 se ejemplifica, en síntesis, la forma en la que se desarrolló y se presentó el análisis de las tareas en la investigación (Rave-Agudelo, 2018).

[1] Profesor: ¿Es posible realizar triángulos donde cada uno de sus ángulos mida 80°?	El profesor ***instala*** la práctica argumentativa con una ***solicitud de confirmación*** para todos los estudiantes.
[2] Wolfgang: No se puede.	El estudiante ***revisa*** y ***reacciona*** dándole ***continuidad*** al diálogo. ***Invalida*** a través de ***negaciones formales*** y ***semánticas*** en ***contradicción*** con lo que instala el profesor. Existe una ***interrelación conflictiva*** que desencadena una ***refutación derivada de una pregunta***. Inicia una etapa de ***negociación***.
[3] Profesor: ¿Wolfgang por qué dice que no se pueden hacer triángulos donde la medida de cada ángulo sea 80°?	El profesor ***revisa*** *y* ***reacciona*** con una ***pregunta anidada solicitando información*** de manera ***dirigida*** a un estudiante. El profesor busca ***negociar*** para llegar a ***consenso***. Existe ***continuidad dialógica***.
[4] Wolfgang: Quedarían… pues no…. Yo creo que todos no darían 80°. No, quedaría disparejo. 	En un primer momento sucede lo mismo que en el turno **[2]**. Luego, con la misma idea de ***negociar***, presenta un ***ejemplo***, y finalmente ***replica*** al profesor con una ***aserción***.
[5] Profesor: ¿Por qué quedaría disparejo Wolfgang?	Sucede lo mismo que en el turno **[3]**.
[6] Wolfgang: Espere…. 	El estudiante ***revisa*** y ***reacciona*** dándole ***continuidad*** al diálogo. El estudiante presenta un ***ejemplo***.

[7] Profesor: ¿Esto es un triángulo?	Sucede lo mismo que en los turnos **[3]** y **[5]**, pero con una ***solicitud de confirmación***.
[8] Wolfgang: Claro… Toda la vida.	El estudiante *revisa* y *reacciona* dándole *continuidad* al diálogo. ***Responde*** con una ***aserción irónica***.
[9] Clara: No.	En un primer momento sucede lo mismo que en los turnos **[2]** y **[4]**, pero la ***interrelación conflictiva*** desencadena una ***refutación que impugna conclusiones***. Continúa la etapa de ***negociación***. Finalmente, Clara presenta una ***aserción*** con la que cierra la etapa de ***negociación*** y concluye en el ***consenso*** con un conocimiento más formal.
[10] Lili: No, no es un triángulo obviamente.	
[11] Clara: Porque tiene más de tres lados.	

Tabla 1. Análisis fragmento Tarea 4 - Triángulos.

TEORÍA EMERGENTE DE LA REFUTACIÓN EN LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO

Esta teoría es el producto de la investigación derivada del diseño metodológico seleccionado, y se consolida como el espacio donde se concreta la respuesta a la pregunta de investigación y donde se evalúa el cumplimiento de los objetivos propuestos.

La *teoría emergente* se desarrolló a partir de tres ejes: la *interacción social en el aula de clase y la construcción social del conocimiento*, la *refutación en la construcción social del conocimiento* y *negociación, consenso y construcción social del conocimiento*.

El primer eje se ocupó de definir los conceptos de *interacción social* y de *construcción social del conocimiento* relacionándolos con la argumentación como pretexto teórico y práctico de la investigación.

Así mismo, se encontró que la interacción social en el aula de clase se desarrolla en diferentes etapas (instalación, revisión, reacción, refutación, negociación, consenso) y cada una de ellas precisa del uso de diferentes tipos de actos de habla: actos de habla de locución (*solicitudes de información* (preguntas empíricas, teóricas o de carácter mixto), *solicitudes de confirmación* o *peticiones*), actos de habla interactivos (*respuestas*, *réplicas*, *confirmaciones* o *invalidaciones*), actos de habla locutivo — interactivos (*aserciones* y *preguntas anidadas*).

Finalmente, se definieron las direcciones dialógicas (profesor-estudiante, estudiante-profesor, estudiante-estudiante, profesor-grupo y estudiante-grupo), las comunicaciones dialógicas (dirigidas o impersonales), el flujo de la interacción social haciendo un énfasis especial en la continuidad dialógica y en las pausas en la interacción, y se definieron otras cualidades de la interacción social (argumentos monológicos, ironías, dudas, repeticiones e interrelaciones conflictivas).

El segundo eje se denominó *la refutación en la construcción social del conocimiento*. Aquí se definió a la refutación como una práctica argumentativa reactiva que sucede en la interacción social, se hizo un llamado a entender la *reacción derivada de un acto de habla interactivo* como una forma de afectar las cualidades lógicas, retoricas y dialécticas de la práctica argumentativa, y finalmente, se expuso que la refutación puede darse como una *interrelación conflictiva* en la que se afectan las cualidades lógicas y retóricas, o como una *pausa en la interacción* que afecta las cualidades dialécticas.

Con relación a las *interrelaciones conflictivas* se definieron los *tipos de negación* (*semántica* y *formal*), los *tipos de refutación y rectificación* (*derivada de una pregunta, impugna, conclusiones*, *rectificación monológica*, *rectificación dialógica* y *refutación con una pregunta*), los *propósitos de la refutación* (*contradecir* y *complementar*) y las *cualidades de la refutación* (*indicadores de refutación* y la *concesión*). Por el lado de *las pausas en la interacción*, se definieron los *propósitos de la discontinuidad* (*extrapolar*, *engañar*, *ignorar*, *contextualizar*) como complemento a los *propósitos de la refutación*.

La *teoría emergente* finaliza con el tercer eje que se denominó *negociación, consenso y construcción social del conocimiento*. En este eje se describen con mayor profundidad las etapas de la interacción social denominadas *negociación* y *consenso*, en las que se resuelven las diferencias entre las acepciones demarcadas por la refutación a través de la interacción social y permitiendo la transformación de las experiencias personales, las creencias y los conocimientos previos en conceptos formales de la ciencia, como manifestación de beneficios epistémicos y pragmáticos en el desarrollo de la clase.

Consideraciones finales

En la investigación se logró la integración de diferentes propuestas teóricas a partir de las prácticas argumentativas que vivenciaron estudiantes del grado octavo en un contexto de aula de clase de geometría. Esto implicó una reestructuración de los desarrollos teóricos sobre refutación a la luz de los avances sobre argumentación que se han desarrollado en diferentes contextos y desde la ubicación contextual en la Educación Matemática.

Dicha reestructuración no se hubiera gestado sin las bondades que tiene la *teoría fundamentada* como diseño metodológico que permite proponer teorías sustantivas que expliquen los fenómenos que suceden en el aula de clase.

Finalmente, se valoró el uso de prácticas argumentativas en Educación Matemática en tanto que suponen una construcción del conocimiento derivada de interacciones sociales intencionadas, en las que se promueve la participación, se valoran las experiencias y las creencias de los estudiantes y se consolida un conocimiento construido a partir de refutaciones, negociaciones y consensos.

Referencias

Baker, M. J. (2009). Argumentative interactions and the social construction of knowledge. En N. M. Mirza & A. N. Perret-Clermont (eds.), *Argumentation and education: Theoretical foundations and practices* (pp. 127-144). New York: Springer.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. En E. Von Glasersfeld (ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). Dordrecht: Springer.

Bermejo, L. (2006). *Bases filosóficas para una teoría normativa integral de la argumentación. Hacia un enfoque unificado de sus dimensiones lógica, dialéctica y retórica* (Tesis doctoral). Universidad de Murcia, España.

Candela, A. (1991). Argumentación y conocimiento científico escolar. *Infancia y aprendizaje, 14*(55), 13-28.

Candela, A. (1997). *La necesidad de entender, explicar y argumentar. Los alumnos de primaria en la actividad experimental*. México: DIE/CINVESTAV/IPN.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Gedisa.

Damianovic, M. C., y Leitão, S. (2012). A atividade debate crítico em sala de aula: a argumentação na expansão do conhecimento. Em *III Simpósio Nacional Discurso, Identidade e Sociedade (*III SIDIS*)*. Campinas, Brasil.

De Chiaro, S. y Leitão, S. (2005). O papel do professor na construção discursiva da argumentação em sala de aula. *Psicologia: reflexão e* crítica, 18(3), 350-357.

Durango, J. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso* (Tesis doctoral). Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Glaser, B. (1992). *Basics of grounded theory analysis: Emergence vs forcing*. Mill Valley, Estados Unidos: Sociology press.

Hernández, S., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (6ta edición). México: Mcgraw-Hill.

Ilinca, C. (2009). La refutation, strategie argumentative de l'editorial politique. *Limbaj şi context Speech and Context, 1*, 72-81.

Lakatos, I. (1976). *Pruebas y Refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.

Leitão, S. (2007). Processos de construção do conhecimento: a argumentação em foco. *Pro-*Posições, 18 (3), 75 – 92.

Miche, E. (1998). *Secuencias discursivas del desacuerdo. Aplicación del modelo ginebrino al análisis del debate parlamentario del artículo2 de la Constitución Española de 1978*. Santiago de Compostela, España: Servicio de Publicacións e Intercambio Científico da Universidade de Santiago de Compostela.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Moeschler, J. (1979). Approche d'un acte de discours : la réfutation dans le débat télévisé Giscard-Mitterrand (1974). En P. Bladi et J. Moeschler (eds.), *Comment contrôler le discours : interaction et réfutation dans le débat télévisé Giscard-Mitterrand (1974),* (pp. 1-54). Neuchâtel: Travaux du Centre de Recherches Sémiologiques Université de Neuchatel.

Moeschler, J. (1980). La réfutation parmi les fonctions interactives marquant l'accord et le désaccord. *Cahiers de Linguistique Française*, 1, 54 – 78.

Moeschler, J., y De Spengler, N. (1982). La concession ou la réfutation interdite. Approches argumentative et conversationnelle, *Cahiers de linguistique française, 4,* 7 – 36.

Perelman, C. y Olbrechts-Tyteca, L. (1989), *Tratado de la argumentación: La nueva retórica*. Madrid, España: Gredos.

Rave-Agudelo, J. (2018). *Refutación en la construcción social del conocimiento en clases de geometría de octavo grado* (Tesis de pregrado). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Rivas, P. (2005). La Educación Matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Educere, 9*(1), 165 – 170.

Strauss, A. y Corbin, J., (2002). *Bases de la investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona, España: Ediciones Península.

Van Eemeren, F. y Grootendorst, R. (2002). *Argumentación, comunicación, falacias. Una perspectiva pragma-dialéctica*. Santiago de Chile, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.

Avances investigativos

Una comunidad de discurso en la clase de geometría, apoyada por la tecnología digital y la gestión del profesor

William Andrés Cárdenas, **María Fernanda Castro**, **Claudia Vargas**
Universidad Pedagógica Nacional
wacardenas@upn.edu.co, mfcastros@upn.edu.co, cmvargasg@pedagogica.edu.co

Esta ponencia tiene como propósito presentar el estudio de prácticas discursivas no usuales en la clase de geometría, exhibiendo algunas acciones que realiza un profesor con el apoyo de la geometría dinámica para promover en estudiantes de grado sexto dos aspectos del discurso matemático: vocabulario y narrativas. Para ello, se adopta la estrategia investigativa Basada en Prácticas Usuales. El marco de referencia de la investigación incluye una caracterización del discurso matemático y resultados de investigaciones que han identificado acciones del profesor para promoverlo. Asimismo, se muestra la relación entre los sistemas de geometría dinámica y el desarrollo del discurso. Finalmente, se exhibe el análisis de un episodio.

Planteamiento del problema

En esta ponencia se presentan avances de una investigación que tiene como propósito caracterizar las acciones del profesor que potencian el discurso matemático de los estudiantes y que son realizadas con el apoyo de un sistema de geometría dinámica (SGD). La inquietud inicial surge porque en las prácticas de los autores, y en algunas investigaciones (Brendefur y Frykholm, 2000; Alrø y Skovsmose, 2012; Krummheuer, 2012), se ha evidenciado que, en las clases de geometría, los estudiantes pocas veces expresan y defienden sus ideas, prevalece el modelo de comunicación bidireccional y las tecnologías digitales pocas veces son aprovechadas para impulsar la comunicación.

En el campo de la educación matemática, Sinclair, Moss y Jones (2010) y Berger (2011) han estudiado la relación entre el discurso matemático y el uso de un SGD, y reportado experiencias en las cuales el uso de este tipo de programas contribuye al desarrollo del discurso. A diferencia de lo que se pretende realizar en esta investigación, ellos se centran en analizar los discursos de los

Cárdenas, W., Castro, M. y Vargas, C. (2019). Una comunidad de discurso en la clase de geometría, apoyada por la tecnología digital y la gestión del profesor. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 129-137). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

estudiantes, sin tener en cuenta el papel del profesor en la constitución de los mismos. Respecto al rol del profesor para favorecer el desarrollo del discurso, investigadores como Goos (2004), Mortimer y Scott (2003) y Quaranta y Tarasow (2004) han identificado acciones del profesor para promover el proceso de comunicación, aspecto crucial para el desarrollo del discurso. En esta investigación, se busca caracterizar las acciones del profesor que, apoyadas en el uso de SGD, favorecen el desarrollo del discurso matemático.

MARCO TEÓRICO

El aprendizaje en matemáticas se puede conceptualizar como un cambio en el discurso matemático. Es decir, es el proceso de cambiar de cierta manera las formas discursivas propias de los individuos de tal manera que se asemejen a formas propias de una comunidad matemática. En este sentido, aprender matemáticas significa una iniciación a un tipo especial de discurso, en el cual la persona construye su propio conocimiento mientras interactúa con otros (Sfard, 2008).

Según Sfard, el discurso está constituido por: vocabulario (usos específicos que les dan a las palabras), mediadores visuales (artefactos simbólicos creados para comunicarse), narrativas (proposiciones que emplea una comunidad y las etiqueta como verdaderas) y rutinas (patrones repetitivos que caracterizan el discurso). En particular, el discurso matemático es aquel que incluye palabras y símbolos relacionados con cantidades y figuras, y se caracteriza porque las relaciones entre las narrativas se establecen mediante procesos deductivos (Sfard, 2008). En el desarrollo de esta investigación, se tiene el propósito de caracterizar la gestión del profesor para promover el desarrollo del discurso matemático con el apoyo de un SGD. En este sentido, reconocer los elementos que constituyen un discurso matemático permitirá identificar estrategias que utiliza el profesor para promover aspectos específicos que lo constituyen.

Para favorecer el desarrollo del discurso, el profesor como miembro de la comunidad de clase con mayor experiencia, debe propiciar que los estudiantes asuman la responsabilidad de encontrar soluciones a problemas, interactúen con sus compañeros y validen sus propias producciones. A su vez, debe procurar que los estudiantes se vean a sí mismos y a los demás como miembros de una comunidad que aportan al proceso de aprendizaje de los demás (Goos 2004). Por su parte, Moritmer y Scott (2013), Quaranta y Tarasow (2004) y Goos (2004) proponen algunas acciones que el profesor puede desarrollar para cumplir con los propósitos anteriormente mencionados. Entre ellas se destacan: orientar y guiar a los estudiantes cuando trabajan en grupo; invitar a los estudiantes a explicar sus ideas y a solicitar la ayuda de los compañeros; mediar en las interacciones para promover el trabajo colaborativo y favorecer la comunicación entre estudiantes; ceder la responsabilidad de validación al grupo; cuestionar a los estudiantes sobre cómo hallar soluciones y garantizar su validez; mantener la expectativa de los estudiantes por validar una solución, una postura o una idea, entre otras.

En esta constitución del discurso, el papel de los SGD es crucial. Esto debido a que se convierte en una herramienta que apoya los procesos de comunicación de los estudiantes, contribuye a generar representaciones que se transforman en mediadores visuales, apoya la producción de narrativas y contribuye al uso adecuado de términos matemáticos. Por ejemplo, Schacht (2017) afirma que cuando los estudiantes trabajan empleando herramientas digitales en la clase de matemáticas, el lenguaje cambia. Esto debido a que su uso permite un primer acercamiento al lenguaje matemático, pues, aunque usan términos asociados al artefacto, estos pueden evolucionar hacia términos aceptados por una comunidad matemática. Mariotti (2009) resalta que la gestión que hace el profesor en relación con el uso del artefacto (un SGD) permite el desarrollo del discurso, pues ayuda a los estudiantes a explicitar sus significados personales y transformarlos en significados matemáticos.

METODOLOGÍA

Se adopta un enfoque fenomenológico con una aproximación interpretativa. La estrategia investigativa seguida es *Basada en Prácticas Usuales* (Lesh y Kelly, 2000). En esta se realiza un acercamiento a escenarios educativos, con la intención de caracterizar, describir o interpretar un fenómeno particular que se presenta en un contexto específico.

Al enmarcar la investigación en esta estrategia, la primera fase es la observación. En esta se registraron cuatro clases de geometría de grado sexto, de un colegio ubicado en Bogotá, durante el primer semestre del año 2018. En este escenario, se encontraban treinta estudiantes, un profesor investigador y dos observadores participantes. Los objetos matemáticos estudiados fueron polígonos. En las clases se procuraba favorecer los procesos de argumentación y comunicación. Se contaba con tablets (en las cuales estaba instalado un SGD) y un televisor. La segunda fase es la construcción de datos. Esta empezó con las transcripciones de las interacciones registradas. Luego, se identificaron los episodios de interacciones en las cuales las acciones del profesor favorecían el discurso matemático de los estudiantes cuando utilizan un SGD. La tercera fase es la construcción de una herramienta analítica. A partir de las categorías propuestas por Mariotti (2009), Goos (2004) y Motimer y Scott (2003), se propusieron cuatro acciones del profesor para desarrollar el discurso matemático de los estudiantes (Tabla 1). Seguido a esto, se construyeron unas subcategorías asociadas a tres aspectos específicos del discurso: el vocabulario, los mediadores visuales y las narrativas (Sfard, 2008). La última fase, corresponde al proceso de análisis. En esta se encuentra la investigación.

Acción	Descripción de la acción
A	Solicitar a los estudiantes compartir las estrategias de solución de un problema que involucra el uso de un SGD o apoyarse en este para comunicar.
B	Seleccionar o recopilar información relevante con la intención de focalizar la discusión o precisar ideas.
C	Utilizar las ideas de los estudiantes para establecer discusiones entre ellos y el empleo de un SGD para apoyar sus ideas.
D	Fomentar reflexiones y autoevaluaciones de los estudiantes frente a sus ideas o las de sus compañeros, cuando se discute acerca de una idea y se utiliza un SGD.

Tabla 1. Acciones del profesor para favorecer el discurso

ANÁLISIS

El episodio que se analiza corresponde a un momento de la segunda sesión de clase, en la cual el profesor propone a los estudiantes resolver el siguiente problema utilizando un SGD, en grupos conformados por tres personas.

> Dados los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, trazar una ruta que parta de *A* y llegue a *A* tal que: i) pase por *B*, *C*, *D* y *E*; ii) se realicen más de tres cambios de dirección; iii) el camino entre un punto y otro debe ser el más corto; iv) los recorridos se intersectan en los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.

Después de que cada grupo solucionó el problema, se discutieron las construcciones propuestas.

Descripción del episodio

Luego de que se ha concluido que ninguna terna de los puntos A, B, C, D y E pueden ser colineales, para cumplir con la condición de tener más de tres cambios de dirección, el profesor pregunta a los estudiantes: "¿qué debería hacer para […] garantizar que mi camino es el más corto?" [264].

Santiago, quien tiene la tablet que se encuentra conectada al televisor, es el primero en hacer una propuesta: "Apequeñarlo" [265]. Sus compañeros se ríen, pero el profesor le pregunta "¿qué es apequeñarlo?" [266]. Santiago arrastra los puntos para acercarlos entre sí [269]. Gabriela interviene afirmando […] "el camino más corto que yo puedo hacer es el recto [representa un segmento en el aire], porque si yo no lo hago recto quedaría más largo [representa una curva en el aire]; no se necesita achiquitarlo porque […] no cambia" [270]. El profesor solicita a Gabriela: […] "¿nos podrías decir entonces cuál es tu idea aquí con la tablet? Dices que no hay necesidad de hacerlo así de pequeñito. Miremos lo que hace Gabriela" […] [272]. Gabriela toma la tablet y afirma: "es que se supone que, para achiquitar los caminos, ahí ya no se puede hacer más [muestra la Figura 1], a menos que corras los puntos, porque el camino [más] corto entre un punto y otro es la línea recta. Porque si yo le hago más curvas el camino va a ser mucho más largo" [273].

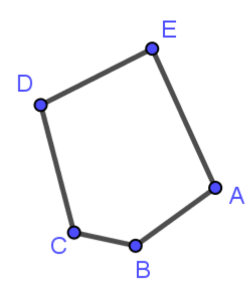


Figura 1. Figura proyectada en el televisor

El profesor pregunta a Salomé qué opina sobre lo dicho por Gabriela [274]. En este momento, Salome desvía la conversación que se estaba llevando a cabo, debido a que vuelve a enfocarse en la segunda condición del problema (los cambios de dirección), dejando a un lado la condición del camino más corto [279]. Por tal motivo el profesor ve la necesidad de orientar nuevamente la discusión hacia los planteamientos de Gabriela. Para ello, le pregunta a Gabriela: […] "¿Tú idea cuál es? ¿Qué lo volvamos cómo? ¿Cómo logramos ese camino corto?" [291]. Gabriela nuevamente muestra la Figura 1, mientras que dice "Acá [en el SGD], se supone que (…) que se puede cambiar la distancia entre dos puntos" [292]. El profesor le indica que se apoye en el SGD y dice: […] "Miremos qué está haciendo Gabriela. Estás moviendo dos puntos, ¿cierto?" [293]. Gabriela expresa: "yo lo que estoy diciendo es que (…) la distancia más corta… Por ejemplo, en este caso la posibilidad de mover los puntos pues se da. Pero, la idea (…) que yo tengo es que el camino más corto entre dos puntos no es una línea curva o lo que sea, porque se demora mucho más, sino la línea recta, lo más recto que hay entre dos puntos" [294].

Análisis del episodio

El fragmento anterior gira en torno a dos asuntos. El primero está asociado al *vocabulario*, pues varias intervenciones de Gabriela y Santiago tienen como propósito comunicar el significado de la frase "el camino más corto entre dos puntos". El segundo asunto está asociado a *narrativas,* pues algunas de las intervenciones están orientadas a apoyar a los estudiantes para producir y validar la siguiente proposición: "La trayectoria más corta entre dos puntos es el segmento cuyos extremos son los dos puntos".

En relación con el primer asunto, una de las acciones que realiza el profesor es invitar a los estudiantes a contrastar los significados asociados a palabras generadas por el uso del programa (*Acción A- Vocabulario*). La acción se desencadena a partir de la propuesta de Santiago, quien introduce la palabra *apequeñarlo* [265]. Esta propuesta surge porque el profesor no les aclaró a los estudiantes que los puntos eran fijos. A partir de esta intervención, el profesor indaga por el significado que él asocia a este término [266]. Aunque Santiago no responde, la acción que realiza en la tablet (arrastra los puntos), lleva a Gabriela a explicitar que su idea de camino más corto es diferente a la de Santiago. Para ella, aunque los puntos puedan cambiar de posición en el SGD, cuando se pregunta por el camino más corto se pide describir la trayectoria más corta entre dos puntos fijos. Para que Gabriela pueda expresar esta idea y, a su vez, contrastarla con la propuesta de Santiago, el profesor le pide en reiteradas ocasiones que repita su idea; a los demás compañeros les pide opinar sobre la misma [272, 274, 291]. El profesor permite que sus estudiantes utilicen términos asociados al programa en sus intervenciones, como el *camino recto, achiquitarlo, no cambia* o *se demora* [270-294]. Parece ser que, expresar su idea varias veces, permitió que al final del episodio Gabriela se expresara con mayor claridad, y que haya surgido la necesidad de utilizar términos matemáticos como *línea curva*, *línea recta* o *distancia* [294].

En relación con el segundo asunto, el profesor indaga sobre las ideas o afirmaciones de los estudiantes para favorecer que ellos mismos revisen y modifiquen las proposiciones que formulan y que interpreten las de los demás (*Acción D, Narrativas*). En el trascurso de la conversación, surgen dos propuestas para solucionar el problema, que pueden sintetizarse por medio de las siguientes proposiciones: "la trayectoria entre dos puntos se obtiene acercando los puntos" (Santiago) y "la trayectoria más corta entre dos puntos se obtiene por medio de una recta" (Gabriela). Las acciones del profesor se centraron en apoyar un proceso de comparación entre estas proposiciones, que inició Gabriela. Esto lo hace, pidiéndole a Gabriela repetir su idea y solicitando a los estudiantes opinar respecto a lo que ella expone. Otra acción por parte del profesor, relacionada con el segundo asunto, es priorizar las intervenciones de los estudiantes que son pertinentes para avanzar en las discusiones (*Acción B - Narrativas*). Esta acción se evidencia cuando el profesor descarta lo dicho por Salomé [291], pues lo que proponía se desviaba de la proposición matemática que se quería validar en el curso, que era la que había propuesto Gabriela.

Finalmente, tanto en el asunto relacionado con el vocabulario como con las narrativas, existieron otras acciones del profesor como la solicitud a los estudiantes de apoyarse en una representación realizada en el SGD para ampliar una idea o comunicarla de forma más clara [272] (*Acción A - Mediadores visuales*).

EXPECTATIVAS SOBRE RESULTADOS

En el análisis presentado, podemos evidenciar como principal resultado que las acciones realizadas por el profesor favorecieron el desarrollo el vocabulario y las narrativas, aspectos que constituyen el discurso matemático. Por tanto, se espera que, al realizar un análisis similar de los otros episodios se identifiquen: diferentes acciones del profesor que permiten un desarrollo en el discurso matemático, oportunidades en las que el profesor no aprovechó las intervenciones de los estudiantes para permitir un avance en el discurso, y los patrones repetitivos (rutinas) que caracterizan el discurso matemático de esta comunidad.

Finalmente, podemos concluir que, así como lo plantea Sfard (2008), a medida que se presenta un cambio en el discurso de los estudiantes, ellos están aprendiendo. Esto se debe a que se apropian del vocabulario, hacen uso de mediadores visuales, proponen y validan proposiciones, entre otras.

REFERENCIAS

Alrø, H. y Skovsmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero y O. Skovsmose (eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 149-171). Bogotá: una empresa docente.

Berger, M. (2011). Using mathematical discourse to understand students' activities when using GeoGebra. *Proceeding of PME 35, 2*, 37–144.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education. 35*(4), 258-291.

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (ed.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-79). Barcelona: Graó.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and ScienceEducation* (pp. 197-230). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

Mortimer, E. F. y Scott, P. H. (2003). Meaning making in secondary science classrooms. Maidenhead: Open University Press.

Quaranta, M., y Tarasow, P. (2004). Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. *Relime 3,* 219-233.

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: how language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education, Online first*. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sinclair, N., Moss, J., y Jones, K. (2010). Developing geometric discourses using DGS in K-3. *Proceeding of PME 34*, 4, 185-192.

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN UN CURSO DE PRIMARIA

Oscar Cetina, **Nathalia Moreno** y **Carmen Samper**

Universidad Pedagógica Nacional

ojcetinas@upn.edu.co, inmorenob@upn.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

El presente documento exhibe avances de un estudio realizado para determinar si el uso de ejemplos y de no-ejemplos en un ambiente de tecnología digital, en tareas dirigidas a estudiantes de primaria, incidió favorablemente en su proceso de construcción de significado del objeto matemático triángulo, de los diferentes tipos de triángulo y de otros objetos relacionados con ellos.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

En un trabajo de investigación que se adelanta en este momento, se busca contribuir al aprendizaje de la geometría de estudiantes de grados cuarto y quinto de primaria de las instituciones educativas en las que actualmente se trabaja. A partir de evidencias empíricas, se identificó la necesidad de proveer un mayor apoyo a los estudiantes en el proceso de construcción de significado de objetos y relaciones geométricas específicas. Se decidió entonces centrar la mirada en distintas tareas que apuntan hacia la comprensión de las definiciones, dado que estas son parte importante del proceso de construcción de significado. Como indican Leikin y Winicki-Landman (citados en Silva, 2013), definir es más que asignar un nombre a un objeto geométrico; es un proceso en el cual se captura el significado y el carácter de un objeto. En consonancia con lo anterior, Tsamir, Tirosh y Levenson (2008) afirman que los ejemplos y no ejemplos juegan un papel importante en la conceptualización y en el desarrollo del razonamiento, y pueden mostrar el nivel conceptual que ha logrado un estudiante. Teniendo en cuenta lo anterior, surge nuestra pregunta de investigación: ¿cómo pueden el uso de tecnología digital y las tareas con ejemplos y no-ejemplos contribuir a la construcción de significado de objetos geométricos? En esta ponencia, se presentan avances iniciales sobre el efecto de la actividad desplegada para resolver las tareas diseñadas con ejemplos y no-ejemplos en la construcción de significado de el triángulo y de objetos geométricos relacionados con este.

Cetina, O., Moreno, N. y Samper, C. (2019). Construcción de significado de conceptos geométricos en un curso de primaria. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 139-147). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

El estudio corresponde al trabajo de grado que se realizó para optar por el título de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). Este se encuentra ubicado en el campo investigativo de Educación Matemática, en la línea de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría;* específicamente, en el énfasis "Tecnología digital en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas".

MARCO TEÓRICO

En esta sección se presenta la postura teórica según la cual se concibe la construcción de significado y los aspectos relacionados con dicho proceso. Nos referimos al uso de ejemplos y no-ejemplos y de la tecnología digital para promover aprendizaje.

A partir de lo que exponen Samper, Perry y Camargo (2017), construir significado consiste en lograr compatibilidad de las ideas que un estudiante tiene de un objeto o relación (significado personal) con aquellas que la comunidad de referencia ha establecido (significado institucional), a través de un proceso social y de interacción entre estudiantes y con los objetos en estudio. A medida que se trata al objeto o la relación en diversas situaciones, se descubren nuevas propiedades, y, por tanto, se construye significado. Es decir, el significado de un objeto es mediado por las experiencias que se tienen con él.

Es común ver en la clase de geometría que las definiciones son suministradas por el profesor o, en su defecto, por el libro de texto, y solamente se promueve la memorización de estas. Ello lleva a que los estudiantes repliquen la definición sin comprensión e interpretación. Pero según de Villiers (1995), los estudiantes deben tener la oportunidad de participar en la formulación y elección de definiciones para promover la construcción de significado. Además, Vinner (1991) afirma que la habilidad para construir una definición es posible indicio de comprensión, mientras que memorizarla no lo garantiza.

Tsamir et al. (2008) afirman que los ejemplos prototípicos, usualmente usados por profesores para favorecer la conceptualización inicial de un objeto, pueden obstaculizar el significado personal que se tiene de este, porque se considera que atributos no críticos forman parte del objeto como, por ejemplo, la orientación o el tamaño. Ellos reconocen que los no-ejemplos aportan a la construcción de significado, no solo porque es posible distinguirlos de los ejemplos sino porque sirven para diferenciar los atributos críticos de los no críticos, proceso necesario para poder definir el objeto. En el caso de objetos geométricos, añaden que ello permite ver una figura representativa de un objeto no solo como un todo, sino como conformada de partes. Lo anterior ofrece una herramienta potente para argumentar por qué una figura es ejemplo o no de un objeto geométrico.

Una forma de hacer viable lo que comunican Tsamir et al. (2008) es a través del diseño de tareas y del uso de diferentes herramientas en la clase de geometría. Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) afirman que el uso de geometría dinámica puede mediar en la construcción de significado de objetos geométricos porque las representaciones construidas obedecen los postulados de la geometría euclidiana, y, por tanto, aquellas propiedades que se mantienen invariantes bajo el arrastre, son propiedades que definen al objeto geométrico. También permite ilustrar cómo la ausencia de una propiedad convierte la representación en un no-ejemplo de este.

DISEÑO METODOLÓGICO

A continuación, se presenta el diseño de dos tareas y la metodología que se está utilizando para determinar si se ha incidido en el significado personal de los objetos geométricos involucrados en cada situación.

Diseño de tareas

En la investigación, se diseñaron tres tareas con el objetivo de contribuir al proceso de construcción de significado de triángulos y otros conceptos asociados. Las tareas se pensaron para pomover la interacción comunicativa (proceso social) para favorecer la transformación del significado personal que tienen los estudiantes de los objetos y así acercarlos a su significado institucional. Se eligieron los objetos que se trabajan en cada tarea de acuerdo con el plan de estudios y el currículo de cada una de las instituciones en las que trabajamos. Antes de llevar a clase la primera tarea, se realizó una actividad de reconocimiento de las herramientas básicas de GeoGebra y de la función arrastre.

El propósito de la Tarea 1 es establecer la definición de triángulo. Se usan ejemplos y no-ejemplos para que los estudiantes identifiquen las propiedades que definen triángulo: i) puntos no colineales y ii) unión de los segmentos cuyos extremos son dichos puntos. La Tarea 1 se desarrolla en dos momentos: uno en el que los estudiantes trabajan sin GeoGebra y otro con el uso de esta herramienta. En el primer momento, los estudiantes, individualmente, escriben su definición de triángulo. Posteriormente, en grupos de dos o tres, comparan sus definiciones, con la intención de buscar diferencias y llegar a una definición consensuada. Luego, observan en una hoja varias representaciones (Figura 1), con el fin de analizarlas, decidir si cumplen ser o no triángulos usando la definición consensuada y explican el porqué de sus decisiones.

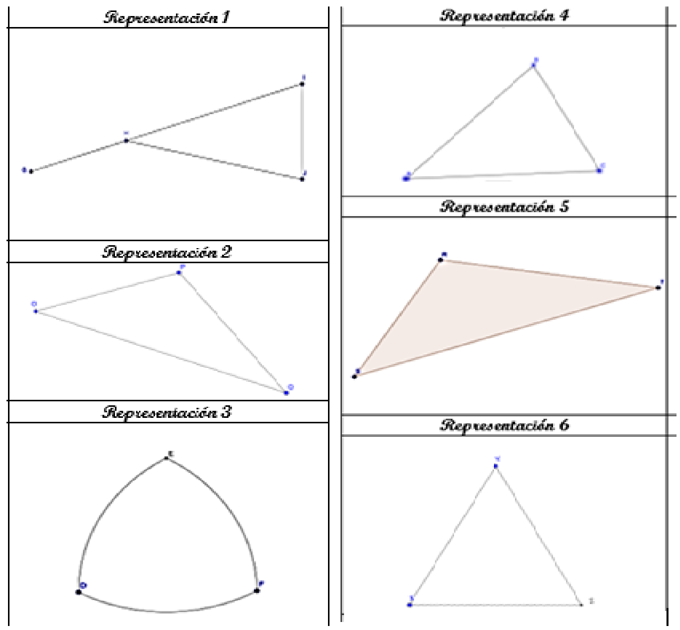


Figura 1. Representaciones de triángulos y no triángulos, ítem 3, Tarea 1

En el segundo momento, en un archivo de GeoGebra, los estudiantes observan las mismas representaciones de la Figura 1. Sin embargo, la Representación 2 no siempre es triángulo porque al arrastrar los vértices los tres puntos pueden resultar colineales, y la Representación 4 no es triángulo ya que, bajo el arrastre, los segmentos no siempre se intersecan en lo que parece ser un vértice. El propósito es determinar si aquellas figuras que visualmente se identifican como triángulos se mantienen como tal bajo el arrastre. Al finalizar la tarea se solicita contrastar la definición consensuada con lo observado durante la exploración para modificarla, en caso de ser necesario.

El propósito de la segunda tarea es construir definiciones de triángulo acutángulo y obtusángulo. Inicialmente, se usan dos archivos de GeoGebra en los que se muestran ejemplos y no-ejemplos de cada uno de esos tipos de triángulos (Figura 2, para triángulos acutángulos). Los estudiantes deben determinar las características esenciales que distinguen a cada tipo de triángulo, a partir de las medidas de los lados y de los ángulos que tienen que encontrar. Deben consignar las propiedades que comparten los ejemplos en una definición.

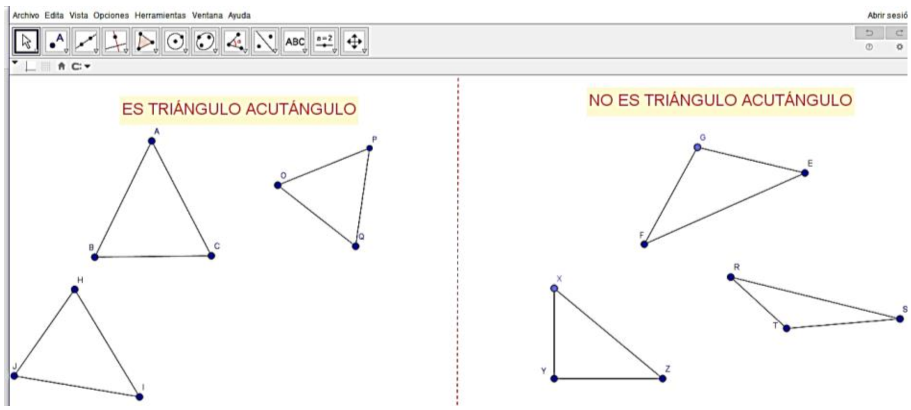


Figura 2. Pantallazo de GeoGebra con ejemplos y no ejemplos de triángulos acutángulos Tarea 2

Para incentivar el uso de la definición, como tarea extraclase, los estudiantes tienen que dibujar ejemplos y no-ejemplos de triángulos acutángulos. Luego deben solicitarle a un adulto conocido que analice lo que está representado y, a partir de ello, definir triángulo acutángulo.

Finalmente, en grupo, deben responder preguntas como las siguientes:

- ¿Pueden los triángulos isósceles ser acutángulos?
- ¿Pueden los triángulos isósceles ser obtusángulos?
- Cuando el triángulo es obtusángulo, responda: ¿Puede tener un ángulo agudo?; ¿Puede tener dos ángulos agudos? ¿Puede tener un ángulo recto?

Estrategia de investigación

Para el estudio, empleamos una aproximación de tipo interpretativa, con un enfoque fenomenológico, pues se busca desentrañar lo que dicen y hacen los estudiantes de primaria al resolver las tareas y cómo estas contribuyen al proceso de construcción de significado. La estrategia investigativa adoptada para el desarrollo del presente estudio es la “Entrevista basada en tareas” que expone Goldin (2000). Su propuesta se caracteriza por realizar una indagación sistemática de la actividad que realizan los estudiantes, durante la resolución de una tarea previamente diseñada con ayuda o no de recursos, a través de un diálogo ocasionado por los investigadores. El objetivo es rastrear los mecanismos de exploración, las causas de sus decisiones, las estrategias que usan y evidenciar la construcción conceptual al resolver la tarea propuesta.

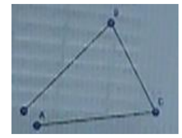
Para aprender a usar la estrategia como la propone Goldin (2000), dado que ello exige una gestión inusual en la práctica del aula, se realizó una adaptación de esta para las dos primeras tareas. En vez de hacer preguntas mientras los estudiantes trabajaban, las hicimos después en una entrevista. El fin era saber qué tipo de preguntas se deben hacer, aprender a interpretar sus respuestas, y acostumbrar a los estudiantes a ese tipo de intervención.

La entrevista para cada grupo fue diferente pues se construyó a partir de sus respuestas específicas. Con las preguntas que se hicieron, se buscó que los estudiantes expresaran con claridad lo que subyace a su proceso de solución, a sus decisiones, y que aclararan los términos que usaban en su comunicación. Se propuso un problema durante la entrevista con el objetivo de poder evidenciar directamente el proceso que realizaban para resolverlo y determinar si las preguntas hechas por el profesor eran adecuadas para obtener nueva información acerca de lo que pensaban los estudiantes. Para la Tarea 3, se planificaron, con anterioridad, las preguntas que se harían, para seguir así la estrategia como la propone Goldin (2000).

AVANCES

Se presentan ejemplos de situaciones en las que se evidencia que el uso de tecnología, y el uso de ejemplos y no-ejemplos afectan significados personales. También se muestra un ejemplo de cómo una pregunta del profesor puede sacar a la luz qué motivó una decisión.

Ejemplo 1: los estudiantes utilizan e identifican una de las propiedades inmersas en la definición de triángulo, que ellos mismos elaboraron, para descartar una de las figuras representadas con GeoGebra. Públicamente, Juan e Isabel informan que la Representación 4 de la Tarea 1 no es un triángulo y aluden a que no cumple con la propiedad de la unión de segmentos. Entrevemos aquí que el uso de no ejemplos contribuyó a destacar la necesidad de esta propiedad en la definición. Además, se evidencia la importancia del uso de tecnología digital, ya que mediante la función arrastre y la pregunta que hace el profesor, los estudiantes reconocieron que se incumplía dicha propiedad. Ello les mostró que no se pueden tomar decisiones únicamente a partir de lo que se ve.

Juan:	No es un triángulo. No sé cómo decirlo realmente, pero  no es un triángulo (…)
Isabel:	Sí, porque los lados se separan y no podría ser un triángulo.
Profesor:	Entonces ahí nos dimos cuenta de algo. ¿Cómo tiene que ser la figura entonces [para ser triángulo]?
Muchos estudiantes:	Unidas

Ejemplo 2: Al finalizar la Tarea 1, evidenciamos que la geometría dinámica por sí sola no incide en el proceso de construcción de significado de los objetos geométricos, a menos que el estudiante interprete lo que ve durante la exploración y lo contraste con su definición personal. Esto se muestra en el siguiente fragmento.

Profesor:	Quiero escuchar en qué les ayudó (…) si les ayudó o no para definir el triángulo [refiriéndose al archivo de GeoGebra] (…)
Isabel:	A mí se me ayudó, porque yo solo decía: una figura geométrica. Pero me doy cuenta que es un polígono con tres lados y vértices que no sean colineales.

Gracias al uso de GeoGebra, Isabel logró cambiar su significado personal, pues descubrió nuevas propiedades que desconocía o no tenía en cuenta para definir o referirse al triángulo, acercándose así al significado institucional del objeto.

Ejemplo 3: Para resolver la tarea en la que debían dibujar ejemplos y no-ejemplos de triángulos acutángulos, María recurre a la definición construida con Isabel, a partir del uso de los ejemplos y no-ejemplos representados en la Tarea 2. Esto es evidencia de que la experiencia de construir la definición, trascendió hasta el punto de recordarla para poder usar la definición.

Profesor:	¿Cómo hiciste la tarea [extraclase]?
María:	Me acordé que con Isabel habíamos dicho que los acutángulos son menores de 90 y los no acutángulos son mayores de 90 o dan 90. Entonces eso fue lo que yo dibujé.

Ejemplo 4: El siguiente fragmento refleja la importancia de los no-ejemplos, pues para determinar lo que define un triángulo obtusángulo, bajo la sugerencia de la profesora, Jorge se valió de estas representaciones.

Profesora:	Entonces miremos los no obtusángulos, a ver qué pasa.
Jorge:	¡Ah! Ya entendí. Tenemos que hallar la diferencia (entre los ejemplos y los no-ejemplos) y esa diferencia es lo que define los triángulos obtusángulos (…)
Profesora:	Sí señor.
Jorge:	Ok está fácil…otro de 90 ¡Ah!, ya entendí (…) un triángulo rectángulo no puede ser un triángulo obtusángulo.

Así, Jorge identifica que los no-ejemplos tienen atributos que no hacen parte de la definición del objeto o que carecen de alguno requerido.

Las evidencias anteriores parecen indicar que las tareas con ejemplos y no ejemplos y el uso de tecnología digital en estas sí pueden incidir en el proceso de construcción de significado. En parte se puede deber a que estas animan a los estudiantes a examinar, explorar y comunicar sus ideas en la clase de geometría.

REFERENCIAS

De Villiers, M. (1995). The Handling of Geometry Definitions in School Textbooks. *Pythagoras*, *38*, 3-4.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En, A. Kelly y R. Lesh (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (ed.), *Geometría Plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 30-31). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., y Camargo L. (2017). Construir significado, más que conocer la definición. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 51-58.

Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar.* (Trabajo de grado de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Tsamir, P., Tirosh, D., y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 81-95.

Vinner, S (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic Press.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS A PARTIR DE LA SEMEJANZA Y LA CONGRUENCIA

Gisel Yuranny Cuero, Ana Maryen Manyoma

Universidad del Valle

gisel.cuero@correounivalle.edu.co, ana.manyoma@correounivalle.edu.co

La siguiente propuesta de indagación nace con el propósito de analizar las dificultades que presentan los estudiantes de grado 7º cuando, al darse una relación de semejanza o congruencia entre una figura geométrica y su imagen bajo una transformación geométrica, no logran reconocer las propiedades que permiten determinar qué transformación se ha aplicado. Como soporte a la investigación, se tienen en cuenta a Julio (2014), Montes (2012), y lo establecido por el MEN (2006), entre otros, respecto a la enseñanza de los objetos geométricos semejanza, congruencia y transformaciones geométricas.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el currículo escolar, la semejanza y la congruencia constituyen uno de los temas de gran relevancia en el ámbito geométrico. Esto requiere reconocer las unidades de una figura plana, sus características y propiedades, lo cual es necesario para establecer las relaciones entre una figura y su imagen bajo una transformación geométrica, que además requiere tener en cuenta la forma, el tamaño, la posición y las propiedades que se mantiene invariantes bajo la transformación (Julio, 2014).

Algunas investigaciones identifican dificultades en el proceso de aprendizaje de las transformaciones geométricas. Julio (2014) y Montes (2012) manifiestan que los estudiantes presentan dificultad para comprender los efectos que las distintas transformaciones en el plano tienen sobre las figuras. Además, respecto a la naturaleza de las transformaciones, es decir, las características invariantes que permiten distinguir una transformación de otra, Montes dice:

Cuero, G. y Manyoma, A. (2019). Transformaciones geométricas a partir de la semejanza y la congruencia. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 149-157). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

> […] una de las principales dificultades que generan errores en los estudiantes al momento de trabajar con movimientos en el plano, radica en la naturaleza de las transformaciones geométricas. (Montes, 2012, p. 26)

Generalmente, los profesores de grado 7º enseñan las transformaciones geométricas mediante el reconocimiento del cambio de posición de una figura. No se detienen a analizar las propiedades de la figura y su imagen para determinar si son congruentes o semejantes, y por ello, a reconocer que algunas transformaciones conservan medidas de lados y de ángulos, y otras solo de ángulos. Por ello, el estudiante no logra reconocer las características y propiedades de la transformación geométrica aplicada a una figura geométrica. No ven la relación entre la congruencia y semejanza con las propiedades de las transformaciones.

Dicho lo anterior, surge la siguiente pregunta: ¿a qué están asociadas las dificultades que presentan los estudiantes de grado 7º cuando, al encontrar una relación de semejanza o congruencia entre una figura geométrica y su imagen bajo una transformación, no logran reconocer las propiedades que permiten establecer el movimiento en particular que se ha aplicado?

Congruencia, semejanza y transformaciones geométricas

Aportes de algunas investigaciones

Para encontrar una respuesta a la pregunta de investigación, se tendrán en cuenta las investigaciones de Julio (2014), Montes (2012), Cárdenas (2013) y lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional (2006), en adelante MEN, con respecto a la enseñanza de las matemáticas, específicamente, de los objetos geométricos, semejanza, congruencia y transformaciones geométricas.

En relación con los conceptos de semejanza y congruencia, Cárdenas (2013) enuncia que dos figuras geométricas planas son congruentes, si una de ellas se puede cambiar de posición, rotándola sobre un punto, reflejándola sobre un eje o punto, o trasladándola, de tal manera que coincida con la otra. Para ello, se deben tener en cuenta algunas propiedades que permiten comprender el concepto de congruencia: congruencia de segmentos y congruencia de ángulos.

De manera análoga, Cárdenas (2013) expresa que la relación de semejanza entre polígonos se establece relacionando los lados y ángulos de las figuras. Dos polígonos son semejantes cuando las medidas de los lados correspondientes guardan la misma proporción, y sus ángulos respectivos son congruentes. Intuitivamente, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma, aunque su tamaño sea diferente. Resumiendo,

> […] dos polígonos son congruentes, si y solamente si, existe una isometría que envía uno en el otro, y dos polígonos son semejantes, si y solamente si, existe una transformación que envía uno en el otro. En este caso la transformación puede ser una homotecia o la composición de una homotecia con una isometría. (Julio, 2014, p. 9)

El MEN (2006) plantea que los conceptos de semejanza, congruencia y transformaciones geométricas deben ser abordadas en el grado séptimo para así fortalecer el desarrollo del pensamiento espacial. La aplicación de transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales genera la necesidad de identificar las relaciones y propiedades de semejanza y congruencia a partir de representaciones visuales. De lo anetrior, la importancia de abordar estos objetos de conocimiento, pues permiten establecer relaciones entre formas de las figuras y los movimientos.

Transformaciones geométricas

Las transformaciones geométricas se pueden clasificar en dos grupos: isométricas e isomórficas. Son isométricas, si se conserva la forma y tamaño de la figura, mientras que son isomórficas, si solo se conserva la forma. A continuación, se muestra un diagrama que sintetiza las propiedades de las transformaciones.

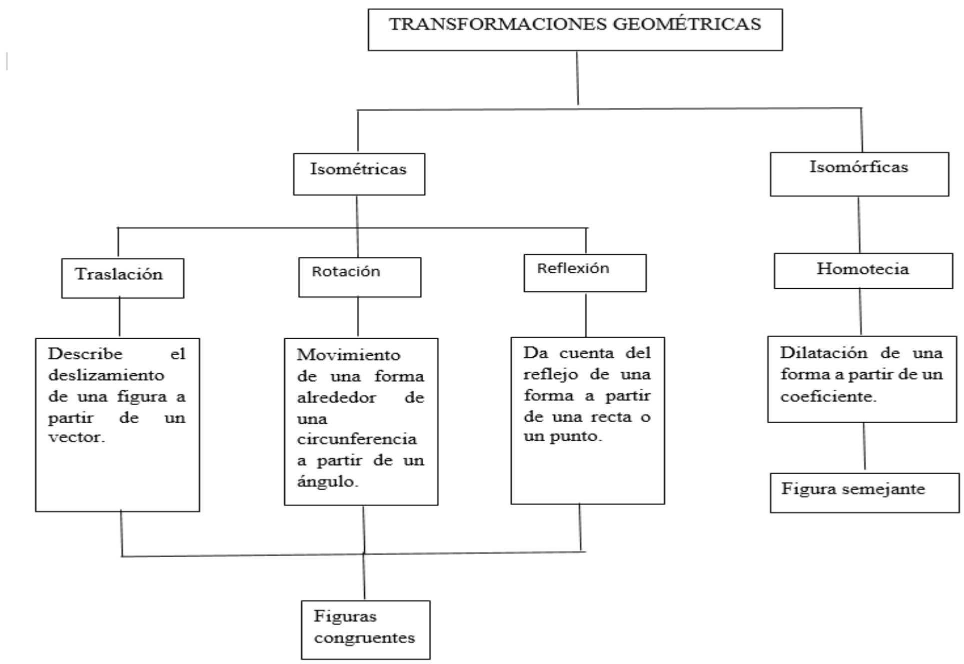


Figura 1. Diagrama explicativo de las transformaciones geométricas abordadas en la investigación.
Fuente: Elaboración propia.

Se tiene que la congruencia entre figuras puede ser el resultado de una de las siguientes transformaciones geométricas: rotación, traslación, simetría y una homotecia, cuando esta es la identidad, mientras que la semejanza es el resultado de una homotecia. Por ello, es necesario cuestionarse sobre la forma de cómo abordar las transformaciones geométricas a partir de la semejanza o congruencia de figuras planas. Se podría hacer a través del reconocimiento de qué hace que una figura plana sea congruente con otra, y así, establecer la correspondencia entre los vértices. Esto permite determinar el vector director, el ángulo de rotación, el eje o el centro de simetría, para identificar la transformación que subyace. Mientras que a través del reconocimiento de lo que hace que una figura plana sea semejante a otra, el estudiante podrá establecer una homotecia, y determinar el coeficiente k correspondiente a dicha transformación.

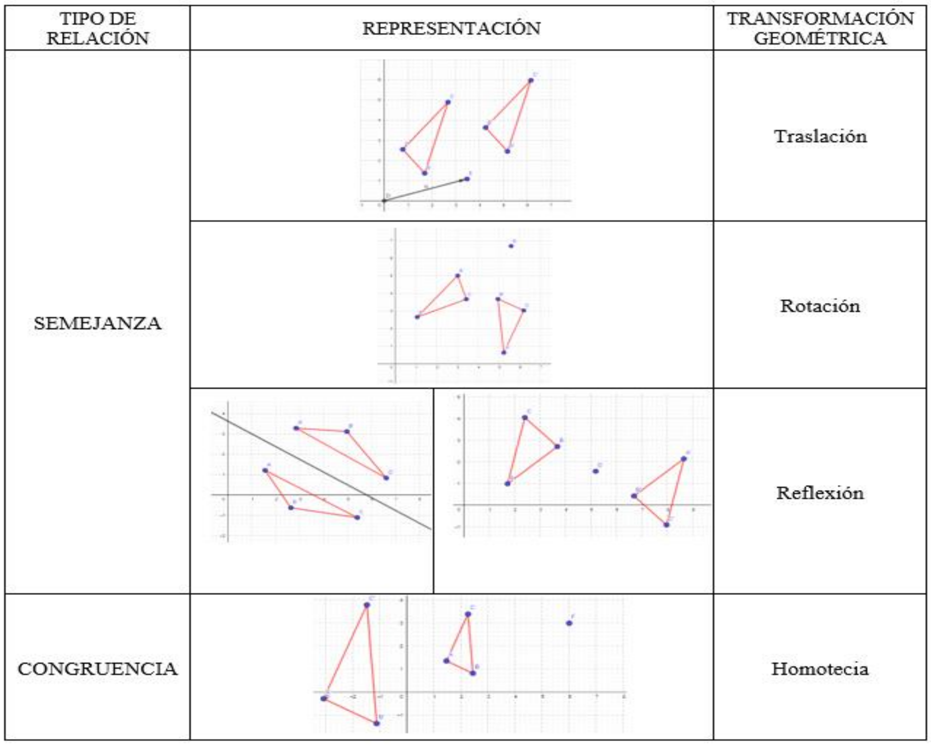


Figura 2. Diagrama comparativo de la relación de congruencia y el tipo de transformación geométrica.

Fuente: Elaboración propia.

Para el reconocimiento de una transformación geométrica, inicialmente se determina qué tipo de relación (semejanza o congruencia) se puede dar (Figura 2). Para establecer la relación, se debe identificar visualmente la correspondencia entre los vértices para establecer, también visualmente, si los ángulos correspondientes son congruentes y si los lados correspondientes son congruentes o proporcionales. Seguido de ello, se deben precisar las propiedades que permanecen invariantes en la aplicación de la transformación, para poder identificarla. De acuerdo con esto, se puede orientar el acercamiento a la semejanza, la congruencia y las transformaciones, usando el plano cartesiano como herramienta. Esto ayuda a que el estudiante desarrolle procesos de visualización y ubicación en el espacio.

Por tanto, es pertinente tener en cuenta los elementos que caracterizan a cada transformación (ángulo, longitudes de segmentos, colinealidad y equidistancia de puntos, semejanza y congruencia entre dos figuras, etc.) pues, es lo que permite identificar el movimiento que se ha generado.

Ejemplos

En lo que sigue, se presentan ejemplos que ilustran el proceso que se puede seguir para identificar una transformación geométrica a partir de la relación de semejanza y congruencia en triángulos.

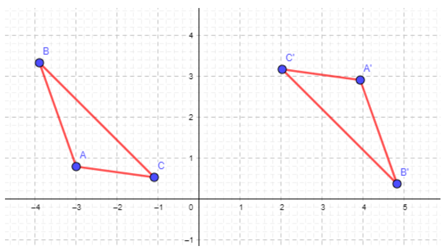
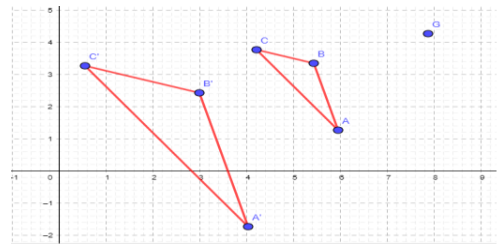
	

Figura 3. Reconocimiento del movimiento en el plano a partir de la congruencia de figuras. Fuente: Elaboración propia.	**Figura 4.** Reconocimiento del movimiento en el plano a partir de la semejanza de figuras. Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 3, el estudiante podrá reconocer, a través de la comparación de los triángulos, que la transformación aplicada puede ser una rotación de 180°, una reflexión central o una homotecia con $k = -1$. Mediante la identificación de algunos elementos, tales como: tamaño y forma de las figuras, posición inicial y final, punto medio del segmento con extremos un vértice y su correspondiente, entre otros, se podrá reconocer el movimiento aplicado a una figura para obtener su imagen. Para ello, se toman las rectas que contienen vértices correspondientes y se determina que, si se intersecan, se tendría una rotación, una simetría o una homotecia, pero si son paralelos, se estaría presentando una traslación. Si se intersecan y las figuras son semejantes, se estaría presentando una homotecia; pero si son congruentes, se estaría dando una simetría o rotación. Ver Figura 5.

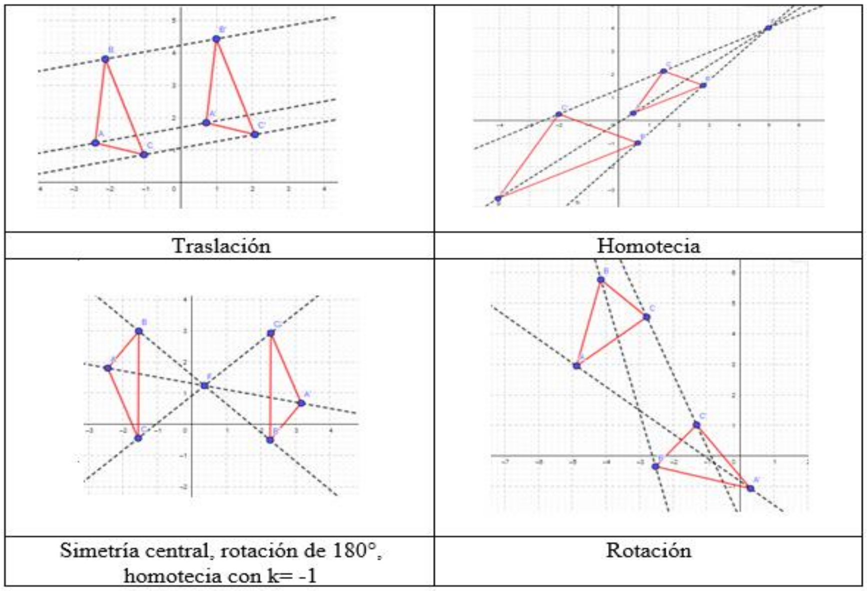


Figura 5. Determinación de una transformación geométrica a partir de la visualización de rectas que contienen los vértices correspondientes.

Fuente: Elaboración propia.

Respecto a la Figura 4, para identificar el movimiento que subyace en la representación, el estudiante debe, inicialmente, identificar las propiedades que caracterizan a la figura inicial y final. Luego debe tener en cuenta si ha habido alteración de la forma o del tamaño de la imagen, y si cada vértice de la figura inicial, el correspondiente de la figura final, y el centro homotético están alineados. Con ello sabrá si se trata de una homotecia.

METODOLOGÍA

La propuesta de investigación es de tipo cualitativo. Se desarrollará con estudiantes de una institución oficial del Distrito de Buenaventura. Inicialmente se diseñará un conjunto de situaciones que permitan describir la forma como acceden los estudiantes de 7° grado al reconocimiento de la aplicación de las transformaciones geométricas, a partir de la relación de semejanza y congruencia de figuras planas. Además, se realizarán consultas y análisis de algunas investigaciones que se han enfocado en la relación entre semejanza, congruencia y transformaciones geométricas, con la finalidad de conocer las posibles dificultades encontradas en la comprensión de los conceptos anteriores. Así mismo, se tendrán en cuenta los estándares básicos de competencia planteados por el MEN (2006), debido a que propone una relación entre los objetos de conocimientos a trabajar y el desempeño que los estudiantes deben alcanzar sobre ese objeto.

EXPECTATIVAS

Se espera diseñar tareas en las que el estudiante pueda establecer conjeturas por medio de la interpretación de dos figuras en el plano, predecir resultados y, por último, corroborarlas, teniendo en cuenta las características que distinguen a una transformación geométrica de otra. A partir de la aplicación de las situaciones diseñadas, se espera que los estudiantes tengan los siguientes desempeños:

- Reconozcan algunas propiedades implícitas (correspondencia entre ángulos y lados correspondientes) en cada par de triángulos, para así poder establecer las relaciones de semejanza o congruencia entre ellos.
- Identifiquen los elementos propios que caracterizan una transformación geométrica, tales como vectores, eje de simetría, coeficiente de dilatación, entre otros, de tal forma que permita reconocerla al comparar dos imágenes (lo que posibilita ahondar sobre procesos de visualización), y a su vez determinar el tipo de relación (semejanza o congruencia) que están inmersas en ellas.

INQUIETUDES

Surgen las preguntas: ¿Por qué resulta valioso trabajar el reconocimiento de las transformaciones geométricas a partir de los procesos de visualización? ¿Qué pautas pedagógicas y disciplinares debe considerar el profesor para que el estudiante reconozca los distintos movimientos aplicados a una figura en el plano, teniendo en cuenta su posición inicial y final? ¿Cuáles son las características que debe tener una tarea para que los estudiantes puedan reconocer las propiedades que se cumplen en las figuras después de haber aplicado una transformación geométrica?

AVANCES DE LA INVESTIGACIÓN

En el desarrollo de la propuesta de investigación, se han observado, a través de la implementación de situaciones didácticas, algunos factores que inciden en las dificultades que tienen los estudiantes para establecer la relación de semejanza o congruencia entre una figura geométrica y su imagen bajo una transformación. Sin ello, no podrán reconocer las propiedades que permiten establecer la transformación particular que se ha aplicado. Dichos factores están asociados a la falta de comprensión de los conceptos (transformaciones geométricas, congruencia y semejanza de figuras) y de las propiedades que permiten diferenciar una transformación de otra. Dado que la visualización juega un papel importante en el proceso para interpretar las construcciones (figuras) y establecer correspondencia de ángulos y lados correspondientes, vemos como pertinente desarrollar esa habilidad.

Referencias

Cárdenas, D. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Julio, L. (2014). *Las transformaciones en el plano y la noción de semejanza* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanías.* Bogotá: Autor.

Montes, S. (2012). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de transformaciones geométricas en el plano con estudiantes de grado séptimo haciendo uso del entorno visual del juego pac-man* (Tesis de posgrado). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE QUE INTEGRA GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRANSFORMACIÓN DE TRASLACIÓN CON ESTUDIANTES DE GRADO 6.°

Leidy Cristina Cumbal, **Andrea Cárcamo**
Universidad del Valle
cumbal.leidy@correounivalle.edu.co, andreacarcamob@gmail.com

Se presenta una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) para apoyar la enseñanza de la transformación de traslación en un curso con estudiantes de grado 6. La THA se diseñó considerando la heurística de los modelos emergentes y los estudios previos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la transformación de traslación. En esta ponencia se pretende describir los elementos que configuran una THA, que se utiliza como instrumento para el estudio de las prácticas de profesores noveles en la integración de recursos digitales. La THA consta de cuatro tareas y se caracteriza porque involucran situaciones en las que se utiliza el ambiente de geometría dinámica GeoGebra.

INTRODUCCIÓN

Este estudio se centra en la caracterización de las prácticas de enseñanza de profesores noveles en la integración de recursos digitales. Es relevante porque los estudios evidencian la importancia de cambiar la comprensión de prácticas de los profesores en el aula de clases cuando usan recursos digitales. Además, los estudios muestran la necesidad de dar cuenta de la eficacia en la utilización de los recursos digitales en el aula, a partir de la investigación sobre el desarrollo profesional de los profesores (Sinclair y Yerushalmy, 2016). Los antecedentes de esta investigación se organizan en cuatro temáticas. La primera hace referencia al papel del profesor en la integración de las TIC para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Autores como los siguientes son representativos: Ruthven y Hennessy (2002); Artigue, Drijvers, Lagrange, Mariotti y Ruthven, (2009); Trouche, (2004); Drijvers, Doorman, Boon y Reed, (2010). La segunda temática se refiere

Cumbal, L. y Cárcamo, A. (2019). Una trayectoria hipotética de aprendizaje que integra GeoGebra para la enseñanza de la transformación de traslación con estudiantes de grado 6.°. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 159-166). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

a trabajos de investigación que tienen por objeto de estudio los profesores noveles en la integración de recursos digitales; son representativos en esta tendencia Tabach (2011) y Drijvers et al., (2014). En la tercera temática se encuentran trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con Ambientes de Geometría Dinámica (AGD), como los de los autores siguientes Santacruz (2012); Obando y Morales (2014) y Morera, (2013). La cuarta temática tiene en cuenta que en el estudio se usa la THA (Trayectoria Hipotética de Aprendizaje) como instrumento de enseñanza, por lo que se consideran trabajos que las integran con recursos digitales. Por ejemplo, se contemplan los estudios de Dos Santos (2013); Aranda y Callejo (2017) ; Luque, Gutiérrez y Diaz (2018) y Suárez y León (2018).

Teniendo en cuenta los antecedentes, se plantean dos preguntas de investigación: 1) ¿de qué manera los profesores noveles en la integración de recursos digitales desarrollan sus prácticas de enseñanza usando una THA? 2) ¿Cómo cambia el repertorio de orquestaciones y las correspondientes habilidades de Conocimiento del Contenido Tecnológico Pedagógico (TPACK por sus siglas en ingles) de los profesores noveles, durante un proceso de integración de recursos digitales utilizando una THA?

Para abordar las preguntas de investigación se establece, como objetivo general, la caracterización de las prácticas de enseñanza de dos profesores de secundaria noveles en la integración de recursos digitales al usar la THA respecto a la transformación de traslación. Como objetivos específicos se precisan: 1) diseñar una THA para la enseñanza de transformación de traslación que involucre recursos digitales, 2) identificar los atributos relacionados con la planificación y el uso de los recursos digitales en los profesores que inician la integración de estos en el aula para la enseñanza de la transformación de traslación, 3) describir los cambios en las prácticas de enseñanza de los profesores que usan las tareas de la THA en las que orquestan recursos digitales, y 4) describir las habilidades y el conocimiento pedagógico tecnológico de los profesores en la integración de recursos digitales para la enseñanza de la transformación de traslación.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este trabajo se articulan tres aproximaciones teóricas para describir las prácticas de profesores noveles en la integración de recursos digitales: la orquestación instrumental, la THA y la transformación de traslación.

La orquestación instrumental designa la organización intencional y sistemática, en un entorno de aprendizaje, de los artefactos disponibles por parte del profesor en una situación matemática (Trouche, 2004). En la investigación referida al desarrollo profesional del profesor se reconoce la necesidad de encontrar formas de integrar tecnología con éxito en el salón de clase. Para estudios de este tipo de procesos se acuña la noción de TPACK (Koehler, Mishra y Yahya, 2007).

En este trabajo, la THA se entiende como un dispositivo que orienta la gestión del aprendizaje y la enseñanza, mediante situaciones en las que se orquestan recursos digitales. Simon (1995) la define como una predicción en cuanto a la ruta por la que podría ocurrir el aprendizaje de los estudiantes. Una THA está compuesta por la meta de aprendizaje, las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje. En el diseño metodológico se describen los elementos de la THA y los procesos a seguir.

La THA se piensa para el aprendizaje de la transformación de traslación, entendida como una transformación de isometría. La traslación es un movimiento rectilíneo en el plano, resultado de desplazar el plano sobre sí mismo en línea recta; es decir, dado un punto Q trasladado de un punto P, mediante una traslación (t), se determinan tres elementos que configuran una traslación: la dirección determinada por la recta $r\ (P, Q)$, la distancia $d\ (P, Q)$ y el sentido que va desde P hasta Q (Alsina, Perez,y Ruiz, 1989).

METODOLOGÍA

Para estudiar un fenómeno complejo, como las prácticas de enseñanza de profesores noveles en la integración de recursos digitales, se asume una investigación de tipo cualitativa: estudio de casos múltiples (Creswell, 2007). Para la intervención de aula, la metodología de investigación nos direcciona en el diseño, aplicación y evaluación de la THA en concordancia con el objetivo de esta ponencia.

La Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)

La THA sirve para determinar cómo los profesores reflexionan para dar sentido y profundizar en la manera como sus estudiantes aprenden, en este caso particular, el concepto de traslación. La ruta hipotética que siguen los estudiantes en el aprendizaje de la traslación está fundamentada en investigaciones didácticas relacionada con este objeto matemático y en la integración de ambientes de geometría dinámica para su enseñanza.

Fase 1: diseño y construcción de la THA

Para la elaboración de THA, que usan los profesores de esta investigación, se definió como objetivo de aprendizaje reconocer el resultado de aplicar la transformación de traslación a figuras bidimensionales en contextos de diseño. Este objetivo se determinó de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje para estudiantes de grado 6° (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

Las tareas de aprendizaje se diseñaron teniendo en cuenta componentes curriculares, matemáticos y didácticos del concepto de traslación. La articulación de las tareas y el proceso hipotético de aprendizaje se fundamentó en el trabajo de investigación de Jaime (1993) en el que se estudió la enseñanza y aprendizaje de las transformaciones de isometría. Además, en cada una de las tareas, se determinó la actividad en consideración con los niveles de los modelos emergentes Gravemeijer (1999) (citado en Cárcamo, 2017, p. 17).

En el desarrollo de la THA los estudiantes inician el estudio de la traslación interactuando con un software dinámico en el que deslizan diferentes figuras que son conocidas por ellos; esto corresponde al nivel situacional de los modelos emergentes. En el nivel referencial, los estudiantes reconocen características visuales: conservación de la forma, el tamaño, el sentido y la dirección de la figura final. Al superponer la figura inicial sobre la figura final a través de un deslizamiento sobre una recta, los estudiantes reconocen la conservación del tamaño y la forma. Los estudiantes reconocen en qué medida se traslada la figura identificando el segmento que corresponde al desplazamiento de cada traslación. Para el reconocimiento de la conservación del sentido, los estudiantes observan movimientos en los que la figura inicial y la final conservan el sentido y otro en el que no. En un nivel general, la conservación del sentido, la dirección y la medida en que se desplaza la figura se configuran en un segmento orientado que determina la traslación. Se reconoce que dos figuras se encuentran en relación de traslación haciendo coincidir los elementos (puntos, segmentos, ángulos, etc.) de la figura inicial con los correspondientes de la figura final, a través de un deslizamiento en línea recta. En este nivel también se plantea el proceso general para construir una imagen por traslación de una figura dada. Este proceso se hace teniendo en cuenta la coincidencia de los elementos correspondientes, por medio de la traslación de cada elemento para luego configurar la figura final. En un nivel formal los estudiantes determinan la característica fundamental de la traslación: dada una figura ABC y su correspondiente traslación $A'B'C'$, los polígonos $AA'BB', AA'CC', BB'CC'$ forman paralelogramos. En este nivel los estudiantes pueden identificar traslaciones que se realizan en una configuración geométrica.

Fase 2: intervención con la THA

Para este trabajo de investigación se seleccionaron dos profesores y sus respectivos estudiantes de grado 6° de educación básica secundaria. Los profesores, que intervienen con la THA, son noveles en el uso de recursos digitales en sus prácticas de enseñanza, tienen experiencia en servicio de 30 y 15 años y laboran en la institución hace 1 y 2 años, respectivamente. Uno de los profesores es licenciado en matemáticas especialista en docencia; el otro es licenciado en biología y química. Actualmente, se desempeñan como profesores de aritmética, geometría y estadística.

La ponencia busca resaltar el papel de la THA en la descripción de las prácticas de los profesores, señalar la complejidad del diseño de una THA y su configuración para la enseñanza de la transformación de traslación.

REFERENCIAS

Alsina, C., Perez, R. y Ruiz, C. (1989). *Simetría dinámica, Serie Matemáticas: Cultura y aprendizaje*. Madrid: Editoria Síntesis.

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2017). Construcción de la función integral y razonamiento covariacional: Dos estudios de casos. *Bolema - Mathematics, 31*(58), 777-798.

Artigue, M., Drijvers, P., Lagrange, L., Mariottr, M. A. y Ruthven, K. (2009). Technologies numeriques dans l'enseignement des mathematiques, ou en est-on dans les recherches et dans leur integration? [Technology in mathematics education: How about research and its integration?]. En C. Ouvrier-Buffet y Perrin-Glorian (Eds.), *Approches plurielles en didactique des math-ematiques; Apprendre a faire des mathematiques du primaire au superieur: poi de-neuf?* [*Multiple approaches to the didactics of mathematics; learning* *mathematics from primary to tertiary level: What's new?*] (pp. 185-207). París: University Paris Diderot, Paris 7.

Cárcamo, A. (2017). *Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado*. (Tesis de doctorado en Educación). Universidad Autonoma de Barcelona.

Creswell, J. (2017). Five Qualitative approaches to inquiry. In *Qualitative Inquiry and Research Design* (pp. 53-84). London: Sage.

Dos Santos, J. M. (2013). *Vasarely, GeoGebra y tareas para el aprendizaje de padrones geométricos, en un Curso Secundario Professional.* Trabajo presentado en el II Encuentro en Andalucía. GeoGebra en el Aula. Resumen recuperado de https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1729.5526

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P. y Reed, H. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(2), 213-234.

Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., van den Heuvel, C., Doorman, M., y Boon, P. (2014). Digital technology and mid-adopting teachers’ professional development: a case study. En *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 189-212). Dordrecht: Springer.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning*, *1*(2), 155-177.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* (Tesis doctoral en Didáctica de la Matemática). Universidad de Valencia.

Koehler, M. J., Mishra, P. y Yahya, K. (2007). Tracing the development of teacher knowledge in a design seminar: Integrating content, pedagogy and technology. *Computers and Education*, *49*(3), 740-762.

Luque, R. E., Gutiérrez, R., y Diaz, S. (2018). Propuesta didáctica para abordar el tema de la función trigonométrica f(x)=tan(x) con el software GeoGebra. *Números*, *97*(March), 83-91.

MEN (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Documento N.° 3*. Bogotá, Colombia.

MEN (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Versión 2*. Bogotá, Colombia.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. (Tésis dåoctoral) Univesidadad Autonoma de Barcelona.

Obando, F. y Morales, C. (2014). *Orquestación instrumental de un ambiente de Geometría Dinámica mediante una Secuencia Didáctica respecto a la noción de simetría axial.* (Tésis de maestría) Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ruthven, K. y Hennessy, S. (2002). A practitioner model of the use of computer- based tools and resources to support mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 47-88.

Santacruz, M. (2012). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un* AGD*: El caso de la rotación en educación primaria.* (Tesis de maestía) Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Research in Mathematics Education*, *26*(2), 146-159.

Sinclair, N. y Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning. En Á. Gutierrez y G. Leder (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 235-274). Springer.

Suárez, W. y León, O. (2018). Educación matemática para todos: el género en el desarrollo de la visualización espacial desde el enfoque de las trayectorias de aprendizaje. *Acta Latinoamerica de Matematica Educativa*, *31*(June), 1263-1271.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

ESTRUCTURA DIDÁCTICA BASADA EN EL COMPONENTE HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO: EL CASO DE LA RAZÓN GEOMÉTRICA

Jairo Gutiérrez, Sandra Evely Parada

Instituto Politécnico, Universidad Industrial de Santander

jagubal07@hotmail.com, sanevepa@uis.edu.co

En este documento compartiremos resultados parciales de una investigación que tiene por objetivo caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente. Para dicha investigación se desarrolla una serie de talleres fundamentados en una dimensión histórico-epistemológica para el estudio de la trigonometría. Según Guacaneme (2016), existen tres formas de intervención de la historia como recurso didáctico: para usar, para integrar o para permear la enseñanza. Para ello, se diseñaron un conjunto de talleres para el estudio de la trigonometría con estudiantes de décimo grado de un colegio de Bucaramanga. Se describe la estructura didáctica lograda para el diseño de los talleres que componen la secuencia y se presenta uno de los diseños.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La trigonometría cuenta con una fuente muy rica de situaciones, escenarios y episodios de la historia que pueden ser utilizados como recursos didácticos para su enseñanza y aprendizaje. Así, valdría la pena recuperar de la historia de la trigonometría problemas con soluciones simples pero brillantes, ideas geniales y momentos para problematizar su estudio en clase. Algunos autores han identificado algunas dificultades en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. Moore (citado por Fernández, Ruíz y Rico, 2016), Lakatos (citado por Maza, 1994) y Nolla (citado por Gonzáles, 2004) mencionan, entre otras, que:

a) Se desconoce la conexión de la trigonometría con la realidad.

b) Se presentan modelos gráficos imprecisos para los objetos de la trigonometría.

Gutiérrez, J. y Parada, S. (2019). Estructura didáctica basada en el componente histórico-epistemológico: el caso de la razón geométrica. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 167-175). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

c) Se utilizan muy poco las tecnologías digitales.

d) La actividad del aula desfavorece la actitud crítica.

e) El currículo desaprovecha su contenido histórico y epistemológico.

Ante esta problemática, en la investigación que aquí se reporta se pretende responder la siguiente pregunta: ¿cómo el desarrollo de un conjunto de talleres, fundamentados y orientados desde una dimensión histórico-epistemológica favorecen la formación de un ciudadano matemáticamente competente?

MARCO CONCEPTUAL

Ser matemáticamente competente en el marco de los estándares nacionales (MEN, 2006) significa cumplir cada una de las siguientes características: formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas; utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios para validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración; dominar procedimientos y algoritmos matemáticos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

Dado que un objetivo importante de la propuesta es el diseño de talleres en las que se rescaten los aspectos histórico-epistemológicos, asumimos como referente el trabajo de Guacaneme (2016) en el cual se reconoce a la Historia de la Matemática como un recurso didáctico fundamental tanto en la formación de profesores como en la puesta en escena en el aula. Este enfoque se ha conceptualizado de tres formas distintas: i) la Historia de las Matemáticas como uso: en este sentido, se pueden incluir por ejemplo anécdotas o referencias históricas a obras matemáticas o matemáticos. ii) La Historia de las Matemáticas como integración: Guacaneme, menciona que es una manera de aludir no solo al uso de la Historia de las Matemáticas, sino a una enseñanza efectiva de las Matemáticas y de la Historia de las Matemáticas a través de esta. iii) La Historia de las Matemáticas para permear la enseñanza: se cumple cuando se emplea información histórica como criterio orientador en la estructuración de una propuesta curricular.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

La investigación de aula, que aquí se reporta, sigue una metodología meramente cualitativa, estructurada en las siguientes fases de trabajo:

Fase 1. Sistematización de literatura de corte histórico y epistemológico

En esta fase se realizó la recopilación y sistematización de los documentos fuente de conocimientos históricos y epistemológicos de la trigonometría.

Fase 2. Diseño de la secuencia de talleres

Es precisamente de esta etapa que presentaremos los primeros resultados. Después de recopilar y sistematizar documentos con aportes históricos y epistemológicos, se logró consolidar una estructura que permanece invariante en cada uno de los talleres para la intervención en el aula. Los elementos que hacen parte de la estructura son los siguientes:

- Indicadores de logro: Para cada taller, se definen tres indicadores de logro que apuntan a la formación de un ciudadano matemático competente (MEN, 2006), uno por cada dimensión; el saber-saber, el saber- hacer y el saber-ser.

- Preguntas orientadoras: Las preguntas aluden a hechos históricos, biografías, problemas que se eligen en función del objeto matemático de estudio de clase.

- ¿Qué sabemos de? Esta actividad puede realizarse de forma escrita u oral, en la que se plantean una serie de situaciones o preguntas que permiten valorar presaberes del objeto matemático a tratar en la clase.

- Recurriendo a la Historia: Para la elaboración de este apartado, inicialmente se selecciona el objeto matemático de estudio. Luego se hace una selección previa de la literatura y de recopilación de material bibliográfico y de elementos audiovisuales (didácticos) que pueden enriquecer el estudio de dicho objeto matemático desde un enfoque histórico-epistemológico.

- Haciendo en contexto: Planteamiento de situaciones que muestren conexión directa con la realidad (con la cotidianidad), con el entorno (con la tecnología), o dentro de la misma matemática, y que hagan uso o aplicación del objeto de estudio de interés.

- Desarrollo conceptual: Construcción guiada del concepto para reconocer sus elementos esenciales tales como propiedades, características, relaciones, conexiones, representaciones, contenidos, extensiones, definiciones, etc.

- Matematicomanía: Diseñada para la ejercitación y aplicación de los conceptos adquiridos mediante las actividades anteriores, se pretende clarificar, afianzar y desarrollar habilidades de pensamiento, mediante la formulación de preguntas que exijan la comprensión de los conceptos y de los procedimientos asociados.

- ¿Qué aprendimos de? Proceso de valoración del aprendizaje mediante la observación, registro, recolección, organización, revisión y análisis de toda la información relacionada con cada uno de los distintos aspectos asociados con el desempeño, el desarrollo y evolución del estudiante en los diferentes saberes en las que se describen las competencias (saber-saber, saber-hacer, saber-ser).

- Para profundizar: En este apartado se agregarán las referencias bibliográficas de los textos usados como apoyo en el diseño del taller y se ofrecerá una bibliografía complementaría para los estudiantes que estén interesados en profundizar en los temas presentados.

Fase 3. Intervención en el Aula

En esta fase se implementó la secuencia de talleres. Se realizó durante aproximadamente tres meses. Para ello, se disponía de cuatro horas semanales de clase (distribuidas en dos bloques de dos horas).

Fase 4. Análisis de la información

La finalidad de esta fase consiste en analizar los resultados con el fin de alcanzar los objetivos propuestos de la investigación. Actualmente, la investigación se encuentra en esta fase.

Estudio de la razón geométrica desde su componente histórico-epistemológico

En este apartado describiremos el taller diseñado para el estudio de la razón geométrica, siguiendo la estructura descrita en la Fase 2 del apartado anterior. Para dicho taller se plantearon los siguientes **Indicadores de logro**:

I. Interpreta como un número, como un porcentaje o como una razón geométrica a la cantidad que surge de la comparación por cociente de las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo.
II. Resuelve problemas sobre la cotidianidad aplicando el concepto de razón geométrica construido mediante el recurso histórico.
III. Reconoce el valor que ofrece el estudio de problemas históricos para indagar sobre la realidad, para entender el carácter científico del conocimiento matemático y para establecer la relación entre los modelos abstractos de la matemática y las situaciones de contexto.

Previo a la clase, se plantean a los estudiantes unas **Preguntas orientadoras**, con el fin de que consulten y lleguen a la clase con algunas ideas que permitan introducir al tema. Para esta sesión se plantearon las siguientes preguntas: ¿Quién fue Tales de Mileto? ¿Cuál era el pensamiento filosófico de Tales? ¿Por qué le dio gran importancia al agua? Encuentre e interprete algunas frases célebres de Tales, él asombró a los egipcios midiendo la altura de las pirámides sin tener que subirse a ellas y solo usando la longitud de la sombra ¿Cómo lo hizo? ¿Cómo identificó Tales el concepto de razón geométrica para medir la altura de la gran pirámide? ¿Cómo puede explicar que Tales hizo un proceso de abstracción matemático para calcular la altura de la gran pirámide?

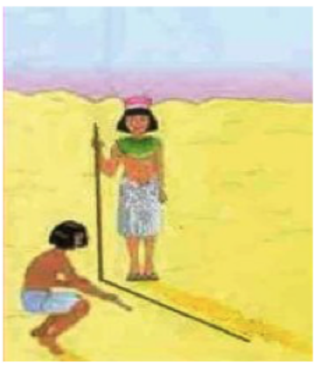
Para iniciar la clase, se socializan las respuestas que los estudiantes traen de las preguntas orientadoras. Esto permite que se dé una discusión interesante y a partir de allí se valore **Qué saben de** la razón geométrica. Para ello, se plantean preguntas como: Juan Sebastián afirma que si al amplificar una fotografía de 4 cm $\times$ 7 cm se aumenta el ancho a 10 cm, entonces el largo se aumenta a 13 cm. Miguel le dice que no está de acuerdo pero que no sabe cómo explicarlo. ¿Cómo puede usted ayudarle a Miguel a explicar o, si está de acuerdo con Juan Sebastián, cómo confirma su afirmación?

Luego se pasa al apartado **Recurriendo a la historia**; en él se incluye un episodio de la historia en el que el personaje principal es Tales de Mileto; en el episodio se requiere introducir lo que es la razón geométrica (ver Figura 1). El objeto de la tarea es analizar la razón geométrica que, para

Tales surge del proceso de abstracción que hizo para resolver un problema real. Aquí el uso de la historia funge como uso y como integrador, de acuerdo con Guacaneme (2016). Como uso porque presenta un episodio histórico y, como integrador, porque muestra el posible origen de los conceptos de razón geométrica y proporción, y su uso para encontrar, de manera indirecta, una medida. La situación descrita puede facilitar la comprensión de dichos conceptos.

Recurriendo a la Historia Tales y la pirámide

Cuenta la leyenda relatada por Plutarco que Tales de Mileto, uno de los llamados siete sabios de Grecia, durante uno de sus viajes a Egipto se encontró cierto día visitando la Necrópolis con el joven e inquieto Rey de Egipto, quien deslumbrado por la fama y sabiduría de Tales le preguntó si podía medir la altura de la majestuosa pirámide de Keops que se levantaba ante ellos.



Era por la mañana, muy temprano, y acababa de salir el sol por el horizonte. Es sabido que a esa hora las sombras que las personas y los objetos proyectan son muy largas, luego se acortan a medida que avanza el día, sobre todo al mediodía, y ya por la tarde empiezan de nuevo a alargarse. Ante la pregunta del Rey, Tales reflexionó unos instantes y le contestó que no solo la calcularía, sino que incluso la mediría sin ayuda de ningún instrumento. Dicho esto, tomó dos bastones de igual longitud (también pueden ser distintos, e incluso con uno solo es posible), colocó uno en posición vertical y el otro en horizontal, y se puso a esperar. Como todavía era muy pronto, la sombra proyectada por el bastón vertical superaba con mucho la longitud del bastón horizontal, pero a medida que avanzaba el día esa sombra se fue acortando. Cuando su longitud se hizo igual que la del bastón apoyado en la arena, Tales le dijo al Rey: "Ahora ya es muy fácil conocer la altura de la pirámide". ¿Por qué?

Figura 1. Adaptación del problema de Tales y la Pirámide.

Fuente: https://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2013/01/14/la-altura-de-la-piramide-de-keops-y-el-teorema-de-tales/

Posteriormente, para **Hacer en contexto**, proponemos la siguiente situación en un día soleado y en un espacio descubierto del colegio: trabajando en grupos de tres estudiantes, uno sostiene una vara delgada de un metro de longitud en posición vertical mientras otro estudiante mide la longitud de su sombra. El tercer estudiante registra las medidas, luego con esos datos se les pide construir en el papel y a escala el objeto geométrico (triángulo rectángulo) resultante de esta experiencia. Ahora se les formula dos preguntas: ¿Cuál es el cociente entre la medida de la longitud del objeto y la medida de la longitud de la sombra? Si se esperan 15 minutos y repetimos, para el mismo objeto, la medición de la longitud de su sombra y se calcula nuevamente el cociente, ¿obtendremos la misma razón? Justifique su respuesta.

La siguiente tarea se propone para **Matematicomanía;** se basa en el episodio histórico de Eratóstenes y la medición de la circunferencia de la Tierra.

Matematicomanía

Eratóstenes midió la circunferencia de la tierra en el año 240 a. C., basándose en su curvatura. Siendo Director de la Biblioteca de Alejandría, encontró en un papiro que en Siena (Egipto), el día del solsticio de verano (21 de junio), los rayos del sol caían perpendicularmente a las 12:00 am (una vara vertical en Siena no produce sombra). Sin embargo, ese mismo día, a la misma hora en Alejandría (Egipto) situada 5000 estadios (unidad egipcia de longitud) al Norte (sobre el mismo meridiano), los rayos solares caían con un ángulo de inclinación (una vara vertical en Alejandría produce sombra) de 7,2° respecto de la vertical. Este ángulo es exactamente el mismo ángulo que se forma en el centro de la tierra si se prolongan las dos varas hacia dicho punto. (Ver Figura 2). Con esta información y aplicando el concepto de razón geométrica, responde: ¿Cuántos estadios en la superficie de la Tierra se tienen por cada grado sexagesimal en el centro de la Tierra? Calculen la longitud de la circunferencia de la tierra en Km. (Consulta en Internet la equivalencia entre Km y Estadios egipcios).

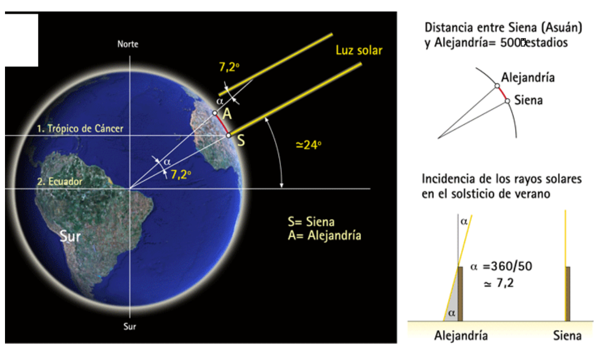


Figura 2. Representación del problema de Eratóstenes.

Fuente: https://ocw.unican.es/mod/book/view.php?id=955&chapterid=122

La penúltima actividad, **¿Qué aprendimos?** Plantea el siguiente problema: la sombra de un árbol mide 9 m a la misma hora que la sombra de una vara de 1 m de altura mide 1.5 m. Construya una gráfica a escala (representación geométrica) del problema. Halle la altura del árbol. ¿Cuál será la altura de otro árbol que a la misma hora produzca una sombra de 12 m? ¿Serviría está misma razón para hallar la altura de los árboles a otra hora distinta? ¿Por qué?

Para finalizar, se presenta el apartado **Para profundizar**, en el que se dan unas ligas a blogs y páginas web donde se encuentra información para profundizar en la temática presentada.

APORTES Y PERTINENCIA

La estructura de los talleres que se presentan en esta investigación se considera un aporte al campo de la educación matemática. Tanto la estructura como las tareas son originales; su fundamentación teórica hace uso de la didáctica, de la historia, la filosofía y la epistemología de la matemática.

Después de experimentar con este enfoque por muchos años y con distintas generaciones de estudiantes por dos años consecutivos (décimo y undécimo) de la media vocacional, se ha podido observar en ellos algunos cambios de conducta importantes en su manera de pensar y de actuar; aprenden a escuchar, desarrollan pensamiento crítico, elevan su autoestima, enriquecen su cultura, adquieren una visión más profunda del conocimiento, tienden a autoevaluarse, obtienen mejor comprensión de los conceptos, entienden la conexión de la matemática con otras ciencias. Estos son elementos que parecen reflejar el influjo de la propuesta.

El enfoque y el contenido de la experiencia de aula que se está compartiendo en este documento, muestran cómo favorecer el aprendizaje de la trigonometría. A través del recorrido histórico se da significado y uso a nociones básicas de la geometría como: ángulo, triángulo rectángulo, semejanza de triángulos y razón geométrica.

REFERENCIAS

De la Puente, F. (s. f.). *Cálculo de la esfera terrestre por Eratóstenes*. Recuperado de https://ocw.unican.es/mod/book/view.php?id=955&chapterid=122

Fernández, E., Ruíz, J. y Rico, L. (2016). Significado Escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las Ciencias, 34.3*, 51-71.

Gonzáles, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 45*, 17-28.

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

La altura de la pirámide de Keops y el teorema de Tales (14 de enero de 2013). Recuperado de https://eltrasterodepalacio.wordpress.com/2013/01/14/la-altura-de-la-piramide-de-keops-y-el-teorema-de-tales/

Maza, C (1994). Historia de las matemáticas y su enseñanza: un análisis. *SUMA. Revista sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 17*, 17-26.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Autor.

En búsqueda de la argumentación: una mirada a la clase de geometría

Carolina Hernández, **Laura Velásquez**, **Camilo Sua**
Universidad Pedagógica Nacional
dma_achernandezr599@pedagogica.edu.co, dma_llvelasquezj780@pedagogica.edu.co, jcsuaf@pedagogica.edu.co

Presentamos el avance de un estudio realizado en dos colegios de Bogotá, con el fin de analizar la interacción que sostienen el profesor y los estudiantes en una clase de geometría, enfocándonos en la naturaleza de los argumentos que circulan en esta interacción y en la participación de cada individuo. El ejercicio tiene la intención de determinar la correspondencia que hay entre lo que sugieren algunos referentes teóricos, en torno a cómo deben ser las acciones del profesor para fomentar las participaciones en las que se evidencien argumentos y la realidad de las clases.

Introducción

Recientemente se han considerado las participaciones orales de los estudiantes como elemento fundamental para el aprendizaje de las matemáticas. Esto es corroborado por Sfard (2008), quien afirma que las matemáticas se conceptualizan a través del discurso, de tal manera que cuando se investiga sobre el aprendizaje, se debe conocer cómo modifican los estudiantes sus acciones discursivas. En los estándares del NCTM (citados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998), se sugiere también, que:

> Las clases deberían caracterizarse por las conversaciones sobre las matemáticas entre los estudiantes y entre éstos y el profesor. Para que los profesores maximicen la comunicación con y entre los estudiantes, deberían minimizar la cantidad de tiempo que ellos mismos dominan las discusiones en el salón de clase (p. 74).

Además de la importancia dada al desarrollo de un discurso por parte de los estudiantes, también es fundamental prepararlos para atender a las demandas que la sociedad impone, incluyendo entre

Hernández, C., Velásquez, L. y Sua, C. (2019). En búsqueda de la argumentación: una mirada a la clase de geometría. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 177-185). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

estas la capacidad de ser críticos y reflexivos (Flores, Gómez, y Flores, 2010). Para estos mismos autores es posible alcanzar estas capacidades a partir de la argumentación matemática. La geometría es considerada como una herramienta que permite interpretar y entender el mundo espacial; por tanto, es una fuente de modelación con la que es posible fomentar la argumentación y promover interacciones en torno a modelos y figuras sobre los cuales es posible discutir (Ministerio de Educación Nacional, 1998). La argumentación en la clase y las discusiones que puedan surgir alrededor de esta se logran a partir del uso de “argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos” (p. 17) , así como a través de la validación o rechazo de conjeturas, lo cual favorecen acciones como probar, refutar, dar o pedir razones (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

A partir de lo anterior, se esperaría que los estudiantes tengan un rol más activo en las clases de geometría. Sin embargo, en nuestra experiencia de práctica inicial en la Licenciatura en Matemáticas, en la que se hicieron observaciones sistemáticas de clases de distintos profesores en diversas instituciones en contextos cotidianos, se constató que muchas clases de matemáticas se caracterizan por ser dirigidas por un profesor quien imparte el conocimiento de manera magistral, muchas veces de forma algorítmica, mientras que los estudiantes juegan un rol pasivo, en el que las posibilidades de participación son limitadas. Bajo la panorámica anterior nos cuestionamos por la realidad de lo que ocurre en las clases.

En este documento presentamos algunos resultados derivados de la observación de dos clases de geometría a cargo de dos profesores distintos. En esta vía se han realizado algunos ejercicios analíticos que permiten reconocer la naturaleza del discurso y la argumentación, así como la relación entre ellos. Buscamos con ello reconocer si realmente en una clase de geometría circulan ideas argumentadas sobre los objetos matemáticos involucrados, como lo sugieren algunos referentes teóricos al respecto, y si estas son auténticas.

MARCO TEÓRICO

A continuación, presentamos dos referentes teóricos en los que se enmarca este estudio; la propuesta de Harel y Sowder para analizar los tipos de argumentos y la propuesta de Goffman para estudiar la autenticidad en las participaciones.

ESQUEMAS DE ARGUMENTACIÓN

Harel y Sowder (1998) caracterizan los argumentos que se evidencian en las interacciones en clase. Esta clasificación surgió a partir de un estudio realizado con estudiantes de carreras afines a las matemáticas, lo cual permitió a los autores describir l6 subcategorías, agrupadas en tres esquemas de argumentación denominados: convicción externa, empíricos y analíticos. Cada categoría corresponde a un fenómeno evidenciado reiteradamente en varios experimentos empíricos de enseñanza. Flores (2007), quien adopta esta propuesta, define los esquemas de argumentación como todo aquello que utiliza una persona para convencer a otra y a sí misma sobre la verdad o falsedad de algún hecho matemático.

Esquema de argumentación de convicción externa

- Autoritario (CE-A): se caracteriza por sustentar declaraciones mediante agentes externos como libros o individuos sobre los que su veracidad no se cuestiona.

- Ritual (CE-R): se caracteriza por sustentar declaraciones a partir de la apariencia o la forma que determinada comunidad adopta para presentar este tipo de declaraciones, algunas veces sin tener en cuenta el contenido.

- Simbólico (CE-S): se caracteriza por sustentar declaraciones mediante el uso de símbolos, de los cuales no se tiene consciencia o no se tiene en cuenta su significado.

Esquema de argumentación empírica

- Perceptual (E-P): se caracteriza por sustentar declaraciones en imágenes mentales prototípicas que no necesariamente exhiben un pensamiento deductivo.

- Inductivo (E-I): se caracteriza por involucrar algunos ejemplos como sustento de alguna declaración.

- Ejemplo y contraejemplo (E-EC): se caracteriza por sustentar declaraciones a partir de las inferencias que se hacen al observar múltiples casos en los que se cumple una condición y casos en los que no.

Esquema de argumentación analítica

- Transformacional (A-T): se caracteriza por involucrar objetos que sufren transformaciones con un fin específico. Esto incluye una anticipación de los resultados.
- Axiomático (A-A): se caracteriza por sustentar declaraciones con base en justificaciones apoyadas en una cadena lógica deductiva, en la que se hace uso de un sistema axiomático de referencia establecido previamente.

ANÁLISIS DE LA PARTICIPACIÓN SEGÚN LA ORIGINALIDAD

Para hacer un análisis de la participación de los estudiantes tomamos la propuesta de Goffman (1981, citado en Krummheuer, 2015, p. 7) quien hace una clasificación de las declaraciones, según la originalidad y la responsabilidad de quien las presente, en términos de su sintaxis y semántica.

Categorías	Características de la participación
Autor	La persona es completamente responsable de la sintaxis y semántica de su participación; es decir, expresa su propia idea con sus propias palabras.
Trasmisor	La persona no es responsable ni de la sintaxis ni de la semántica de su expresión; es decir, que en su participación no hay originalidad en las ideas, ni en las palabras que usa.
Fantasma	La persona es responsable de la semántica, pero no de la sintaxis de la expresión; es decir, si se formula una idea propia con apoyo de una expresión conformada a partir de participaciones anteriores.
Portavoz	La persona parafrasea alguna idea de otra persona, por tanto, no es responsable de la semántica, pero sí de la sintaxis de la participación.

Tabla 1. Análisis de la participación según la originalidad

DISEÑO METODOLÓGICO

Este estudio se deriva del proyecto “Voces de los estudiantes en la clase de geometría” realizado por el equipo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$). Aun cuando el proyecto de investigación ya contaba con una revisión de literatura sobre aspectos metodológicos, conceptuales y algunos antecedentes, emprendimos una búsqueda adicional de referentes, en atención a los aspectos que configuran el marco teórico, así como antecedentes investigativos relacionados con nuestro asunto de interés. Luego, tomamos las trascripciones de cuatro clases de geometría, dos del grado sexto del colegio Instituto Pedagógico Nacional (IPN) y dos del grado séptimo del colegio Calasanz, ambos ubicados en Bogotá, que nos fueron provistas por el grupo de investigación (*Æ · G*). Estas transcripciones fueron fragmentadas por episodios en atención al aspecto del objeto matemático que en cada una se involucraba. Cada clase permitió identificar en promedio siete episodios; en cada uno, las intervenciones de los miembros de la clase fueron analizados en función a los referentes conceptuales abordados en este documento.

AVANCES DEL ESTUDIO

Hasta la fecha hemos avanzado en el análisis de las cuatro clases. En la ponencia presentaremos dos ejemplos, uno de colegio IPN y otro del colegio Calasanz. En cada ejemplo mostraremos el análisis de dos intervenciones en las que se evidencian argumentos; las primeras expresiones de ambos ejemplos se categorizan como de la autoría del estudiante que las presentan, mientras que las ideas de los segundos estudiantes son un parafraseo de las ideas anteriores. Todas las intervenciones se consideran esquemas de argumentación, a partir de la definición de Flores (2007), puesto que un estudiante intenta convencer o persuadir a otro de alguna idea.

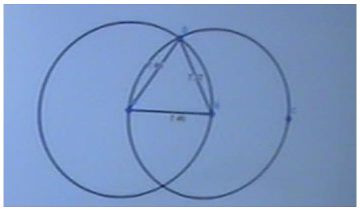
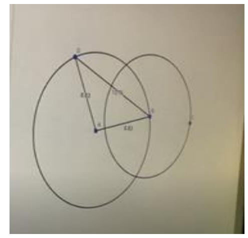
	

Figura 1. Construcción inicial de Camila Fuente: Elaboración propia.	**Figura 2.** Construcción de Camila luego del arrastre. Fuente: Elaboración propia.

En el IPN se analizó una clase de grado sexto. El objetivo principal de la clase era construir un triángulo isósceles y un triángulo equilátero con el software GeoGebra, con la condición de que fueran invariantes en el arrastre. Para ello, al iniciar la clase el profesor repasó conceptos como definición de circunferencia, equidistancia, triangulo isósceles y triángulo equilátero, vistos en clases anteriores. Para la construcción del triángulo isósceles, primero se hizo un trabajo por grupos y luego se socializaron algunas construcciones, entre ellas la de Camila (Figura 1), la cual consistió en construir una circunferencia con centro en A radio AB, y otra circunferencia con centro en B y radio BC, de tal manera que parecía que la segunda circunferencia contenía el centro de la primera, de manera similar a la construcción de un triángulo equilátero. La mayoría de los estudiantes estuvieron de acuerdo con la construcción, así que el profesor solicitó arrastrar los vértices para verificar si las propiedades eran invariantes, y en efecto el triángulo seguía siendo isósceles (Figura 2). A pesar de esto, Gabriela refutó afirmando que: “me parece que es muy innecesario el otro círculo, porque si lo necesitara sería para hacer un triángulo equilátero”. Algunos estudiantes apoyaron la idea de Camila, entre ellos Santiago, quien afirmó: “A ver. En el trabajito no decía que, que no se pudieran usar cualquier herramienta; y, pues (…) cualquier herramienta; ella en este caso usó dos círculos”.

La intervención de Santiago deja ver un esquema de argumento que se apoya en el enunciado de la tarea, con lo cual intenta convencer a algunos de sus compañeros que en la actividad no hay restricciones en el uso de las herramientas, siempre y cuando se cumpla con el objetivo. Es por lo que esta intervención se clasifica como esquema de argumentación por *convicción externa autoritario* (CE-A). Como Santiago es el primer estudiante en presentar esta idea se considera que es de su *autoría*. Posteriormente, una estudiante (María José) participó, apoyando la construcción de Camila: “Sí, porque se puede hacer de diferentes formas”.

Esta intervención recoge la idea de Santiago, en la que también se presenta un esquema de argumentación CE-A debido a que se basa en la autoridad de la tarea propuesta, en la que no se especifica la metodología para desarrollarla, con la intención de persuadir a sus demás compañeros de la validez de la construcción de Camila. A pesar de esto, la idea no es de su autoría ya que no hay autenticidad en la semántica, pero sí en la sintaxis, siendo ella *portavoz* de dicho argumento.

La clase del Calasanz giró en torno al tema de la semejanza entre polígonos. En ella, los estudiantes propusieron varios ejemplos de pares de figuras y por medio de las participaciones se determinó qué figuras eran semejantes. Uno de los ejemplos propuestos por el profesor consistió en dos cuadriláteros que a primera vista parecían semejantes. A partir del ejemplo se generó una discusión con el fin determinar si las figuras en efecto eran semejantes. Los estudiantes afirmaron que los ángulos correspondientes en ambas figuras eran congruentes, aunque las figuras tuvieran diferente tamaño. Luego, la discusión se centró en cómo corroborar que las razones entre las longitudes de los segmentos correspondientes en ambas figuras eran iguales. En medio de esta discusión, un estudiante argumentó que existe una relación entre los segmentos correspondientes:

> Johan: Pues (…) yo lo que entiendo es que cuando (…) sin la necesidad de (…) la herramienta, o sea, no debes hacer el cálculo. Digamos, tú ya sabes que esta arista [repisa en la figura más pequeña uno de los lados], tú ya sabes que acá, por decirlo así, está duplicada [repisa un lado de la otra figura] entre un número, y para eso sirve la homotecia.

En la expresión del estudiante se observa un esquema de argumentación *empírico perceptual* dado que intenta convencer a sus compañeros que se puede corroborar que dos figuras son semejantes sin hacer uso de herramientas, solo basta observar que la longitud de los segmentos se duplica, como se hace en la homotecia, y eso lo sustenta a partir de la imagen proyectada. La participación de este estudiante se cataloga como *autor*, dado que es original en su sintaxis y semántica, pues hasta el momento no se había mencionado la palabra homotecia. Posteriormente, el profesor pregunta por qué se puede asegurar que los ángulos correspondientes en ambas figuras son congruentes, a lo que un estudiante responde de la siguiente manera: “Juan José: Para que le quede exacta, se debió haber usado la homotecia”.

En la intervención de Juan José se reconoce un esquema de argumentación *analítico transformacional* dado que él afirma que es posible validar que los ángulos correspondientes de las figuras presentadas son congruentes al emplear la homotecia, es decir que el estudiante está anticipando el resultado de aplicar esta transformación. Con esta idea quiere convencer a sus compañeros del uso de la homotecia Por otro lado, su participación es de *portavoz* dado que se apoya en la idea de Johan sobre el uso de la homotecia, pero la forma de presentar su idea cambia.

INQUIETUDES Y CONCLUSIONES

A partir del análisis de las trascripciones encontramos pertinente hacer dos modificaciones respecto al marco teórico propuesto. En cuanto a los esquemas de argumentación, fue necesario incorporar un nuevo esquema: El esquema Fáctico. Esta categoría ya había sido expresada por Flores (2007), quien también adoptó la teoría de Harel y Sowder (1998) para su estudio; sin embargo, este autor observó esquemas de argumentación que no se ajustaban al marco teórico empleado, por lo que vio la necesidad de incorporar un esquema denominado fáctico, el cuál atiende a la siguiente definición: se presenta cuando se hace un recuento de lo que hizo o se repiten los hechos evidentes de una situación a manera de explicación o justificación de algún resultado; a menudo, el profesor expone una serie de pasos como si fueran un algoritmo (Flores, 2007).

El ejercicio analítico se ha realizado en gran medida a la fecha y los resultados parciales nos han hecho cuestionar sobre la naturaleza de las clases de geometría, específicamente las intervenciones que en estas tienen presencia. Hasta el momento se ha evidenciado que, aunque se pueden presentar situaciones en las que el profesor promueve el discurso y los estudiantes participan, esto no necesariamente implica la presencia de esquemas de argumentación. Cuando estos tienen lugar, muchos de ellos son apenas una repetición de las ideas expuestas inicialmente por un estudiante, dado que asumen una figura de portavoz o trasmisor. Por lo tanto, lo que se pensaría son clases que se ajustan a lo declarado en los referentes curriculares colombianos y en la literatura especializada sobre la argumentación y la participación, puede ser apenas una imagen superficial distinta a la realidad de la clase.

Además del análisis de la autenticidad de la participación y los esquemas de argumentación, en nuestro trabajo de grado se profundiza en la relación de estos aspectos con el tipo de preguntas o expresiones que promueven las interacciones discursivas en la clase. A través de este estudio se quiere hacer una invitación a los profesores de matemáticas a reflexionar sobre cómo es la participación de los estudiantes en sus clases y si esta fomenta ideas argumentadas auténticas.

Consideramos que a partir de los resultados obtenidos podría darse inicio al estudio de la gestión del profesor en pro de favorecer en la clase de geometría participaciones argumentadas y expresiones de los estudiantes en las que ellos no sean apenas transmisores.

REFERENCIAS

Flores, C., Gómez, A. y Flores, H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de Geometría Dinámica. *Acta Scientiae*, *12*(2), 22-42.

Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *7*, 234-284.

Krummheuer, G. (2015). Methods for reconstructing processes of argumentation and participation in primary mathematics classroom interaction. *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*, 51-74. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. *Serie Lineamientos Curriculares*, 103.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia. Recuperado de https://doi.org/958-691-290-6

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Cali: Fondo Editorial Universidad del Valle.

LOS ESTUDIANTES CON SÍNDROME DE DOWN TAMBIÉN DEFINEN EN LA CLASE DE GEOMETRÍA

Oscar Hoyos, **Tania Plazas**

Universidad Pedagógica Nacional

odhoyosg@upn.edu.co, tplazas@pedagogica.edu.co

Presentamos los avances de un trabajo investigativo en el marco de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional. Mostramos el primer análisis de un diálogo entre el entrevistador y un estudiante con síndrome de Down, cuando este resuelve una tarea que promueve el proceso de definir. Pretendemos identificar el tipo de relación entre la imagen conceptual y el significado del concepto que posee este estudiante en torno a los cuadriláteros. Utilizamos la entrevista basada en tareas como estrategia investigativa para tener un diálogo con el estudiante mientras resuelve la tarea. Exponemos las reflexiones y acciones investigativas a seguir, las cuales se derivan de esta primera mirada a la información recolectada hasta el momento.

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones relacionadas con el desarrollo de procesos de la actividad matemática, con población en condición de discapacidad cognitiva son escasas. Por ejemplo, los autores Bruno y Noda (2010) y Sinclair y Yerushlami (2016) afirman que los estudios relacionados con los procesos de la actividad matemática con dicha población se han dedicado a estudiar la forma en que los participantes realizan operaciones aritméticas. Hassan, Fernandes y Healy (2014), se enfocan en la conceptualización de expresiones algebraicas de estudiantes sordos; Ma et al. (2014), indagan por los efectos de un sistema tutorial para la resolución de problemas en estudiantes con discapacidad cognitiva; Quintero y Rojas (2008), realizaron un experimento de enseñanza sobre la clasificación de triángulos a estudiantes con síndrome de Down; y Acevedo (2010) realizó una investigación sobre la influencia del videojuego Tetris, para desarrollar procesos de visualización de estudiantes con dificultades cognitivas.

Hoyos, O. y Plazas, T. (2019). Los estudiantes con síndrome de Down también definen en la clase de geometría. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 187-195). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Por otro lado, la ley colombiana exige que todos los colegios del país a partir del año 2019 garanticen la igualdad de condiciones, para que cualquier persona pueda aprender. Este hecho da pertinencia a la investigación, dado que en el contexto donde se desarrolla la misma, los estudiantes que tienen algún tipo de discapacidad cognitiva son apartados de las clases con tecnología digital de sus otros compañeros que no tienen discapacidad.

En esta ponencia exponemos adelantos de nuestro trabajo investigativo, el cual se preocupa por el proceso de definir que realizan los estudiantes con síndrome de Down, en una institución educativa de Bogotá.

REFERENTES TEÓRICOS

Síndrome de Down y aprendizaje

El síndrome de Down es un trastorno genético que genera una trisomía en el cromosoma 21. Esta característica afecta directamente las capacidades cognitivas de quien padece el síndrome, según lo menciona Basile (2008). En general, las personas con esta discapacidad procesan y organizan la información de forma más lenta que las personas neurotípicas. Esto es un claro indicio de que las personas con síndrome de Down tienen una discapacidad cognitiva que puede ser clasificada en leve, moderada, grave, profunda y no especificada. Como lo indican Bruno y Noda (2010), las personas con síndrome de Down tienen dificultades con la memoria secuencial para retener varias instrucciones en un orden específico, la cual es fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, esto no es un impedimento para que los estudiantes con dicho síndrome puedan aprender matemáticas. Los autores Bower y Hayes (1994), Buckley (1985), Marcell y Weeks (1988), (citados en Noda y Bruno, 2010) manifiestan que estos estudiantes aprenden más fácilmente presentándoles la información de distintas formas, es decir, utilizando recursos visuales, auditivos y sensoriales. Esta característica puede ser aprovechada para el desarrollo de los procesos cognitivos propios de la actividad matemática.

Proceso de definir

Según de Villiers (1994) la definición en matemáticas se concibe como un proceso en el que se establecen relaciones entre las propiedades de un objeto geométrico, que van más allá de escribir en una cadena de proposiciones las características de dicho objeto. Como lo señalan Aya y Echeverry (2009), estas relaciones se constituyen según el contenido teórico de la definición. Lo anterior no restringe que personas con síndrome de Down puedan construir sus propias definiciones acerca de un objeto matemático. La diferencia está en que este proceso se potencia según los alcances cognitivos de quien realice la definición.

Una definición, según lo que menciona Calvo (2001), es un enunciado verbal, concreto y consistente, el cual resalta las características más relevantes de un objeto geométrico, sin caer en contradicciones lógicas. El papel de las definiciones en geometría no se limita solo a clasificar los objetos que componen este campo (Vinner, 1991). Este permite la elaboración de proposiciones que generen relaciones entre propiedades del mismo objeto o familia de objetos. Por lo tanto, una definición matemática se caracteriza porque presenta los atributos relevantes de un objeto matemático y este está representado, como lo menciona Duval (1993), por un sistema semiótico.

Como lo plantean Tall y Vinner (1981), para entender cómo se relacionan el sistema semiótico y las proposiciones, primero se debe conocer la estructura cognitiva presente en los sujetos. Dicha estructura cognitiva se divide en dos celdas, las cuales llamamos *significado del concepto* e *imagen conceptual*. Como lo mencionan Tall y Vinner (1981), la primera de estas celdas constituye una proposición verbal evocada mentalmente por el sujeto, que puede ser un significado construido de forma personal o la definición formal aceptada por la comunidad matemática. La segunda celda corresponde a las diferentes representaciones no-verbales o imágenes relacionadas con el concepto; también puede ser personal o la representación visual del objeto matemático en una comunidad.

Por lo anterior, el grado de relación entre estas celdas muestra cómo el sujeto construye su definición y los alcances de esta, es decir, como puede relacionarse con otros objetos matemáticos (de Villiers, 1998). Estos alcances están fuertemente influenciados por la imagen conceptual dado que con ayuda de esta se puede "observar" de otra manera lo que el significado del concepto indica. Por ejemplo, una definición puede descartar al rombo como paralelogramo porque se considera que todos los ángulos del paralelogramo deben ser congruentes. Según lo mencionan Tall y Vinner (1981), para construir definiciones bien elaboradas, el significado del concepto debe acudir obligatoriamente a la imagen conceptual, ya que el proceso de definir debe darse a partir de la correlación entre las dos celdas.

Cuando un sujeto está envuelto en la resolución de una tarea, la información ingresa de forma verbal (significado del concepto) o no verbal (imagen conceptual); esto activa las celdas cognitivas, las cuales se pueden relacionar de las siguientes maneras (Tall y Vinner, 1981):

- **Interrelación de las celdas:** sin importar si la información ingresa de forma verbal o no-verbal, está activa inmediatamente la celda estimulada. Durante la resolución de la tarea, el sujeto es capaz de transformar la información entre las dos celdas por medio de sistemas semióticos y de símbolos. Sus respuestas a la tarea acuden a las dos celdas y son de tipo deductivo.

- **Deducción siguiendo un pensamiento intuitivo:** Al ingresar la información, el sujeto activa su imagen conceptual del objeto en cuestión. Logra activar la otra celda, pero su respuesta está influenciada por lo empírico debido a la representación del objeto.

- **Deducción formal:** La información ingresa y activa únicamente la celda de significado del concepto. Durante la resolución de la tarea solo acude a información verbal que permita dar respuestas de esta misma manera. No hay indicios de activación de la celda de imagen conceptual.

- **Respuesta intuitiva:** Cuando la información ingresa se activa la celda de imagen conceptual. Como su nombre lo indica, sus respuestas son a partir de lo observable sin realizar un razonamiento o análisis de la información suministrada. No hay indicios de que se active la otra celda cognitiva. Por lo general, las respuestas a las tareas ocurren casi de inmediato.

Estas relaciones descritas anteriormente guiaron el desarrollo de la estrategia investigativa, puesto que, como se verá más adelante, se busca que las tareas intenten estimular las dos celdas cognitivas para comprender como se desarrolla el proceso de definir en el estudiante con síndrome de Down.

Diseño metodológico

Nuestro trabajo investigativo adopta un enfoque fenomenológico, puesto que este se caracteriza por describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante. En dicho enfoque dirigimos el estudio hacia una aproximación interpretativa de las acciones y expresiones de los estudiantes, las cuales son utilizadas para comunicar ideas que les permita construir una definición sobre los objetos geométricos. La estrategia investigativa que más se ajusta al enfoque y a la aproximación investigativa es la entrevista basada en tareas. Como lo afirma Goldin (2000), esta consiste en realizar una indagación exhaustiva sobre los sucesos ocurridos cuando un grupo pequeño de estudiantes resuelve una tarea. Dicha estrategia obliga al investigador a sostener un diálogo con los participantes para interpretar lo que piensan al resolver cada tarea.

El análisis que se presenta a continuación está basado en lo que realiza el estudiante Juan Miguel, quien tiene 16 años y está diagnosticado con síndrome de Down, con clasificación de discapacidad cognitiva moderada. Su aprendizaje ha sido orientado a replicar procesos y procedimientos en todas las áreas; nunca se ha involucrado en procesos más allá de la reproducibilidad de una acción. Ha participado en clases de geometría dentro de la institución, pero su acercamiento a la tecnología digital ha sido escaso, a diferencia de sus otros compañeros que no presentan alguna discapacidad cognitiva. Decidimos abordar la clasificación de cuadriláteros como objeto matemático de estudio, puesto que fue una temática del curso inmediatamente anterior al que está actualmente.

Tareas propuestas

Con el fin de atender a todas las maneras sugeridas por Noda y Bruno (2010), para la presentación de la información a los estudiantes con síndrome de Down, propusimos cuatro tareas. Dos tareas están diseñadas para ser resueltas con tecnología digital y dos sin tecnología digital. Para la primera tarea con tecnología digital diseñamos un aplicativo en GeoGebra, que tiene como propósito que los participantes identifiquen las partes constitutivas de un cuadrilátero. Dicho aplicativo está diseñado de tal manera que al oprimir un botón llamado “nuevo” se generan, de manera aleatoria, ejemplos y no ejemplos de cuadriláteros. Con ayuda de dicho aplicativo se escogen tres figuras al azar, y se le solicita al estudiante que indique si dichas figuras son o no cuadriláteros. A continuación, mostramos una primera mirada analítica a un fragmento del diálogo entre el entrevistador y Juan Miguel, mientras él intenta describir si una figura es un cuadrilátero.

Primera mirada analítica

Dado que no escogimos una herramienta analítica preestablecida para hacer el análisis, realizamos una primera revisión al fragmento, con el propósito de identificar aquellos indicadores que muestren la activación de las celdas cognitivas y su posterior relación (Tall y Vinner, 1981).

1.	Entrevistador:	Mira esta figura, ¿es cuadrilátero? (Figura 1).
2.	Miguel:	No, no es.
3.	Entrevistador:	Dime, ¿por qué lo dices?
4.	Miguel:	(Señala la pantalla) Ese es un círculo.
5.	Entrevistador:	¿Qué es lo que quieres decir con eso?
6.	Miguel:	Tiene una parte de círculo.
7.	Entrevistador:	Muéstrame.
8.	Miguel:	Ese. (Señala la curva).
9.	Entrevistador:	¿Qué forma tiene "ese"?
10.	Miguel:	Círculo.
11.	Entrevistador:	¿Por qué piensas que es un círculo?
12.	Miguel:	(…) Aquí. (Recorre su dedo sobre la curva; figura 2)

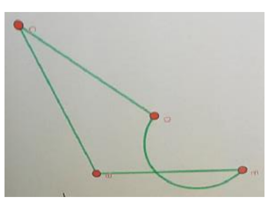
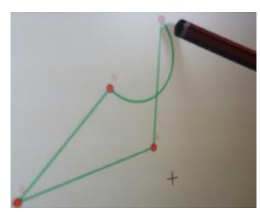
	

Figura 1. Figura obtenida aleatoriamente	**Figura 2.** Parte de la figura que señala Miguel

En un primer momento observamos como indicador **identificar**, puesto que Miguel reconoce los elementos que constituyen un cuadrilátero. Él señala que existe una curva en la figura que no hace parte de los cuadriláteros [2-6]. En este momento se hace visible que las dos celdas cognitivas se activan, puesto que Miguel genera una respuesta sobre su significado del concepto cuadrilátero. Sin embargo, esta respuesta está directamente influenciada por la representación gráfica en pantalla; esto se evidencia cuando Miguel indica cual parte no corresponde a la forma de un cuadrilátero [10 y 12]. Además de lo anterior, también se reconoce el indicador de **diferenciar**, ya que visualmente discrimina partes que no son constitutivas de un cuadrilátero [12]. En este sentido, interpretamos que en las respuestas que comunica Miguel, se relacionan sus celdas cognitivas para desarrollar el proceso de definir, mediante una deducción a partir del pensamiento intuitivo. Esto es evidente porque durante la entrevista, sus respuestas acuden a lo observable en todo momento [4, 6, 8, 10 y 12].

REFLEXIONES

Los indicadores establecidos en la revisión preliminar del diálogo presentado en el documento muestran que para poder realizar el análisis e identificar que ocurre cuando hay activación de las celdas cognitivas de los estudiantes con síndrome de Down, debemos ampliar nuestro marco de referencia. Por esta razón, decidimos buscar en la literatura más elementos que se puedan relacionar con dichas celdas cognitivas, y así construir una herramienta analítica para el análisis de la información que capturemos posteriormente. Además, observamos que los no-ejemplos potencian el proceso ya mencionado y, por lo tanto, es necesario resaltar la importancia de estos.

El diálogo que mostramos en este documento surge de la tercera versión del diseño original de la tarea. Los cambios que se han realizado se deben a situaciones no contempladas en el diseño. Por ejemplo, vimos la necesidad de aumentar el grosor de los objetos en pantalla, aumentar el tamaño de letra y señalar con colores distintivos los puntos, las rectas y las curvas. Todo esto, debido a problemas de visión que presenta Juan Miguel.

Esta tarea con tecnología digital permitió que Juan Miguel observara otro tipo de figuras no prototípicas que lo obligaron a activar su celda del significado del concepto. Sin el uso de la tecnología digital, este tipo de dinamismo no se puede dar y por ende no hay garantías de la activación de dicha celda. Dado lo anterior, pretendemos aplicar las tres tareas restantes y ver sus efectos en el proceso de definir, desde la misma mirada de las celdas cognitivas y las modificaciones que se hagan al marco conceptual.

REFERENCIAS

Aya, O. y Echeverry, A. (2009). *Geometría dinámica en el proceso de definir.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Acevedo, J. (2010). *Modificabilidad estructural cognitiva vs. visualización: un ejercicio de análisis del uso del tetris en tareas de rotación y traslación*. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Basile, H. (2008). Retraso mental y genética. Síndrome de Down. *Revista de Argentina de Clínica Neuropsiquiátrica*, *1*(15), 9-23.

Bruno, A. y Noda, A. (2010). Necesidades educativas especiales en matemáticas. El caso de personas con síndrome de Down. *Investigación En Educación Matemática XIV*, 141-162. Lleida: SEIEM.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e integral.* (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales.

De Villiers, M. (1994). The role and functions of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of Mathematics, 1*(14), 11-18.

Duval (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5*, 37-65.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En, A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Hassan, S., Fernandes, S. H. A. A. y Healy, L. (2014). Algebraic expressions of deaf students: Connecting visuo-gestural. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, 3, 49-56.

Quintero, A. y Rojas, T. (2008). *Introducción del concepto de triángulo a niños con syndrome de down.* (Tesis de pregrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Sinclair, N. y Yerushalmy, M. (2016). Digital technology in mathematics teaching and learning: A decade focused on theorizing and teaching. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 235-274). Rotterdam: Sense Publishers.

Ma, X., Xin, Y. P., Tzur, R., Si, L., Yang, X., Park, J. Y., Liu, J., y Ding, R. (2014). The effect of an intelligent tutor on math problem-solving of students with learning disabilities. *Proceeding of PME 38 and PME-NA 36*, *4*, 145-152.

Noda, A. y Bruno, A. (2010). Operaciones básicas en alumnos con síndrome de Down. *PNA*, *4*(4), 143-159.

Tall D., y Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematic*, *12*, 151-169.

Vinner, S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning. *Advanced Mathematical Thinking*, *5*, 65-81.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano

Isaac Lima
Universidad Nacional de La Plata – Universidad de Salamanca
isaacsito@gmail.com

Se presentan los avances de la investigación titulada "Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano", en el marco del Doctorado en Educación de la Universidad de Salamanca, planteada a partir de las limitaciones y perspectivas de la tesis doctoral en Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de La Plata "Desarrollo profesional del profesor de matemáticas: estudio de caso en el nivel medio de secundaria". Tiene como fin caracterizar el conocimiento del profesor en la enseñanza de las transformaciones en el plano y diseñar y gestionar una propuesta en la que este objeto matemático es el eje transversal del desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos.

Introducción y problema de investigación

A pesar de la valoración acerca de la importancia de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria y las propuestas curriculares que destacan la necesidad de desarrollar distintos pensamientos matemáticos, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la escuela aún se centra en el desarrollo del pensamiento y los sistemas numéricos (Chamorro, 2003). Estudios acerca de la práctica del profesor revelan una particularidad en el ejercicio de la enseñanza de la geometría (que a la vez se extiende a la probabilidad y la estadística): pareciera relegada al último renglón de algunos planes de estudio y diseños curriculares (Chamorro, 2003).

La enseñanza de la geometría se reduce, en algunos casos, a contenidos mínimos, mal coordinados con el resto de los aspectos matemáticos. Estos incluyen cuestiones de tipo aparentemente práctico, rodeandos definiciones y reglas memorísticas. Esa particularidad se destaca más en primaria, donde la enseñanza de las matemáticas, incluyendo la geometría, es realizada muchas veces por un

Lima, I. (2019). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de las transformaciones en el plano. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 197-204). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

profesor cuya formación inicial no ha sido específica en este campo del conocimiento (Chamorro, 2003).

Quizás el maestro no cuente con los suficientes elementos para proponer la enseñanza de la geometría como eje transversal en el desarrollo de los diferentes pensamientos matemáticos. Entonces, es necesario establecer estrategias para ubicar a la enseñanza de la geometría en un lugar central en la enseñanza de las matemáticas en primaria, y de ahí, proponerla como eje transversal en el desarrollo del pensamiento matemático. Consecuencia de lo anterior, surge la necesidad de indagar acerca del conocimiento del profesor, proponiendo como objeto matemático de estudio las transformaciones en el plano y el conocimiento que requiere el profesor de matemáticas para llevar a cabo su enseñanza.

Objetivos de la investigación

La investigación tiene como propósito indagar acerca del conocimiento especializado que manifiesta un maestro de primaria cuando enseña las transformaciones en el plano, y construye y gestiona una propuesta de enseñanza de las matemáticas cuyo eje transversal sea dicho objeto matemático. El propósito se expresa en tres objetivos:

- Describir, identificar y caracterizar el conocimiento especializado que manifiesta un maestro de primaria al enseñar las transformaciones en el plano.

- Caracterizar qué elementos del currículo de matemáticas se pueden abarcar a partir de la enseñanza de las transformaciones en el plano.

- Identificar qué componentes del conocimiento matemático especializado se caracterizan cuando se construye y gestiona, consecuencia de la reflexión sobre la práctica y de manera colaborativa, una propuesta para la enseñanza de las matemáticas a partir del estudio de las transformaciones en el plano.

Avances del estudio

Esta investigación pretende centrarse en uno de los protagonistas de la actividad en el aula, el maestro, buscando profundizar en el conocimiento matemático y didáctico que pone en juego en la enseñanza. Por las características del tema y porque el medio natural es un entorno privilegiado para el estudio de individuos, es pertinente abordar los objetivos a través de un estudio de caso colaborativo (Lima, 2019) que permita la descripción y caracterización del conocimiento especializado que manifiesta el profesor en su tarea de enseñanza.

Analizar las prácticas de un maestro implica involucrarse en un proceso de colaboración entre docente e investigadores, lo cual conlleva a reconocer el saber del docente para enfrentar la enseñanza que será objeto de análisis en la colaboración, asumir que el educador tiene razones para actuar como lo hace, considerar los condicionamientos que moldean la práctica docente, ser conscientes de los desajustes de ciertas producciones del campo de la didáctica con relación a la viabilidad de su funcionamiento en el sistema, entre otros aspectos (Bednarz y Jean-Luc, 2015). De esta manera es necesario identificar los aspectos matemáticos del objeto de estudio y caracterizar el marco teórico por medio del cual se llevará a cabo el análisis de la práctica.

Aspectos matemáticos del concepto transformaciones en el plano

En matemáticas, una transformación es una operación por la cual una relación, expresión o figura se cambia en otra siguiendo una ley dada; estas leyes se pueden expresar analíticamente por una o más ecuaciones llamadas ecuaciones de transformación (Lehman, 1989), y están ligadas con el concepto de función así: una transformación o función $\varphi: S \rightarrow T$, de un conjunto S no vacío en un conjunto T es, una regla φ que asigna a cada elemento $p \in S$ un único elemento $\varphi p \in T$, p se llama elemento original y φp se llama elemento imagen (Birkohff y Mac Lane, 1970).

En el caso particular, la transformación se hace de figuras en el plano a figuras en el mismo plano, lo que en términos de funciones estaría regido por una función del tipo $f: R^2 \rightarrow R^2$, en donde la figura original es un elemento de R^2, f es la regla que describe el cambio, y la figura que resulta después de cambio pertenece al codominio R^2, teniendo en cuenta tres elementos: la figura original u objeto al que se le aplicará la transformación llamada objeto inicial o preimagen, una regla u operación que describa el cambio, y la figura que resulta después del cambio denominada imagen (Clemens, O'daffer y Cooney, 1981).

Traslación

En geometría, un objeto se traslada cuando se desplaza a lo largo de una recta, una distancia dada y en un sentido determinado.

La traslación de un punto P en $R2$ con respecto a una distancia fija d, mediante la función φd: $R2 \rightarrow R2$ es tal que $(P) = P'$, si y solo si la distancia de P a P' es d, para todo P que pertenece a $R2$.

Rotación

Un objeto rota cuando gira alrededor de un punto fijo (centro de rotación), un ángulo determinado (ángulo de rotación) y un sentido, que por lo general está dado respecto al movimiento de las manecillas del reloj.

La rotación de un punto P en R^2 con respecto a un punto C en R^2 y a un ángulo orientado β, mediante la función $\varphi C, \beta$: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que φC, $(P) = P'$, si y solo la distancia del punto C al punto P es igual a la distancia de C al punto P' y la medida del ángulo PCP' es igual a la medida de β, para todo P que pertenece a R^2.

Reflexión axial

La reflexión axial es un movimiento rígido que se hace con respecto a una recta como eje de reflexión. El eje de reflexión es la mediatriz de cada uno de los segmentos determinado por cada punto del objeto inicial y su imagen.

La reflexión axial de un punto P en R^2 con respecto a una recta l se define por la función φl: $R^2 \rightarrow R^2$ tal que $(P) = P'$, si y solo si la recta l es mediatriz del segmento PP'; es decir, el segmento PP' es perpendicular a l y la distancia de P a l es igual a la distancia de l a P', para todo P que pertenece a R^2.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas como marco teórico de investigación

Las transformaciones en el plano permiten estudiar las relaciones intra figurales y la correspondencia entre los elementos de una figura y los de su transformación. Estos aspectos están relacionados, en el pensamiento espacial, con la localización en el espacio, la trayectoria recorrida, las formas y sus relaciones.

Pensar en proponer la enseñanza de las transformaciones en el plano como eje transversal en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, implica comprender distintos factores que influye en la construcción de estructuras matemáticas, el papel del conocimiento en la práctica docente y el impacto que pueda tener en el aprendizaje de los alumnos. Esto se corresponde con algunas de las perspectivas de investigación acerca del conocimiento del profesor de matemáticas (Lima, 2019).

El foco de interés se centra en conocimiento que dispone el profesor para la enseñanza de las matemáticas, en particular de la geometría. Así, se estudia el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, entendido como aquel conocimiento que se pone en juego cuando se tiene la intencionalidad de enseñar un contenido matemático (Muñoz-Catalán et al., 2015; Carrillo et al., 2018), el cual es caracterizado por dos subdominios y seis componentes, tal como se presenta en la Figura 1.

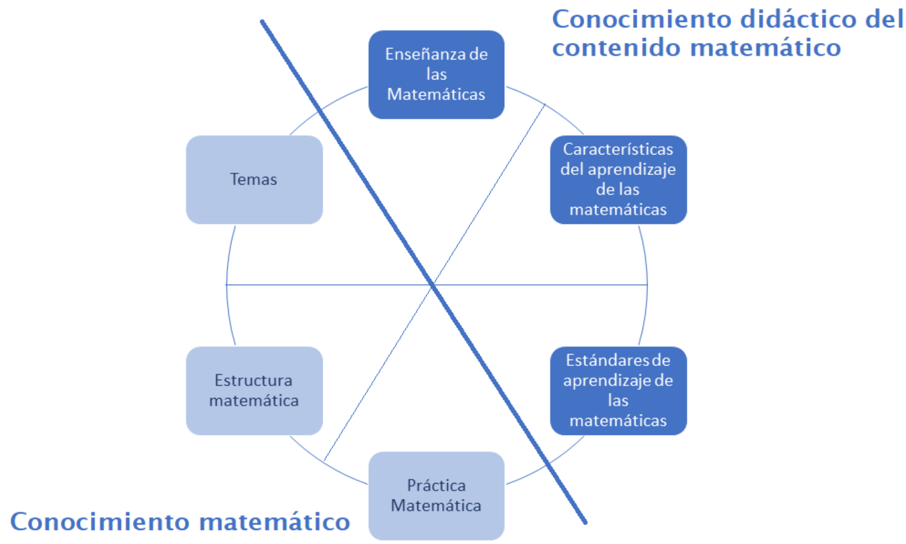


Figura 1. Subdominios y componentes del conocimiento especializado del profesor Fuente: Recuperado de Lima, 2019; adaptado de Muñoz-Catalán et al. (2015); Carrillo et al. (2018)

Conocimiento de los temas

El conocimiento del contenido escolar incluye aspectos de los conceptos que permiten relacionarlos con contextos reales y aportar elementos epistemológicos, ligados a las matemáticas, que llevan a la comprensión de diferentes significados que pueden atribuirse a los conceptos en los contextos en los que se sitúan.

Conocimiento de la estructura matemática

El subdominio integra relaciones entre conceptos avanzados y conceptos elementales, permitiendo que el profesor comprenda las matemáticas escolares desde un punto de vista superior no solo en el contenido sino en la percepción de su organización (Muñoz-Catalán et al., 2015; Carrillo et al., 2018). Este conocimiento se puede interpretar como un sistema integrado de conexiones como las presentadas en el apartado “Aspectos matemáticos del concepto transformaciones en el plano”.

Conocimiento de la práctica matemática

Este subdominio está orientado directamente con el conocimiento del profesor acerca de cómo pone en funcionamiento la matemática en la clase: formas de mostrar y demostrar, criterios para establecer generalizaciones válidas, significado de elementos constituyentes de las matemáticas, el conocimiento de la sintaxis matemática, entre otros.

En este punto será fundamental conocer la manera en que el profesor vincula el conocimiento de temas y el conocimiento de las estructuras matemáticas, a fin de establecer una propuesta para el aula en la que las transformaciones en el plano sean el eje transversal.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas

Este subdominio está referido al conocimiento que tiene el profesor de las vías, recursos y formas de enseñar matemáticas. En particular se refiere al conocimiento que posee de diferentes estrategias y teorías, ya sean institucionales o personales sobre la enseñanza de las matemáticas. ¿conoce el profesor diferentes alternativas para la enseñanza de las trasformaciones en el plano?

En este conocimiento, para el caso de primaria, será fundamental caracterizar e identificar elementos que permitan relacionar el objeto matemático con el desarrollo del pensamiento de sus estudiantes.

Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas

En este subdominio se indaga por el conocimiento que el profesor posee y desarrolla acerca de cómo se aprenden y piensan los contenidos matemáticos y las formas en que los estudiantes interactúan, en este caso particular, con las transformaciones en el plano.

Este tipo de conocimiento consiste en conocer las expectativas de aprendizaje que figuran en el currículo, o las que se hacen constar en la literatura de investigación, asociadas al nivel educativo en el que se aborda este aprendizaje. Así, desde las creencias y concepciones del profesor, será posible interpretar la manera en que las transformaciones en el plano permiten el desarrollo de los diferentes pensamientos en matemáticas.

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas

El conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas tiene que ver con la visión de la noción del conocimiento curricular que abarca los grados de profundidad en que el profesor puede conocer el currículo oficial visto como el referente estandarizado (Muñoz-Catalán et al., 2015; Carrillo et al., 2018) de los contenidos y capacidades que debe aprenderse y desarrollarse en un curso y las indicaciones de la forma en que deben enseñarse y aprenderse los contenidos. Dichos referentes pueden hallarse fuera del currículo, como las propuestas de asociaciones profesionales, eventos de educación matemática y la opinión de los profesores expertos en el conocimiento de la práctica docente sobre qué, cómo y cuándo explicar los contenidos matemáticos (Hobbs, 2016).

Aportes e inquietudes

Teniendo en cuenta que el constructo *conocimiento especializado* es, en principio "para la investigación" (Lima, 2019), el modelo de *análisis didáctico* puede ser pertinente para el diseño y gestión de la propuesta planteada en los objetivos, en cuanto permite indagar el impacto en la realidad del aula y complementa la aproximación teórica de la propuesta de Muñoz-Catalán et al. (2015).

Así, recurrir al *análisis didáctico,* lleva a la siguiente pregunta: ¿el modelo de análisis didáctico y el estudio que propone sobre el contenido, la cognición, la instrucción y la evaluación permite vincular los componentes que caracterizan el conocimiento especializado e identificar dimensiones del conocimiento profesional del profesor que tienen un impacto directo en el aula?

Las respuestas a la pregunta anterior, así como las generalizaciones propuestas, los análisis, los resultados y los aportes basados en la sensibilidad teórica que se realicen durante el estudio, no pretenden ser exhaustivos. Son intensivos en la medida que los datos, su interpretación y el contraste con la literatura especializada así lo permiten y tienen como fin generar información sobre los procesos de formación inicial y continua de los profesores de matemáticas.

Referencias

Bednarz, N. y Jean-Luc, E. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation, 39*(171), 171-184.

Birkohff, G. y Mac Lane, S. (1970). *Algebra moderna* (4.ª ed.). Madrid: Editorial Vicens-Vives.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge model. *Research in Mathematics Education, 20*, 263-253.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas para primaria.* Madrid: Pearson Educación.

Clemens, S., O'daffer, P. y Cooney, T. (1981). *Geometría*. Ciuad de México: Editorial Addison Wesley Logman.

Hobbs, L. (2016). The heart of the educator: Aesthetic experience shaping knowledge, identity and passion. En A. Bellochi, K. Otrel-Cass, y C. Quigley, *Beyond cognition in science education: considering the role of emotions, well-being, and aesthetics*. Springer.

Lehman, C. (1989). *Geometría Analítica*. Ciudad de México: Editorial Limusa S. A.

Lima, I. (2014). *El conocimiento profesional del profesor de matemáticas y el teorema de los cuatro colores* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de General San Martín, Buenos Aires, Argentina.

Lima, I. (2019). *Desarrollo profesional del profesor de matemáticas: estudio de caso en el nivel medio de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad Nacional de La Plata, Provincia de Buenos Aires, Argentina.

Muñoz-Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas. *Gaceta de la RSME, 18*(3), 1801-1817.

¿QUÉ CONOCIMIENTO DEBE TENER EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA Y APORTAR A LA CONSTRUCCIÓN DEL TEJIDO SOCIAL?

Viviana Paola Salazar, Isaac Lima

Universidad de Salamanca, España

vivianapaolasalazar@gmail.com, isaacsito@gmail.com

En esta comunicación exponemos elementos teóricos que aportan a la formación de docentes de geometría, teniendo en cuenta el marco del posconflicto en Colombia. La educación es uno de los mecanismos para que naciones, en un entorno de posconflicto, mejoren la calidad de vida de las personas. Así que pretendemos mostrar el importante papel que desempeñan los profesores de matemáticas en la reconstrucción del tejido social, debido a que en la actualidad ellos se enfrentan a diferentes problemáticas en su aula inherentes al contexto en el que está situadas las escuelas.

TEJIDO SOCIAL

El concepto tejido social fue adaptado por la sociología como el conjunto de redes personales, categoriales, estructurales, formales, funcionales, e inter e intra sistémicas, que constituyen un activo para que los individuos y la sociedad amplíen opciones y oportunidades a fin de mejorar la calidad de vida. En este sentido, es el entramado de toda la comunidad, es decir, una red de relaciones, de interacción y comunicación entre los individuos que comparten la vida, el tiempo y el espacio (Habermas, 2000).

El tejido social es un conjunto de relaciones que permiten determinar formas particulares de ser, producir, interactuar y proyectarse en el ámbito familiar, comunitario, laboral y ciudadano (Romero, 2008). La calidad del tejido social depende de factores como: los valores, las normas de convivencia, los mecanismos de comunicación, los roles y los límites. Estos factores se pueden representar por medio de cuatro círculos concéntricos: en el círculo más interno se entretejen las relaciones familiares; en el círculo inmediato se entrelazan las relaciones escolares y comunitarias; el tercer círculo corresponde al entramado de las relaciones laborales; finalmente, en el cuarto círculo se entrecruzan las relaciones ciudadanas.

Salazar, V. y Lima, I. (2019). ¿Qué conocimiento debe tener el profesor de matemáticas para enseñar geometría y aportar a la construcción del tejido social? En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 205-212). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

TEJIDO SOCIAL EN COLOMBIA

En el caso específico de Colombia, desde el año 1964 se han producido diferentes guerras con grupos armados, causando masacres, desplazamientos forzados, terror, entre otros efectos. En el año 2010 se inició en Colombia un proceso de paz con uno de los grupos armados de mayor trayectoria en el país. El esfuerzo llevado a cabo por diferentes organismos para lograr un acuerdo que pusiera fin a la violencia ha propiciado, desde el año 2016, una nueva etapa llamada posconflicto. Esta se caracteriza porque además de la superación del conflicto —entendiéndose como cese al fuego, entrega de armamento, entre otros procesos—se reintegran también a la sociedad no armada familias que hacían parte o fueron víctimas de estos grupos y se permite el acceso de diferentes entidades a comunidades que no gozaban de algunos beneficios y derechos, como por ejemplo la educación.

Las personas cuyas vidas se han visto devastadas por los conflictos armados albergan la ambición de un futuro mejor cuando la violencia ha cesado. Para que la educación en países recién salidos del conflicto sea una herramienta para la reconstrucción del país, es necesario que se planifique la educación y que se reforme progresivamente, teniendo en cuenta el legado del conflicto anterior (Unesco, 2011).

En el marco de la sociedad colombiana actual, en la que el posconflicto marca una era de esperanza y avances en las diferentes zonas, es necesario que en el sistema educativo se replanteen y diseñen propuestas que atiendan las demandas del contexto que propendan por el mejoramiento de la calidad y la eficacia de la educación en todos los niveles. Dicho mejoramiento está relacionado en su mayoría con la formación de los docentes. Ellos deben tener unos conocimientos específicos de tal manera que sus prácticas respondan a las necesidades del sector educativo en el cual se desempeñan.

EL TEJIDO SOCIAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA: MATEMÁTICAS EN CONTEXTO

En el caso de la educación, específicamente de la educación matemática, es indispensable que las relaciones entre las situaciones sociales actuales y el desarrollo del pensamiento matemático tengan relación para que los estudiantes puedan acercarse a un proceso de aprendizaje con sentido. Es menester que los procesos de enseñanza y aprendizaje sean un proceso contextualizado tanto para el profesor como para los estudiantes.

En este sentido, el contexto, como elemento que moviliza el accionar educativo, toma un rol fundamental en la construcción de saberes matemáticos. Este permite realzar la intencionalidad transformadora, como medio para comprender y analizar críticamente la realidad circundante; así, el contexto puede ser entendido como *aquello que acompaña a un texto*, es decir, el conjunto de la serie de situaciones que rodean un evento (Vithal y Valero, 2012).

El contexto se evidencia cuando las diferentes particularidades de los entornos en los que se hallan inmersos los estudiantes motivan la adquisición y el desarrollo de saberes. El contexto *está y es* y aunque se considere que no necesariamente afecta lo que sucede en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, los sujetos se hallan inmersos en diversas situaciones sociales personales e intelectuales que afectan y que interfieren de manera radical los procesos de aprendizaje.

En el aprendizaje de las matemáticas no solo es necesario involucrar a los estudiantes en actividades que les permitan desarrollar procesos individuales de pensamiento, sino también es necesario abrir un espacio de interacción y negociación de significados matemáticos y de vínculos de estos con la realidad. De esta manera, es posible enunciar la importancia del tejido y las transformaciones sociales que se pudiesen generar a partir del trabajo en educación matemática, así como el cambio de mecanismos de intervención en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El contexto de interacción abarca no solo los problemas y sus referencias matemáticas en relación con la vida real, sino también la manera como esos problemas se abordan en el aula a través de la cooperación entre los participantes. Sin el contexto de interacción es imposible entender cómo operan la enseñanza y el aprendizaje en el medio en que se hallan inmersos los estudiantes y su relación con el saber. De ahí surge la necesidad de relacionar la práctica social de la investigación en educación matemática crítica con el conocimiento que tiene el docente. El punto de unión de estas dos esferas de práctica es la construcción y reconstrucción de discursos que se encuentran y que se complementan.

Metodología

La metodología del estudio que planteamos para realizar esta investigación es Lesson Study (LS) (Lewis, Perry y Hurd, 2009), que se concibe como la configuración de un sistema de colaboración, en el que se conforma una comunidad académica para mejorar la práctica de los docentes. La metodología LS es vista como un proceso de acción para el cambio e investigación que facilita la comprensión de la realidad sobre la que se investiga (Soto y Pérez, 2015). Ha adquirido relevancia en Asia desde el siglo XX y en Europa y América desde el siglo XXI. Esta metodología ofrece a los profesores la oportunidad de desarrollar comunidades profesionales de investigación, generando cambios en el conocimiento de los maestros, en sus creencias y en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Esta metodología se desarrolla en 4 fases: investigación, planificación, lección de investigación y reflexión. En la primera se consideran las características actuales de los estudiantes, se establecen las metas de aprendizaje a largo plazo y se realiza un estudio de los contenidos del área. En la fase de planificación se desarrolla una lección de investigación, se prueban las tareas para anticipar soluciones de los estudiantes, se escribe un plan de clase en el que se relacionan, por ejemplo, las actividades prevista con los objetivos a largo plazo. Durante la fase de lección de investigación, los miembros del equipo observan y recopilan datos de la clase durante su desarrollo. Por último, en la fase de reflexión se discuten los datos y a menudo se rediseñan las sesiones de clase.

Algunos resultados que ha aportado el uso de esta metodología son la creación de comunidades de práctica con objetivos comunes, esto puede influir en un sentido de responsabilidad mutua por parte de los docentes y permite reflexionar sobre los diferentes aspectos inherentes a la clase. Lo anterior puede proporcionar alta calidad en las clases y mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

¿CÓMO INVOLUCRAR EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR QUE ENSEÑA GEOMETRÍA EN LA RECONSTRUCCIÓN DEL TEJIDO SOCIAL?

Uno de los grandes retos e inquietudes de esta investigación está en involucrar el conocimiento del profesor de matemáticas en el proceso de reconstrucción del tejido social. Es importante considerar cómo el conocimiento del profesor que enseña geometría puede ayudar en este proceso. Para ello, es importante considerar algunas definiciones presentes en la literatura sobre educación matemática.

Shulman (1986) plantea que el conocimiento necesario para enseñar la disciplina específica, en este caso geometría, se puede nombrar *conocimiento didáctico del contenido*. Este es comprendido como un tipo de conocimiento que incorpora los aspectos del contenido más relacionados con la enseñanza (Shulman, 1986); no obstante, este tipo de conocimiento no se puede identificar fácilmente en la práctica.

Ball, Thames y Phelps (2008) proponen organizar y operativizar el conocimiento del profesor bajo el concepto *conocimiento matemático para la enseñanza*. Representan con este el conocimiento matemático, habilidades, hábitos de la mente, sensibilidad y otros elementos requeridos en el trabajo concreto de enseñar y en las tareas especializadas en las que los profesores necesitan conocer y usar las matemáticas. Para ellos, el *conocimiento didáctico del contenido* está compuesto por el conocimiento del contenido y el conocimiento de la forma en la que los estudiantes se apropian de él, permitiéndoles comprender el contenido desde la perspectiva del aprendizaje y de la enseñanza y establecer por qué, por ejemplo, un determinado material, recurso o representación es adecuado para explicar un determinado concepto. Así, Ball, Thames y Phelps (2008) hacen precisiones sobre el modelo de Shulman (1986) teniendo en cuenta que el análisis de la práctica del profesor no se puede realizar sin referencia a conocimiento matemático y a los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Por otro lado, Carrillo et al. (2018), consideran el *conocimiento especializado* como aquel que se deriva de la *especialización del profesor* fruto de su profesión (profesor de matemáticas). El *conocimiento especializado* está conformado de seis componentes, tres correspondientes al conocimiento matemático: temas, estructura matemática y práctica matemática; y tres correspondientes al conocimiento del contenido matemático: enseñanza de las matemáticas, aprendizaje de las matemáticas y estándares de aprendizaje de las matemáticas (Carrillo et al., 2018).

Estos modelos acerca del conocimiento del profesor se plantean algunas consideraciones que pueden ser tenidas en cuenta para responder a la pregunta siguiente: ¿qué conocimiento debe tener el profesor de matemáticas para enseñar geometría y aportar a la construcción del tejido social? En cuanto permiten hacer una caracterización de cómo acercar al docente que enseña geometría a procesos de construcción matemática a través del contexto, el maestro desarrolla sus competencias profesionales para promover la formación de identidades de sus alumnos, proporcionándoles un pensamiento crítico y reflexivo, teniendo en cuenta y respetando el contexto (social, económico, religioso o cultural) en el que se desarrolla cada niño.

Es a través de la trayectoria social y profesional que el docente conforma su identidad. En la cotidianidad de la vida en las escuelas se establece la lógica en la cual se mueve la mayoría de los docentes, pues cualquier conocimiento adquirido es pasado por el examen de la practicidad y utilidad. El conocimiento del profesor es un saber plural, formado por una amalgama, más o menos coherente, de saberes procedentes de la formación profesional y disciplinarios, curriculares y experienciales (Tardif, 2004).

Debido a que el conocimiento se adquiere en diversos momentos, es en la formación inicial y continua en la que adquiere saberes pedagógicos, disciplinares y curriculares, y en su práctica se apropia de los experienciales, los cuales le dan la lectura del contexto. Es en la práctica docente en la que se movilizan los diversos saberes, de acuerdo con la situación y las condiciones que enfrenta, por lo que son una amalgama de saberes que utiliza para realizar sus tareas. Así, en procura de explicar el conocimiento que tiene un profesor para aportar a la construcción del tejido social, se puede partir de la caracterización de tres tipos de conocimiento que están explícitos en los modelos de Shulman, (1986), Ball, Thames y Phelps (2008), Muñoz-Catalán et al. (2015) y Carrillo et al. (2018):

- ***Pedagógicos***: Teorías y concepciones provenientes de reflexiones racionales y normativas sobre la práctica educativa, que conducen a sistemas más o menos coherentes de representación y de orientación de la actividad educativa.

- ***Disciplinares:*** Conocimientos provenientes de diversos campos del conocimiento, en forma de disciplinas y se contemplan en los programas escolares y surgen de la tradición cultural.

- ***Curriculares:*** Saberes que provienen de las necesidades propias de un contexto y que se originan a partir de discursos, objetivos, contenidos y métodos en los cuales la institución escolar categoriza y presenta los saberes sociales que ella misma define y selecciona como modelos de la cultura erudita y de formación para esa cultura.

- ***Experienciales:*** Los cuales se adquieren en el ejercicio de la práctica y reflexión de su profesión, desarrollando saberes específicos, basados en su trabajo cotidiano y en el conocimiento de su medio.

REFERENCIAS

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special. *Journal of Teacher Education*, 5, 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge model. *Research in Mathematics Education, 20*, 263-253.

Habermas, J., (2000). *Ensayos políticos*. Barcelona: Editorial Paidós.

Lewis, C., Perry, R. y Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case. *J Math Teacher Educ, 12,* 285-304.

Organización de las naciones unidas para la educación, la ciencia y la cultura (2011). *Una crisis encubierta: conflictos armados y educación. Informe de seguimiento de la EPT en el mundo*. París: Ediciones Unesco.

Soto, E. y Pérez, A. I. (2015). Lessons Studies: un viaje de ida y vuelta recreando el aprendizaje comprensivo. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* 83, 15-28,

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2).

Tardif, M. (2004). *Los saberes de los docentes y su desarrollo profesional*. Madrid: Narcea Ediciones.

Vithal, R. y Valero, P. (2012). La investigación en educación matemática en situaciones de conflicto social y político. En P. Valero y O. Skovsmose (eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 217-268). Bogotá: Universidad de los Andes.

¿CÓMO ARGUMENTA EL PROFESOR DE MATEMÁTICAS? REFLEXIONES EN CLASE DE GEOMETRÍA

Jorge Toro

Universidad de Antioquia
jandres.toro@udea.edu.co

Se presentan algunos resultados de una tesis doctoral en curso cuyo objetivo es comprender la argumentación del profesor de matemáticas durante su gestión de la enseñanza en clase. El episodio de análisis corresponde a una lección de geometría, cuando la profesora y sus estudiantes discuten sobre propiedades del triángulo equilátero. Se presenta una concepción de argumentación y un marco de referencia sobre el análisis del discurso en clase, que permiten dirigir el análisis respectivo.

INTRODUCCIÓN

En esta contribución se presenta un análisis de la práctica educativa en la clase de matemáticas de una profesora, considerando aspectos asociados a la argumentación. La argumentación del profesor ha sido estudiada desde diferentes puntos de vista, perspectivas teóricas y utilizando diferentes métodos de análisis. Por ejemplo, durante procesos de demostración (Knipping y Reid, 2015), en el análisis de la estructura, utilizando elementos del modelo de Toulmin (Metaxas, Potari y Zachariades, 2016), o en las respuestas de los profesores en escenarios hipotéticos de clase (Nardi, Biza y Zachariades, 2012). Sin embargo, se considera que poco se conoce aún sobre aspectos asociados a la argumentación del profesor en su ambiente natural de clase, intención que va más allá de indicar un rol, de estudiar el tipo de preguntas que hace o de seguir un modelo para identificar una determinada estructura.

La pregunta que orienta la investigación es la siguiente: ¿cómo es la argumentación del profesor de matemáticas durante su gestión de la enseñanza en clase? En este documento se pretende describir algunas características de la argumentación de la profesora en la clase de geometría. Para ello se utiliza un episodio durante el desarrollo de una lección en un curso de décimo grado. En lo que sigue, se resume la perspectiva teórica y su uso para la interpretación de datos.

Toro, J. (2019). ¿Cómo argumenta el profesor de matemáticas? Reflexiones en clase de geometría. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 213-221). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

PERSPECTIVA TEÓRICA

Al igual que otros teóricos en investigación educativa (Ayalon y Hershkowitz, 2018), en este trabajo se asume la argumentación desde una perspectiva dialéctica. Para ello se retoma la definición presentada por van Eemeren y sus colegas (2014):

> La argumentación es un acto complejo comunicativo e interaccional, destinado a resolver una diferencia de opinión con el destinatario, presentando una constelación de proposiciones, por las que se puede responsabilizar al argumentador, para hacer que el punto de vista en cuestión sea aceptable para un juez racional que juzgue razonablemente. (p. 7) [Traducción propia].

Esta consideración respecto a la argumentación busca atender a "interacciones complejas" en la clase de matemáticas, en las que el profesor y los estudiantes discuten durante el desarrollo de una lección sobre una determinada tarea. Implica, además, que el objeto de esta investigación intenta aislarse de la postura clásica, en la que la argumentación es asumida como un conjunto de premisas y conclusiones formuladas con la ayuda de símbolos formales. Más bien, se asume una postura más cercana a la llamada teoría de la argumentación (van Eemeren, Grootendorst y Snoeck, 2006).

En lugar de ser solo una entidad estructural (valerse de los elementos del modelo de Toulmin: datos, garantía y aserción), la argumentación es un acto complejo comunicativo e interaccional, que ocurre por medio del uso del lenguaje y puede desempeñarse en forma oral o escrita (van Eemeren et al., 2006). El argumentador y el destinatario, en este caso el profesor y sus estudiantes en clase de matemáticas, usan ciertas palabras y oraciones para expresar, cuestionar o negar algo, para responder a afirmaciones o a preguntas.

La argumentación surge en respuesta a, o en anticipación a, una diferencia de opinión, la cual no necesariamente toma la forma de un desacuerdo, disputa o conflicto; lo que hay es una parte que tiene una postura y otra parte que tiene dudas sobre si aceptar o no dicha postura (van Eemeren et al., 2014). En la clase de matemáticas, los estudiantes pueden manifestar de manera explícita dudas respecto a una aseveración, explicación o indicación expresada por el profesor, o dudas respecto a una respuesta o procedimiento de solución diferente al presentado por el profesor, o diferentes respuestas a una misma tarea en el trabajo de los estudiantes, que exigen que el profesor argumente.

Considerar la argumentación como un acto complejo comunicativo e interaccional dirigido a resolver una diferencia de opinión, implica considerar el "proceso de la argumentación"; asumir la argumentación como una constelación de proposiciones diseñadas para hacer aceptable el punto de vista en cuestión implica aludir al “producto de la argumentación” (van Eemeren et al., 2014). En esta investigación se considera tanto el proceso de la argumentación como el producto. El proceso es analizado desde lo que se llama “dimensiones”, que, en sintonía con la postura teórica, incluye: i) la dimensión comunicativa: qué dice el profesor y para qué lo dice; y ii) la dimensión interaccional: en dónde lo dice y a quién lo dice. Dado que la argumentación tiene lugar en un contexto educativo, con unos propósitos instruccionales de educar en matemáticas, se considera una tercera dimensión, iii) la dimensión epistémica: cómo lo dice y por qué lo dice. El producto aquí es asumido como cada uno de los episodios seleccionados para el análisis, el cual inicia con una “intervención argumentativa”, en la que se hace explícita la diferencia de opinión, por parte del profesor o de un estudiante, y termina con el “cierre”, en el que se concluye la diferencia de opinión, por parte del profesor.

Dado que la argumentación se expresa principalmente en forma oral y por un grupo de participantes (Knipping y Reid, 2015), se retoman elementos del análisis del discurso en clase para poder hacer explícito el objeto de estudio de esta investigación. Específicamente, se retoma la tipificación de reacciones del profesor ante las intervenciones de los estudiantes propuesta por Ruthven y Hoffman (2016). Estos autores presentan un marco que permite teorizar y analizar el discurso en la clase a partir de una serie de reacciones: *Aprobar (Apr):* indicar explícitamente la aprobación de la intervención del estudiante; *Desaprobar (Des):* indicar explícitamente la desaprobación de la intervención del estudiante; *Repetir (Rep):* repetir (parte clave de) la intervención del estudiante en las mismas palabras; *Replantear (Rel):* replantear (parte clave de) la intervención del estudiante en diferentes palabras; *Traducir (Tra):* traducir (parte clave de) la intervención del estudiante a una forma o idea equivalente; *Redireccionar (Red):* redireccionar el conocimiento mostrado en la intervención del estudiante; *Averiguar (Ave):* averiguar (sondear, explorar, examinar) la intervención del estudiante; *Expandir (Exp):* expandir (ampliar) la intervención del estudiante o construir sobre ella; *Retomar (Ret):* retomar (volver a plantear, referirse a) la pregunta o intervención anterior; y *Transferir (Trn):* transferir la consideración de la intervención del estudiante a otro estudiante o clase.

EPISODIO, TAREA, PARTICIPANTES Y MÉTODO

El episodio aquí reportado tuvo lugar en una clase con 32 estudiantes de décimo grado, de una institución educativa de carácter público en la ciudad de Medellín (Colombia). La profesora, protagonista de la investigación, en adelante Emma, estuvo de acuerdo en hacer parte del estudio. Ella cuenta con varios años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas y con formación posgraduada en Educación Matemática. El autor, como investigador, actuó como observador no participante y no colaboró en la planificación de las tareas presentadas durante las seis lecciones de clase observadas. Emma contó con autonomía en la preparación de sus lecciones, ya que el interés fue observarla en su ambiente habitual de clase, porque el objeto de interés investigativo debería emerger durante su gestión de la enseñanza. La cámara de vídeo tuvo siempre en primer plano a Emma, bien cuando se dirigía a todos los estudiantes o bien cuando trabajaba con un pequeño grupo. Cabe aclarar que en este documento solo se presenta un episodio de una lección, específicamente la tarea presentada por Emma a sus estudiantes en la primera lección. El enunciado de esta es: *Construir, con regla y compás, un triángulo equilátero. Luego verificar, con el transportador, si en realidad es un triángulo equilátero.*

Para el análisis de la argumentación a lo largo de las lecciones, se filtran los turnos de habla en búsqueda de evidencias de intervenciones argumentativas y sus respectivos cierres. Luego se analiza cada turno del profesor, en una primera instancia se indican las respectivas reacciones a las intervenciones de los estudiantes; si en un mismo turno hay más de una reacción se utiliza un marcador de posición con una letra en minúscula. A continuación, se identifican acciones asociadas a las tres dimensiones de análisis —comunicativa, interaccional y epistémica—. Luego se encuentran algunas regularidades en dichas acciones, acá nombradas como categorías, que corresponderían con las características de la argumentación de la profesora.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En lo que sigue se presenta el episodio de análisis. Cada acción está acompañada por un marcador de posición para hacerla fácilmente reconocible en el episodio.

50.	Sara:	¿Uno puede medir 59°?
51.	Emma:	*Uno puede medir 59°* ***aRet****. Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°* ***bExp****. Sin embargo, recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error* ***cRed.*** *¿Cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?* ***dAve***
52.	Estudiantes:	De dos...
53.	Emma:	*¿De dos qué?* ***Ave***
54.	Ana:	Adelante y atrás.
55.	Emma:	*¿Pero de dos qué?... ¿centímetros? ¿milímetros?...* ***Red***
56.	Paula:	¡Centésimas!
57.	Emma:	*¿Centésimas?* ***Des***
58.	Estudiantes:	[Risas]
59.	Emma:	*¿Qué es lo que estamos midiendo?* ***Ave***
60.	Estudiantes:	Grados.
61.	Emma:	*Lo que estamos midiendo* ***Ret****...*
62.	Ana:	De dos grados.
63.	Emma:	*Sería de dos grados* ***aApr.*** *Porque lo que estamos midiendo, ¿qué son?* ***bAve***
64.	Estudiantes:	Grados.
65.	Emma:	*¡No!* ***Des***
66.	Paula:	¿Triángulos?...
67.	Estudiantes:	¡Ángulos!

68.	Emma:	[*Asienta con la cabeza* ***aApr***] *Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos… Eh... nos están mostrando es la amplitud. Estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro. Cuando estamos midiendo una longitud, esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros* ***bExp*** [...]

A continuación, en las tablas se presentan las tres dimensiones de análisis.

Aseveraciones	Plantear aseveración para retomar y expandir intervención de un estudiante. [51a-b] Plantear aseveración para redireccionar la intervención de un estudiante. [51c] Plantear aseveración para retomar la intervención anterior. [61] Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante. [63a] Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante. [68b]
Preguntas	Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante. [55] Plantear pregunta sobre conceptos que han sido abordados en lecciones anteriores. [51d] Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante. [53a, 63b]
Gestos o expresiones	Utilizar expresión para desaprobar la intervención de un estudiante. [65] Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante. [68a]
Tabla 1. Acciones asociadas a la dimensión comunicativa	

Participación	Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por ella misma o por un estudiante. [51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 68] Atender a duda presentada por un estudiante. [51]
Normas de clase	Utilizar normas de clase para responder la pregunta presentada por un estudiante o por ella misma. [51c]
Convencer	Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por un estudiante. [51b-c, 68]

Tabla 2. Acciones asociadas a la dimensión interaccional

Tratamiento del objeto matemático	Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta. [51b, 68b] Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático. [53, 55, 59, 61, 63b]
Retomar otras lecciones	Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta. [51c]
Justificar y/o refutar	Refutar la intervención de un estudiante. [57, 65] Presentar justificación sobre el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta. [68b]

Tabla 3. Acciones asociadas a la dimensión epistémica

Respecto al producto de la argumentación, en [50] se reconoce la intervención argumentativa en una pregunta de un estudiante que tiene dudas respecto a la figura que ha construido. Observa que su triángulo no cumple de manera exacta con la indicación de la tarea, por lo cual solicita la aceptación de la profesora. La reacción de Emma en [51] parece ser el cierre, pues se vale de una norma de clase que había sido estipulada en lecciones anteriores para dar por terminada la diferencia de opinión; efectivamente da la respuesta que la estudiante quizás estaba esperando: no hay problema con la construcción pues el resultado está dentro del “margen de error”. Sin embargo, como parte de la gestión de la enseñanza de Emma, plantea una pregunta en [51d] para involucrar a los demás estudiantes en la respuesta a la pregunta. La pregunta parece ser solo de seguimiento al discurso; es decir, la profesora esperaba que los estudiantes respondieran: “de dos grados”. Pero las intervenciones de los estudiantes en [52, 54, 56, 60, 62, 64 y 66] permiten ver que aún no hay la comprensión y apropiación de los conceptos que Emma esperaba. Por lo que solo hasta el turno [68], el cual estuvo precedido de una serie de preguntas en las que Emma intentó redireccionar las intervenciones de los estudiantes, puede darse el cierre. Por lo tanto, es ahí que se puede concluir que la diferencia de opinión ha sido superada y que no solo Sara se ha convencido sino todo el grupo.

Sobre el proceso de la argumentación, pueden identificarse varios aspectos interesantes. Las Tablas 1, 2 y 3 permiten intuir al menos dos propósitos de la argumentación de la profesora en este episodio: i) tratar con dificultades en la medición y ii) tratar con dificultades en cómo nombrar adecuadamente los objetos matemáticos, propósitos que coinciden con intenciones educativas de la práctica de Emma. Parece, además, que la argumentación de Emma está caracterizada por una serie de acciones que dejan ver aspectos relacionados con el tipo de preguntas, aseveraciones o gestos que hace, y cómo intenta involucrar a sus estudiantes en el discurso de clase. Es decir, Emma no solo expresa proposiciones, sino que tiene una intención y un propósito de educar en matemáticas con cada una de ellas. Las acciones asociadas a la dimensión epistémica permiten vincular la argumentación con el conocimiento profesional: cómo es puesto en juego el conocimiento de las matemáticas de la profesora en su argumentación, en el tratamiento de los objetos matemáticos, en cómo retoma otras lecciones y en cómo se vale de la justificación o la refutación para apoyar su argumentación. Finalmente, el análisis de este episodio podría sugerir que hay elementos del discurso en la clase de matemáticas que además de estar relacionados con la argumentación, en este caso de la profesora, también podrían ser vistos con el lente de cómo el profesor favorece la argumentación en su clase.

Referencias

Ayalon, M. y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior,* 49, 163-173. doi: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

van Eemeren, F., Grassen, B., Krabbe, E., Snoeck Henkemans, F., Verheij, B. y Wagemans, J. (2014). *Handbook of argumentation theory.* Dordrecht: Springer.

van Eemeren, F., Grootendorst, R. y Snoeck, F. (2006). *Argumentación. Análisis, evaluación, presentación.* Buenos Aires: Biblos.

Knipping, C., y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (eds.) *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp.75-101). Nueva York: Springer.

Metaxas, N. Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 383-397. doi 10.1007/s10649-016-9701-z

Nardi, E., Biza, I., y Zachariades, T. (2012). 'Warrant' revisited: Integrating mathematics teachers' pedagogical and epistemological considerations into Toulmin's model for argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *79*(2), 157-173. doi: 10.1007/s10649-011-9345-y

Ruthven, K., y Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA*, *11*(1), 5-33.

Experiencias significativas

El origami modular como herramienta para el aprendizaje de los conceptos geométricos a través de la modelación como práctica social

Pablo Carmona

pacodim25@hotmail.com

Esta experiencia significativa se propone luego de identificar la escasa articulación del contexto en que viven los estudiantes con la geometría que se enseña en el aula, específicamente en torno a los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos, como área lateral, área total y volumen. Se traza como objetivo construir conocimiento matemático a través de la modelación como práctica social, para generar procesos de resignificación en dichos conceptos geométricos. Lo anterior se posibilita con la incorporación del origami modular como herramienta pedagógica en las prácticas de aula. El desarrollo de esta iniciativa se sustenta en la Teoría Socioepistemológica, la cual asume "la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto" (Cantoral, 2013).

Contextualización de la experiencia

Una problemática que se ha identificado, a través de la observación y la evaluación de las prácticas de clase en nuestra institución, es la escasa articulación del contexto en que viven los estudiantes con la geometría que se enseña en el aula. Un ejemplo de ello son los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos, que es uno de los objetos matemáticos de estudio en el grado quinto de Básica Primaria.

Al interior de nuestro contexto institucional, se ha identificado la ausencia en el currículo de conceptos relacionados con figuras tridimensionales y mayor énfasis en las figuras planas. Se encuentran falencias en la comprensión, producción, adquisición y propagación de dichos conceptos de figuras tridimensionales, debido a que en las prácticas de aula hay poco énfasis en su

Carmona, P. (2019). El origami modular como herramienta para el aprendizaje de los conceptos geométricos a través de la modelación como práctica social. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 225-233). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

aplicación y se presenta a través de planteamientos didácticos tradicionales. Se evidencia en las prácticas de aula, que los poliedros platónicos, como objeto matemático de estudio, son poco explorados a nivel concreto, solo se hace a través de sus representaciones gráficas; existe una escasa articulación con la realidad y no se toman en cuenta el contexto que rodea al estudiante. Arrieta (2003) identifica la omisión de los contextos sociales en actividades matemáticas y, por ello, propone:

> Nosotros sostenemos que las actividades matemáticas no son "neutras", dependen del contexto social donde se abordan. La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos. Este contexto remite a diversas prácticas sociales anteriores escolares, o no escolares, este contexto social es determinante en la utilización de las estrategias, herramientas y procedimientos para la actividad. (Arrieta, 2003, p. 2).

La situación descrita puede ser parte de la causa del bajo desempeño de los estudiantes en los resultados del componente Geométrico–Métrico de las Pruebas Saber del grado quinto de Básica Primaria.

Nuestra institución adopta un modelo pedagógico constructivista con tendencia activista y enfoque cognitivo, con el cual pretende contribuir a la trasformación social, no solo del estudiante como agente activo, sino también de su familia. Es por ello que esta experiencia significativa se articula con el objetivo de calidad y con el perfil del estudiante expuesto en el PEI de la institución, ya que se incorpora al proceso de enseñanza-aprendizaje una herramienta pedagógica, como el origami modular, para favorecer así el desarrollo de competencias matemáticas.

Objetivo general:

- Construir conocimiento matemático a través de la modelación como práctica social, donde se generen procesos de resignificación de los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos, al incorporar el origami modular como herramienta pedagógica en las prácticas de aula de los estudiantes de grado quinto de Básica Primaria.

Objetivos específicos:

- Diseñar e implementar actividades de aula para estudiantes del grado quinto de Básica Primaria, a través de la modelación y del uso del origami modular.

- Propiciar un espacio al interior de las aulas de clase, en el cual, a través de sus prácticas de modelación matemática, se genere el análisis y la solución de problemas por medio del trabajo en equipo y del uso del origami modular.

- Generar procesos que les permita a los estudiantes, construir argumentos para resignificar los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos, mediante el uso del origami modular.

MARCO TEÓRICO

Esta experiencia significativa está basada en la Teoría de la Socioepistemología, la cual se caracteriza por ser un marco teórico que da importancia a las múltiples dimensiones que hacen parte del saber, incluyendo el contexto, los escenarios no escolares habitados y las diferentes formas de saber de los estudiantes; de igual manera asume "la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto". (Cantoral, 2013). En consecuencia, se valida el hecho de traer al escenario académico el uso del origami modular, que se desarrolla en escenarios no académicos, pero que puede ser utilizado como una herramienta pedagógica con intencionalidad y en la cual es funcional la intervención del docente, para generar procesos de resignificación.

La Socioepistemología tiene un aporte fundamental: modela la construcción social de conocimiento matemático conjuntamente con su difusión institucional; esto es, modeliza las dinámicas de saber o conocimiento puesto en uso (Cantoral 2013, p. 97). En este sentido, las prácticas de modelación serán las que contribuyan a construir, reconstruir, dar significado y resignificar los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos.

Para Montiel y Buendía (2012), resignificar se refiere "al proceso continuo de dar significado al saber matemático a través de sus usos, esto es, la significación que subyace a la actividad y no necesariamente al objeto matemático" (p. 64). Las autoras señalan, además, que la resignificación es un proceso continuo y no solo una meta, y, en consecuencia, las prácticas deben ser intencionalmente desarrolladas con el objetivo de favorecer una continua significación; los significados se ponen en uso y evolucionan. Para ello, es necesario revisar el rol de las prácticas, el diseño de actividades y de herramientas pedagógicas. Es en este sentido, que el diseño de esta propuesta tiene la intencionalidad de proporcionar un contexto institucional en el que la modelación, considerada como práctica social ejercida por los participantes del sistema didáctico, permita la resignificación del conocimiento matemático en torno a los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos.

Dinámica interna de la experiencia significativa

La metodología empleada para el desarrollo de la experiencia significativa es el trabajo en equipo. Se conformaron equipos de 6 estudiantes elegidos aleatoriamente, que ellos identificaron como "mesas de origami". Una vez organizadas las mesas de origami, el docente orienta el trabajo en cuatro momentos, para generar la práctica de modelación:

Momento I. La interacción con el fenómeno: la experimentación

En este momento los integrantes de cada equipo, a partir de la observación directa, la manipulación desde lo concreto y la descripción, identifican las características propias de cada poliedro platónico, como lo son sus caras, aristas y vértices. Además, deben indicar la importancia de este objeto matemático y cómo lo usan en la vida cotidiana, esto a partir de sus saberes previos.

Momento II. El acto de modelar: la predicción

Los estudiantes construyen uno de los poliedros platónicos, utilizando la técnica del origami modular a partir de la guía de construcción y la orientación del docente; a partir del análisis que hacen de la medida de las hojas iris utilizadas y la medida de las aristas, realizan una interpretación de la fórmula dada para calcular el volumen construido.

Posteriormente, realizan la predicción de cuánto sería la medida de volumen de otro poliedro platónico de la misma forma, pero de menor o mayor tamaño, a partir del conocimiento adquirido, y explican cómo realizaron dicha predicción.

Cabe anotar que se inicia con el concepto de volumen, puesto que los estudiantes de grado quinto han estudiado previamente la potenciación y ello se requiere para calcular el volumen. De esta forma ponen en práctica la potenciación cuando resuelven ejercicios usando la fórmula. Ver Figura 1.

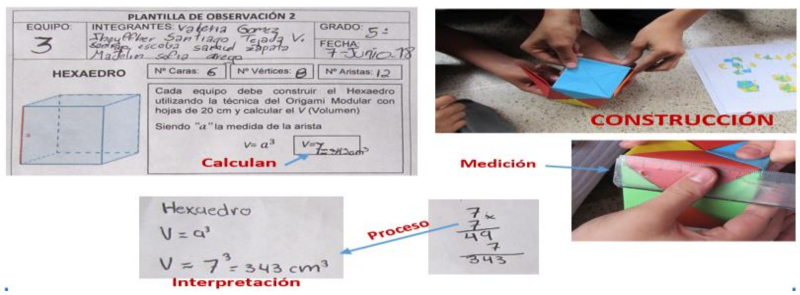


Figura 1. El acto de modelar, la predicción

Fuente: Elaboración propia.

Momento III. La articulación de los modelos y el fenómeno en una red

Los estudiantes nuevamente construyen el poliedro platónico utilizando la técnica del origami modular, con la diferencia de que cada equipo lo debe hacer con hojas iris de diferente tamaño. Una vez terminado y a partir de la medida de las hojas iris utilizadas y la medida de las aristas, proponen la fórmula para calcular el área lateral y el área total. Ver Figura 2.

Figura 2. La articulación de los modelos y el fenómeno en una red.
Fuente: Elaboración propia.

Momento IV. Descentrar la red del fenómeno vía la analogía

Los estudiantes construyen un cuerpo geométrico que no es poliedro platónico, como el ortoedro. "Transfieren" la experiencia vivida en las actividades previas a esta nueva situación de modelación, identificando lo distinto y lo semejante. Calculan el volumen y el área total de este nuevo objeto matemático.

Finalizado este momento, se puede validar la práctica de modelación con todo lo desarrollado por los equipos en los cuatro momentos y sus resultados. Esto genera credibilidad en los estudiantes hacia todo el proceso realizado y la metodología empleada; así mismo, lleva al reconocimiento de la utilidad del origami modular como herramienta pedagógica de clase y del conocimiento matemático desarrollado.

Institucionalización y sostenibilidad

Esta propuesta de experiencia significativa se dio a conocer a toda la comunidad educativa en el año 2015. Buscando la posibilidad de que todos los docentes de Básica Primaria se vincularan de una u otra forma a la iniciativa, se compartió la experiencia por medio de una exposición, en la que se explicó en qué consistía, el porqué de su pertinencia en la institución, y los beneficios que esta puede generar en el desarrollo de competencias matemáticas y en favor de la convivencia escolar.

El efecto de esta experiencia en los estudiantes ha sido significativo, pues solicitan que mínimo una o dos veces por semana se realicen experiencias parecidas en clase. Han trasmitido lo aprendido en las mesas de origami a los demás grupos de la institución en su tiempo libre y/o descansos, en los cuales comparten cómo modelar los poliedros platónicos y lo aprendido en relación a los conceptos geométricos. Incluso se transmite hasta sus hogares, ya que han compartido el conocimiento adquirido durante todo el proceso con los demás integrantes de su familia.

Desde el año 2016, esta experiencia significativa está incluida en el PEI de la institución, como una estrategia de enseñanza-aprendizaje del área de matemáticas en la Básica Primaria, para los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos y a favor de la convivencia escolar. Igualmente, hace parte de actividades institucionales o espacio creados por la propia experiencia significativa, como son exposiciones, muestra pedagógica, semana de la convivencia, olimpiadas matemáticas, concursos de origami y festivales institucionales de aprendizaje y convivencia. Esto genera credibilidad y reconocimiento por toda la comunidad educativa de lo que se está desarrollando al interior de la iniciativa.

En el año 2018, la experiencia significativa obtuvo la Mención Samuel Barrientos Restrepo por parte de la Alcaldía de Medellín, en el marco del Reconocimiento SER MEJOR para la Calidad Educativa, para ampliar su alcance y permitir una mayor inclusión. Este evento es organizado y dirigido por la Secretaría de Educación de Medellín.

Resultados de la experiencia

Se puede decir que se ha logrado alcanzar en gran medida el objetivo general al implementar una estrategia que permite la resignificación de los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos; se construye conocimiento matemático a través de las prácticas intencionadas de modelación al incorporar el origami modular como herramienta pedagógica en el aula.

Con relación a los objetivos específicos se lograron diseñar e implementar actividades que le permite a los estudiantes del grado quinto de Básica Primaria, adquirir mayor significado de los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos. Esto se evidencian en tres aspectos en relación al conocimiento matemático: la construcción de significados, de procedimientos para calcular volumen, área lateral y área total, y la realización de procesos como experimentar, predecir, articular y transferir el conocimiento matemático adquirido a través de las prácticas de modelación.

Se ha logrado propiciar el acercamiento a una temática del área de matemáticas, en la que se genera el análisis y la solución de problemas trabajando en equipo e incorporando el origami modular en las prácticas de aula. Se presenta a la comunidad educativa una herramienta pedagógica de enseñanza-aprendizaje, que permite una construcción del conocimiento matemático y el desarrollo de competencias como la formulación, el tratamiento y la resolución de problemas, la modelación, la comunicación y el razonamiento, así como la formulación, comparación y ejercitación de procedimientos. La estructura de la experiencia significativa es secuencial y progresiva en su nivel de complejidad, por lo cual, le ha permitido a los estudiantes explorar, plegar, calcular, predecir, argumentar, generar conjeturas y posibles respuestas, validar y transferir el conocimiento matemático para resignificar los conceptos geométricos relacionados con los poliedros platónicos.

Al iniciar la experiencia significativa en el año 2015, se hizo un rastreo de los resultados en las Pruebas SABER grado quinto, con respecto al componente Geométrico-Métrico de estudiantes de la institución. El 48% de los estudiantes obtuvo un desempeño insuficiente, lo cual es evidencia de la problemática planteada. En el año 2017, después de implementar la experiencia significativa por 2 años, se logró reducir el porcentaje de estudiantes con ese desempeño a un 38%. Esto muestra un mejoramiento significativo en este importante aspecto. Igualmente, se ha logrado reducir el porcentaje de estudiantes de grado quinto que pierden el área de matemáticas en el periodo en que se desarrolla la temática de cuerpos geométricos y poliedros platónicos, ya que se pasa de un porcentaje de pérdida del 30% a un 16%.

La evaluación de la experiencia significativa (tipo encuesta escrita) realizada a 33 estudiantes del grado quinto, muestra que un 100% quiere que se siga implementando la estrategia en el colegio. Igualmente, el 100% de los estudiantes manifiestan haber fortalecido, por medio de la experiencia, conocimientos y conceptos del área de matemáticas, como medir, sumar y multiplicar. Respecto a su relación con sus compañeros, manifiestan adquisición de valores institucionales, la comprensión del trabajo en equipo y fortalecimiento de la convivencia escolar.

Los padres de familia también hicieron parte de este proceso de evaluación. En una encuesta aplicada a 36 padres de familia de estudiantes del grado quinto, el 100% manifiesta que quieren que se siga implementando la estrategia con sus hijos. El 100% de los padres de familia expresan que identifican en sus hijos mayor interés y ganas por aprender, curiosidad y un mejor aprovechamiento del tiempo libre. Expresan que evidencian en sus hijos mayor atención, concentración y paciencia en las actividades que desarrollan; incluso se interesan por investigar en internet información relacionada con el origami modular y las múltiples posibilidades que brinda para identificar y modelar diferentes cuerpos geométricos, lo cual propicia aprovechamiento de las TIC.

REFERENCIAS

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas sociales de modelación como procesos de matematización en el aula*. (Tesis Doctoral). Cinvestav, Ciudad de México.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa.

Montiel, G. y Buendía, G. (2012) *Un Esquema Metodológico para la Investigación Socio-epistemológica: Ejemplos e ilustraciones*. En Rosas, A. y Romo, A. (2013) Metodología en Matemática Educativa: Visiones y Reflexiones (pp. 61-88). Ciudad de México: Lectorum.

ESTUDIO DEL PERÍMETRO DEL TRIÁNGULO ÓRTICO EN EL MARCO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA Y CON HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Nicolás Carvajal

Colegio Gimnasio Vermont

nc0593@gimnasiovermont.edu.co

El presente documento describe una experiencia de indagación matemática a partir del desarrollo de una monografía en la asignatura de Matemáticas en el Gimnasio Vermont de Bogotá. En esta se investigaron relaciones entre el perímetro del triángulo órtico y el perímetro del triángulo en el que está contenido. Para ello, se desarrolló un método de caracterización de triángulos acutángulos en el plano, utilizando álgebra vectorial. Lo anterior se hizo con apoyo de un programa de elaboración propia en Python 3 y GeoGebra 5, para representar gráficamente las relaciones entre los triángulos descritos.

INTRODUCCIÓN

El estudio que se describe en esta ponencia surge del desarrollo de una monografía en la asignatura de Matemáticas en el Gimnasio Vermont de Bogotá. En esta se quiso contestar la pregunta ¿cuáles son las relaciones entre el perímetro del triángulo órtico y el triángulo que lo contiene? Para ello, primero se desarrolló un método basado en álgebra vectorial para caracterizar triángulos acutángulos en el plano; el estudio se restringió a estos triángulos debido a que con geometría analítica hay que considerar la orientación en la que abren lo ángulos, sea a favor o en contra de las manecillas del reloj, lo que dificulta generalizar para todos los triángulos. Posteriormente, se usó la geometría analítica para encontrar relaciones geométricas en triángulos equiláteros, particularmente en el triángulo órtico. Finalmente, se escribió un programa para verificar los resultados sobre las relaciones entre sus perímetros, utilizando el lenguaje de programación Python 3 y se propusieron conjeturas sobre otros tipos de triángulos.

Carvajal, N. (2019). Estudio del perímetro del triángulo órtico en el marco de la geometría analítica y con herramientas tecnológicas. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 235-242). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

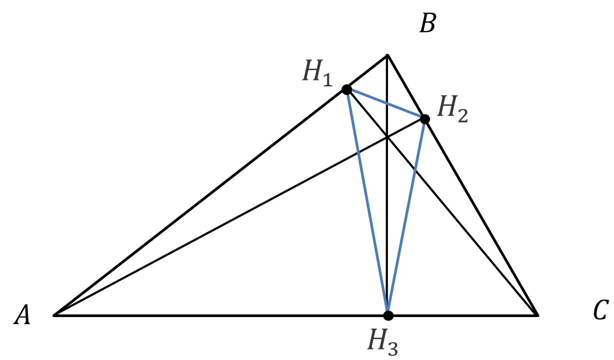


Figura 1. ΔABC y su triángulo órtico $\Delta H_1H_2H_3$

El triángulo órtico de un triángulo ABC es el que tiene por vértices los pies[24] $H_1, H_2\ y\ H_3$ de las alturas de ΔABC (Guirnalda Matemática, 2012). Para que los pies de las alturas pertenezcan a los respectivos lados de ΔABC, es necesario que este sea un triángulo acutángulo, por lo que se tuvo que encontrar un método para determinar cualquier triángulo acutángulo en el espacio bidimensional.

El triángulo acutángulo en el plano cartesiano

Para verificar que ΔABC es acutángulo se hizo uso del álgebra vectorial para encontrar los ángulos de este.

El ΔABC (*Figura 1*) puede representarse en términos de vectores tales que:

$$AB = u$$

$$AC = v$$

$$BC = v - u$$

La representación gráfica se muestra en la *Figura 2*.

[24] Entiéndase pie de la altura del triángulo como el punto de intersección entre la altura y el segmento del triángulo.

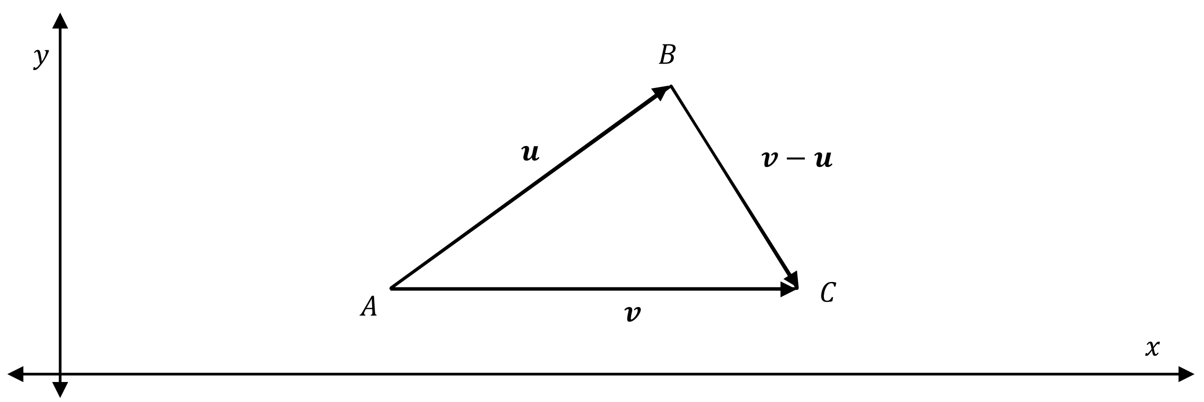


Figura 2. ΔABC en el plano representado en vectores

Si se quiere determinar que ΔABC es un triángulo acutángulo, el producto punto entre todos los vectores debe ser positivo, por lo que se tiene que cumplir que:

$$u \cdot v > 0$$

$$-(v-u) \cdot -v > 0$$

$$-u \cdot (v-u) > 0$$

EL TRIÁNGULO ÓRTICO EN EL PLANO CARTESIANO

Las coordenadas del ΔABC y su triángulo órtico pueden hallarse en términos de los puntos de intersección de las rectas que contienen a los segmentos de los triángulos. De esta forma, para hallar sus respectivos perímetros, se tiene que:

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$

Y:

$$P_{\Delta H_1H_2H_3} = \sqrt{(H_{1x}-H_{2x})^2+(H_{1y}-H_{2y})^2} + \sqrt{(H_{1x}-H_{3x})^2+\left(H_{1y}-H_{3y}\right)^2} + \sqrt{(H_{2x}-H_{3x})^2+(H_{2y}-H_{3y})^2}$$

El perímetro del triángulo órtico en un triángulo equilátero

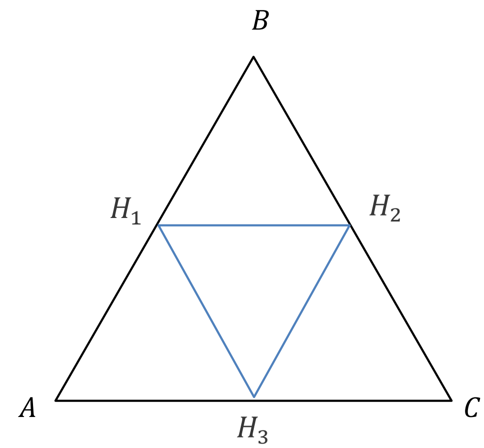


Figura 3. ΔABC equilatero y su triángulo órtico $\Delta H_1H_2H_3$

Las anteriores ecuaciones se pueden simplificar por ser ΔABC equilátero de tal modo que:

$$P_{\Delta ABC} = 3\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)$$

Además, los pies de las alturas de un triángulo equilátero corresponden al punto medio de cada uno de los segmentos ya que la altura corresponde a la bisectriz del triángulo (Torres, 2018). Por esta razón, las coordenadas para H_1 cuando ΔABC es equilátero pueden hallarse de la siguiente manera:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Al encontrar las distancias entre H_1 y H_2 se obtiene que:

$$d(H_1, H_2) = \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)^2}$$

Que se puede simplificar a:

$$d(H_1, H_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)$$

Y como estas distancias son iguales para todos los segmentos, se puede concluir que:

$$P_{\Delta H_1 H_2 H_3} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)$$

Así, finalmente:

$$P_{\Delta H_1 H_2 H_3} : P_{\Delta ABC} = 1:2$$

USO DE LA TECNOLOGÍA PARA ENCONTRAR CONJETURAS

Lo encontrado anteriormente se pudo plasmar en un programa de elaboración propia, en Python 3. Al ingresar las coordenadas de cualquier triángulo acutángulo, este permite calcular las coordenadas de su triángulo órtico y la relación entre los perímetros de los dos triángulos. El programa, además, permite generar triángulos aleatorios para analizar sus comportamientos. Este se muestra a continuación:

```
from math import sqrt
from random import randint


def ortico(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3):

    ang1 = (x_2-x_1)*(x_3-x_1) + (y_2-y_1)*(y_3-y_1)
    ang2 = (-x_3+x_2)*(-x_3+x_1) + (-y_3+y_2)*(-y_3+y_1)
    ang3 = (-x_2+x_1)*(x_3-x_2) + (-y_2+y_1)*(y_3-y_2)
     if ang1 > 0 and ang2 > 0 and ang3 > 0:

        h1x = (y_1**2*x_2 - y_1*y_2*x_1 - y_1*y_2*x_2 + y_1*x_1*y_3 -
               y_1*x_2*y_3 + y_2**2*x_1 - y_2*x_1*y_3 + y_2*x_2*y_3 +
               x_1**2*x_3 - 2*x_1*x_2*x_3 + x_2**2*x_3)/((y_1-y_2)**2+(x_1-x_2)
                                                        ** 2)
        h1y = (y_1**2*y_3 - 2*y_1*y_2*y_3 - y_1*x_1*x_2 + y_1*x_1*x_3 +
               y_1*x_2**2 - y_1*x_2*x_3 + y_2**2*y_3 + y_2*x_1**2 - y_2*x_1*x_2
               - y_2*x_1*x_3 + y_2*x_2*x_3)/((y_1-y_2)**2+(x_1-x_2)**2)

        h2x = (y_1*y_2*x_2 - y_1*y_2*x_3 - y_1*x_2*y_3 + y_1*y_3*x_3 +
               y_2**2*x_3 - y_2*x_2*y_3 - y_2*y_3*x_3 + x_1*x_2**2 -
               2*x_1*x_2*x_3 + x_1*x_3**2 + x_2*y_3**2)/((y_2-y_3)**2+(x_2-x_3)
                                                        ** 2)
        h2y = (y_1*y_2**2 - 2*y_1*y_2*y_3 + y_1*y_3**2 + y_2*x_1*x_2 -
               y_2*x_1*x_3 - y_2*x_2*x_3 + y_2*x_3**2 - x_1*x_2*y_3 +
               x_1*y_3*x_3 + x_2**2*y_3 - x_2*y_3*x_3)/((y_2-y_3)**2+(x_2-x_3)
                                                       ** 2)

        h3x = (y_1**2*x_3 + y_1*y_2*x_1 - y_1*y_2*x_3 - y_1*x_1*y_3 -
               y_1*y_3*x_3 - y_2*x_1*y_3 + y_2*y_3*x_3 + x_1**2*x_2 -
               2*x_1*x_2*x_3 + x_1*y_3**2 + x_2*x_3**2)/((y_1-y_3)**2+(x_1-x_3)
                                                        ** 2)
        h3y = (y_1**2*y_2 - 2*y_1*y_2*y_3 + y_1*x_1*x_2 - y_1*x_1*x_3 -
               y_1*x_2*x_3 + y_1*x_3**2 + y_2*y_3**2 + x_1**2*y_3 - x_1*x_2*y_3
               - x_1*y_3*x_3 + x_2*y_3*x_3)/((y_1-y_3)**2+(x_1-x_3)**2)

        perimetro_original = sqrt((x_1-x_2)**2 + (y_1-y_2)**2) + sqrt((x_1-x_3)
                                                                      ** 2
                                                                      +
                                                                      (y_1-y_3)
                                                                      ** 2) + \
            sqrt((x_2-x_3)**2 + (y_2-y_3)**2)

        perimetro_ortico = sqrt((h1x-h2x)**2 + (h1y-h2y)**2) + sqrt((h1x-h3x)
                                                                    ** 2
                                                                    + (h1y-h3y)
                                                                    ** 2) + \
            sqrt((h2x-h3x)**2 + (h2y-h3y)**2)

        print("Relacion entre perimetros = " + str(perimetro_original /
                                                   perimetro_ortico) +
              " | " + str((x_1, y_1)) + str((x_2, y_2)) + str((x_3, y_3)))


x1 = 0
y1 = 0
x2 = 0
y2 = 0
x3 = 0
y3 = 0
for i in range(500):
    x1 = randint(-1000, 1000)
    y1 = randint(-1000, 1000)
    x2 = randint(-1000, 1000)
    y2 = randint(-1000, 1000)
    x3 = randint(-1000, 1000)
```

Figura 4. Programa en Python 3 para triángulos órticos

Por el número de variables utilizadas para triángulos isósceles, se hizo uso de este programa y de GeoGebra 5 y se conjeturó que cuando:

$$\lim_{h \to \infty} P_{\Delta H_1 H_2 H_3} = 2b$$

Donde h es la altura del ΔABC isósceles, b la base de ΔABC y $P_{\Delta H_1 H_2 H_3}$ el perímetro del triángulo órtico de ΔABC. Un ejemplo se muestra en la Figura 5.

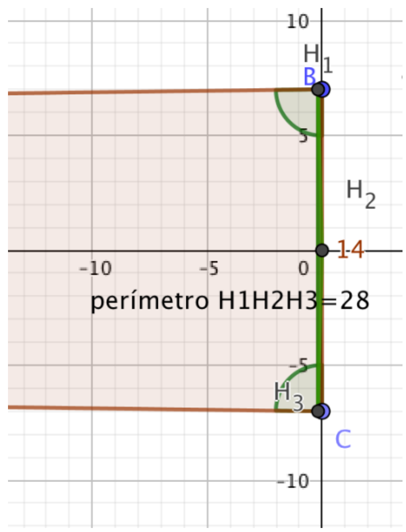


Figura 5. Medida de la base de un triángulo isósceles (14) y perímetro de su triángulo órtico (28)

Además, se conjeturó que en un triángulo que no es equilátero, la proporción entre los perímetros de $\Delta H_1H_2H_3$ y ΔABC ya no era de 1:2, como se demostró para triángulos equiláteros, sino que disminuye a medida que la altura de ΔABC crece, con base fija.

CONCLUSIONES

Fue posible, a través del álgebra vectorial, caracterizar triángulos acutángulos en el espacio. Usando la geometría analítica, se pudo demostrar que, para todo triángulo equilátero, el perímetro de su triángulo órtico es la mitad del perímetro del triángulo dado. Finalmente, para triángulos isósceles específicamente, se obtuvo que, al mantener la base del triángulo fija y aumentar su altura, el perímetro de su triángulo órtico tiende a tener 2 veces la medida de la base del triángulo isósceles.

En suma, el uso de herramientas computacionales facilitó la conjetura de relaciones entre el perímetro del triángulo órtico y el triángulo que lo contiene a partir de la geometría analítica. El lenguaje de programación Python 3 y el software matemático GeoGebra 5 permitieron conjeturar resultados de manera ágil y práctica, dando solución a la pregunta de investigación desarrollada durante la monografía.

Finalmente, quedaron abiertas inquietudes tales como ¿qué pasará con los triángulos escalenos? y ¿cuáles son las relaciones entre el área del triángulo órtico y el triángulo que lo contiene? Estas pueden ser abordadas en futuras investigaciones.

REFERENCIAS

Guirnalda Matemática (2012). *El triángulo órtico.* Recuperado de http://apolonio.es/guirnalda/el-triangulo-ortico/

Torres, V. J. D. (2018). *Triángulo equilátero: características, propiedades, fórmulas y área.* Recuperado de https://www.lifeder.com/triangulo-equilatero/#La_bisectriz_y_la_altura_son_coincidentes.

LA CONSTRUCCIÓN DEL CONO CIRCULAR RECTO COMO LUGAR DE ARTICULACIÓN ENTRE EL PLANO Y EL ESPACIO

Edith Noemí Gorostegui

Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura (FACENA) de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE).

gorosteguie@gmail.com

La formación de profesores de Matemática en relación con el campo de la geometría es un tema de discusión al interior del grupo de investigación GRUDIDMAT de la FACENA de la UNNE. Las discusiones se llevan a cabo y se retroalimentan con trabajos de investigación, direcciones de tesis y becas de distintos miembros del grupo. En esta ponencia exponemos un trabajo sobre el cono circular recto que se inició en el marco de la dirección de un trabajo de investigación de una becaria y se continúa en la actualidad. Desarrollamos algunos tópicos del marco didáctico-matemático del estudio realizado. También señalamos algunas dificultades detectadas en estudiantes avanzados respecto de la articulación espacio-plano en el caso del desarrollo plano y construcción del cono circular recto.

INTRODUCCIÓN

La formación de profesores en Matemática en relación con el campo de la geometría es un tema de discusión al interior del grupo de investigación GRUDIDMAT (Grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática) de la FACENA (Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura) de la UNNE (Universidad Nacional del Nordeste) en Argentina. Estas discusiones se llevan a cabo y se retroalimentan en trabajos de investigación, direcciones de tesis y becas de distintos miembros del grupo.

Entre las investigaciones realizadas, se puede citar la tesis de Licenciatura en Didáctica de la Matemática siguiente: “Estudio de las condiciones de funcionamiento de un sistema didáctico orientado a la entrada de los alumnos al razonamiento deductivo” (Gorostegui, 2007) que estuvo centrada en la problemática de la

Gorostegui, E. (2019). La construcción del cono circular recto como lugar de articulación entre el plano y el espacio. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 234-251). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

introducción de la demostración en el 3º ciclo de la escuela secundaria[25] a partir de un problema geométrico de comparación de áreas. Otro trabajo de Licenciatura en Didáctica de la Matemática, dirigido por la profesora Vanesa Clementín (2017), titulado “Un estudio didáctico-matemático de la desigualdad triangular: elaboración y análisis de una secuencia didáctica para alumnos de nivel secundario”, nos permitió avanzar con una propuesta de trabajo en el nivel secundario en geometría euclidiana y extraer conclusiones respecto de cómo los alumnos pueden apropiarse de los objetos geométricos en clases donde los conocimientos se construyen y el rol fundamental del docente en crear las condiciones para que esto ocurra.

Por otra parte, el trabajo de María José Maciel, codirectora de una Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas del Consejo Interuniversitario Nacional (CIN, 2017, Argentina), cuyo títutlo es “Los datos de la historia para repensar la enseñanza de la geometría en el secundario: Modelizaciones Sucesivas”, no permitió constatar el escaso conocimiento en el campo de la geometría sintética y la preponderancia algebraica para enfrentarse a los problemas de alumnos y profesores de la región nordeste de nuestro país.

En esta ponencia exponemos un trabajo sobre el cono circular recto que se inició en el marco de la dirección de esta Beca y que en la actualidad se continúa. Desarrollamos algunos tópicos del marco didáctico-matemático del estudio realizado. Así también, señalamos algunas dificultades detectadas en estudiantes avanzados respecto de la articulación espacio-plano en el caso del desarrollo plano y de la construcción del cono circular recto.

[25] En Argentina corresponde a alumnos de entre 14 y 15 años.

La ausencia de un trabajo pertinente con los objetos geométricos en la escuela secundaria y el análisis de sus causas se viene exponiendo en diferentes publicaciones (Broitman et al., 2009; Itzcovich, 2005) y documentos oficiales de nuestro país (Dirección de Currícula de CABA, 2005; Ministerio de Educación de la Nación, Argentina, 2012). Se menciona por ejemplo:

> Los diversos agentes del sistema educativo compartimos una preocupación por la casi ausencia de la geometría en la escuela, porque su presencia se da en general bajo la forma de una enseñanza basada en la "presentación" de los objetos geométricos y sus propiedades sin oportunidad para los alumnos de atribuir sentido a esos conocimientos. (Dirección de Currícula de CABA, 2005, p. 5).

A nivel internacional también podemos encontrar distintas publicaciones que se manifiestan en el sentido antes citado (Houdement y Kuzniak, 2006; Gamboa y Ballestero, 2010; Camargo y Acosta, 2012). Al respecto, Gamboa y Ballestero (2010), en un trabajo sobre la percepción de los alumnos de secundaria sobre la enseñanza de la geometría concluyen:

> […] Las clases de geometría en la educación secundaria se han basado en un sistema tradicional de enseñanza, donde docentes presentan la teoría, desarrollan ejemplos y aportan los ejercicios que deben ser resueltos por estudiantes. Estas actividades enfatizan en la aplicación de fórmulas y aspectos memorísticos, lo que trae como consecuencia que procesos de visualización, argumentación y justificación no tengan un papel preponderante en la enseñanza de la disciplina. (p. 139).

Si se analizan las propuestas de actividades de la década del 50 y del 60 del siglo pasado en nuestro país, una de las tareas habituales en el estudio de la geometría escolar consistía en hacer desarrollos planos de distintos cuerpos para luego construirlos. Este tipo de actividades fue perdiendo valor a tal punto que en la actualidad está ausente por completo. No analizamos aquí las probables causas de esta ausencia. Nos interesa, sin embargo, hablar del potencial como actividad que permite hacer foco en cuestiones centrales del trabajo matemático y geométrico en particular. Por eso, consideramos pertinente su inclusión en la formación de futuros profesores de matemática. Nos referimos a la producción de modelos geométricos, a la anticipación, a la validación y a la relación de la geometría con otros campos (aritmética o álgebra).

En nuestra universidad el estudio de las cónicas se prevé en el campo de la geometría analítica. En el caso del cono circular recto una típica secuencia de estudio consiste en definirlo como la superficie engendrada por un triángulo rectángulo que gira en torno a uno de sus catetos, luego se hace una presentación de la fórmula de cálculo de área de la superficie cónica, seguida de ejercicios de aplicación. Al respecto nos preguntamos: ¿a qué conocimiento geométrico sobre el cono acceden los alumnos a partir de este tipo de actividades? ¿Lo podrán construir dado ciertos datos? Por otro lado, ¿para qué calcular el área de la superficie cónica? ¿Con qué objetivo? Y si se supiera el área ¿se podrá construirlo?

SOBRE LA PROPUESTA DE TRABAJO CON LOS ALUMNOS

Una primera tarea propuesta consistió en proponer a los alumnos que dibujen el desarrollo plano de un cilindro circular recto. El objetivo aquí es que puedan pensar en el desarrollo plano de la cara lateral, en este caso de un cuerpo conocido y fácil de imaginar como el cilindro. Dicho desarrollo es un rectángulo cuya altura coincide con la del cilindro y cuya base tiene una longitud igual a la longitud de la circunferencia de la base. Una conclusión que emerge de esta tarea es que si se quiere construir un cilindro con determinadas medidas hay que construir un rectángulo y un círculo estableciendo las relaciones entre las longitudes correspondientes (del lado del rectángulo y del perímetro de la circunferencia de la base que se une a este lado).

Una segunda tarea fue la siguiente: Si se quisiera construir un cono recto, ¿cómo sería el desarrollo plano de este?

El desarrollo plano de la cara lateral del cono recto es un sector circular que tiene como centro el vértice del cono y como radio la generatriz del mismo. Sin embargo, la respuesta errónea más frecuente de los alumnos fue que se corresponde con un triángulo con vértice en el vértice del cono y dos lados congruentes de longitud igual a la longitud de la generatriz; es decir, un triángulo isósceles.

Lo interesante aquí es ver las distintas exploraciones que realizan los alumnos para arribar a conclusiones, los intercambios, la elaboración de conjeturas, las explicaciones de por qué debería ser tal o cual figura y por qué no otras, etc. En este punto los alumnos no solo tienen que establecer que el desarrollo plano corresponde a un sector circular sino también por qué tiene que ser esta la figura que les permite construir un cono circular recto.

Otro aspecto interesante —propio de la matemática en general y de la geometría en particular— es la anticipación. No se trata de construir efectivamente el cono, sino de anticipar, de pensar condiciones, de afirmar que si el desarrollo plano tiene tales características se podrá construir, es decir, apoyarse en conocimientos geométricos para validar su forma.

Lo que no anticipan los alumnos es que la distancia del vértice del cono a cualquier punto de la circunferencia de la base es la misma (longitud de la generatriz) y que esta igualdad se "traduce", en el desarrollo plano de este cuerpo, en un sector circular. No pueden coordinar una vista plana con la proyección lateral de este cuerpo. Por ejemplo, un corte con un plano perpendicular al plano de la base por el diámetro de la circunferencia de la base corresponde efectivamente a un triángulo isósceles pero su proyección lateral (patrón) corresponde a un sector circular.

Es interesante la comparación con el cilindro. En este caso el corte con un plano perpendicular a la base (rectángulo) coincide con el patrón de desarrollo (rectángulo). Se puede decir también que en el caso del cilindro no necesitan "ver" que la longitud de los segmentos que unen puntos de las circunferencias de las bases (segmentos de la cara lateral) son iguales, dado que coinciden las longitudes de estos segmentos con los del patrón, es decir, con la longitud de los lados del rectángulo correspondiente al desarrollo plano. Sin embargo, en el cono circular recto hay que considerar que las distancias del vértice a cada punto de la circunferencia de la base son iguales y al ser un conjunto de puntos que están a una misma distancia de un determinado punto (vértice del cono) tienen que relacionar con una circunferencia cuyo $r = g$ (generatriz del cono) con centro en v (vértice del cono).

Una tercera consigna para los alumnos consiste en solicitarles que construyan un cono a partir de ciertos datos: altura y radio de la circunferencia de la base. Para responder a esta tarea tienen que poner en relación las distintas miradas sobre el cuerpo. Por un lado, la altura correspondería a la altura del triángulo del corte con un plano perpendicular al plano de la base por el diámetro de la circunferencia de la base, pero también tienen que considerar el ángulo de abertura del sector circular del desarrollo plano. Hay una relación de proporcionalidad a establecer entre la amplitud del sector circular y su longitud, ya que como lo que no se sabe es el ángulo de apertura del sector circular, pero es un dato la longitud del mismo, se deberá establecer lo siguiente: a 360° (un giro completo) le corresponde la longitud del sector circular completo, es decir, la longitud de la circunferencia de radio g, y al ángulo de apertura de la cara lateral del cono, le corresponderá la longitud de la circunferencia de la base del cono. Escrito en símbolos, esto es: $\frac{360°}{2\pi g} = \frac{\hat{\alpha}}{2\pi r_b}$ siendo $\hat{\alpha}$ la amplitud del sector circular, de donde resulta:

$$\hat{\alpha} = 2\pi r_b \frac{360°}{2\pi g} \Longrightarrow \hat{\alpha} = \frac{r_b}{g} 360°$$

Coordinar las relaciones entre distintas variables, dependiendo de los datos para la construcción del cono: ángulo de apertura del desarrollo plano y arco que subtiende, altura del cono, longitud de la circunferencia de la base y de la directriz, etc., representa para los alumnos un alto desafío.

CONCLUSIONES

La información proporcionada por las experiencias realizadas con las actividades anteriores da cuenta de las dificultades de los alumnos a la hora de enfrentarse a un trabajo geométrico en el que no se trata de aplicar fórmulas para obtener resultados. La problemática que estamos planteando va mucho más allá de esta idea "aplicacionista" en la enseñanza. Se trata para nuestro equipo de investigación de proponer situaciones a los alumnos de tal manera que les permitan pensar geométricamente. Esto implica, en este caso, articular distintas miradas sobre un objeto geométrico con vistas a su construcción, tarea para nada fácil para los estudiantes tanto del secundario como para los del profesorado de matemáticas.

Las producciones de los alumnos, sus dudas, marchas y contramarchas dejan al descubierto la escasa disponibilidad de conocimientos matemáticos para abordar las tareas. Nos referimos por ejemplo a reconocer que la circunferencia como el lugar de los puntos del plano que equidistan de un punto es un concepto que permite identificar y fundamentar que el desarrollo plano de un cono circular recto no puede ser un triángulo sino un sector circular. Nos referimos también a la relación de proporcionalidad no reconocida por los estudiantes como una herramienta que permite poner en relación ciertos datos para los cálculos. Otro conocimiento no disponible para los estudiantes es la coordinación de distintos puntos de vistas o perspectivas del cuerpo en cuestión, por ejemplo, al imaginar las figuras geométricas resultantes a partir de distintos cortes con planos rectos, en este caso del cono circular recto.

Estos hallazgos nos interpelan como formadores de formadores en cuanto al lugar de la geometría en la enseñanza y al tipo de trabajo geométrico que se requiere en la formación de profesores de matemática y en la escolaridad obligatoria. Esto si consideramos que tratar con estos objetos es una entrada interesante a la cultura matemática, a una porción de esta como es la geometría y que durante muchos siglos permitió el avance de los conocimientos matemáticos de los que hoy disponemos y que, al mismo tiempo, dio lugar a la construcción de otros.

Claramente el estudio de cuerpos en el espacio, hoy día relegado en la formación de profesores, es para nuestro grupo de investigación altamente relevante. Consideramos que sería conveniente que las propuestas de trabajo en este aspecto se dirijan a lograr que los alumnos adquieran una imagen mental de los cuerpos geométricos en el espacio desde distintos puntos de vista (desde un costado, de frente, desde arriba, etc.) en articulación con su representación plana (distintas proyecciones planas del cuerpo).

Contribuir con propuestas para la discusión sobre estos temas con otros colegas es nuestro propósito. Sin duda tanto nuestras experiencias como los intercambios académicos enriquecen nuestra mirada sobre la formación de profesores.

Referencias

12(ntes) DIGITAL para el día a día (2009). *Entrevista a Horacio Itzcovich y Claudia Brotiman*. Buenos Aires, Argentina. Recuperado de http://ecaths1.s3.amazonaws.com/novedadesdocentespsol/12ntes-digital-3.pdf

Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis, TED,* 32*,* 4-8.

Clementín, V. (2017). *Un estudio didáctico-matemático de la desigualdad triangular: elaboración y análisis de una secuencia didáctica para alumnos de nivel secundario*. Corrientes, Argentina: Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste.

Dirección de Currícula de CABA (2005). *Documento de Trabajo N.° 5: Enseñanza de la Geometría en el 2^do ciclo*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires (CABA), Argentina. Recuperado de http://bde.operativos-ueicee.com.ar/documentos/67-matematica-documento-de-trabajo-no-5-la-ensenanza-de-la-geometria-en-el-2o-ciclo-actualizacion-curricular-educacion-general-basica-1998

Gamboa Araya, R. y Ballestero Alfaro, E. (2010). *La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes* (Tesina De Licenciatura). Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.

Gorostegui, E. (2007). *Estudio de las condiciones de funcionamiento de un sistema didáctico orientado a la entrada de los alumnos al razonamiento deductivo*. Corrientes, Argentina: Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste.

Houdement y Kuzniak (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 11, 175-193.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación el estudio didáctico de la geometría*. Buenos Aires, Argentina: Editorial el Zorzal.

Maciel, M. J. (2017). *Los datos de la historia para repensar la enseñanza de la geometría en el secundario: Modelizaciones Sucesivas*. Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina.

GEOMETRÍA FUERA DE VISTA

Lisset González, Laura Canchón, Tania Plazas

Universidad Pedagógica Nacional

lissetgonzalez2019@gmail.com, laura12076@hotmail.com, tplazas@pedagogica.edu.co

Este documento presenta los resultados obtenidos en la aplicación de una secuencia de tareas acompañadas con un material didáctico llamado SAGOOS a un grupo de estudiantes con discapacidad visual. Estas tareas tenían como objetivo desarrollar procesos de conjeturación y conceptualización en torno al objeto geométrico cuadrilátero. Este reporte presenta los referentes teóricos usados para el diseño de las tareas y el material, la descripción de la población que hizo parte del experimento, ejemplos de las tareas propuestas y las respectivas conclusiones posteriores.

MARCO TEÓRICO

Discapacidad visual

De manera general, el MEN (2017) define la discapacidad como "un conjunto de características o particularidades que constituyen una limitación o restricción significativa en el funcionamiento cotidiano y la participación de los individuos, así como en la conducta adaptativa, y que precisan apoyos específicos y ajustes razonables de diversa naturaleza." (p. 20). Las personas con discapacidad visual presentan un daño total o severo de la función visual. Esto incluye a las personas ciegas o con baja visión. Son personas que tienen características cognitivas que requieren otros estímulos sensoriales, diferentes a los relacionados con la visión.

El material didáctico es un recurso que sirve para suplir "las necesidades comunicativas y expresivas del alumno, facilitar la comprensión de los contenidos." (Campo, 1986, p. 190). Debe apoyar la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos, las habilidades y las destrezas. El material didáctico para estudiantes en condición de discapacidad visual debe favorecer al sentido del tacto pues sus manos son su principal instrumento de experimentación. Revuelta (1993) menciona dos

González, L., Canchón, L. y Plazas, T. (2019). Geometría fuera de vista. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 253-260). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

adaptaciones particulares: “la mano debe convertirse en el órgano primario de percepción, sin perder por ello su función ejecutora, la coordinación visomotora se sustituye en el niño ciego por coordinación bimanual y coordinación oído-mano.” (p. 10) El profesor debe tener presente estos dos aspectos para la construcción o adaptación de un material didáctico.

Procesos matemáticos

Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) definen conjeturar como “establecer enunciados de carácter general” (p. 17). Para la construcción de conjeturas se realizan principalmente dos procesos: 1)la exploración que consiste en construir una representación y a partir de ella encontrar propiedades, relaciones entre ellas e invariantes. 2) La visualización que parte de una representación gráfica y, por medio de acciones que lleva a cabo el estudiante, tales como observar, detallar o percibir, permite detectar propiedades geométricas de un objeto. De igual manera, le permite reconocer figuras geométricas y hacer una comparación con, bien sea la representación matemática, o con la imagen conceptual que ha generado.

Hit (citado por Barrios, Muñoz y Zetién, 2008) considera que “la visualización no es una actividad cognitiva trivial: visualizar no es lo mismo que ver” (p.17). Apoyados en esto, para el contexto de la discapacidad visual, Santacruz y Sinisterra (2013) afirman que “visualizar se refiere a las manipulaciones que cognitivamente puede hacer el niño alrededor de la representación de un objeto geométrico, la cual se puede construir por distintos canales, no solo visuales” (p. 54). Es decir que el estudiante en condición de discapacidad visual puede realizar una exploración de índole geométrico por medio de la percepción de los objetos o representaciones de estos, usando la percepción háptica.

Según Leikin y Winicki-Landman (citado por Silva, 2013), definir “es mucho más que asignar un nombre” (p. 5). Es un proceso de construcción y formulación de características del objeto que contribuyen a su significado. Existen dos procesos diferentes para definir conceptos: definir de manera descriptiva un concepto (a posteriori) y de manera constructiva (a priori) (De Villiers, 1998, 2004, citado por Silva, 2013, p. 34). La primera

> significa que se define después de haber conocido propiedades del concepto por algún tiempo. En otras palabras, la imagen del concepto está desarrollada antes de formular una definición del concepto y la segunda forma significa que cierta definición de un concepto se cambia a través de la exclusión, generalización, especialización, sustitución o adición de propiedades, construyendo un nuevo concepto en el proceso. En este

caso, la definición de un nuevo concepto precede a la posterior exploración de las propiedades adicionales y al desarrollo de la imagen del concepto. *(Silva, 2013, p. 34).*

DESCRIPCIÓN DE LA POBLACIÓN

Esta experiencia se realizó en el colegio José Félix Restrepo, colegio mixto, ubicado en el barrio Sosiego de Bogotá, Colombia. Esta institución permitió realizar la implementación de las actividades con un grupo de estudiantes con discapacidad visual: una estudiante de grado sexto (Sofía que tiene ceguera total) y tres estudiantes de grado séptimo (uno de los participantes tenía ceguera parcial y los otros ceguera total, entre ellos Diana). El rango de edades de los estudiantes era entre 12 y 13 años. No tenían nociones de geometría elemental, como la definición de congruencia, de segmento, ángulo, entre otras, ni concepción de medida. De igual manera, no habían utilizado herramientas como la regla y el transportador.

TAREAS PROPUESTAS

En las sesiones iniciales, se les explicó a los estudiantes en qué consistía el material didáctico y cómo funcionaba. SAGOOS (Segments – Angles – Geometry – Out – Of –Sight) es un conjunto de estructuras construidas en MDF (tablero de fibra de densidad media), diseñado por las autoras de esta ponencia. Cada estuche de SAGOOS contiene: 4 segmentos (estructuras que cambian de longitud), 4 ángulos (pieza que gira; de esta manera puede cambiar su amplitud), 4 trabas (pieza para lograr que las medidas de los segmentos queden fijas), 1 regla (con puntos en relieve separados por un espacio de un centímetro) y 1 transportador (adaptado para usarse con el material y el tipo de población). Para construir cualquier cuadrilátero, basta con encajar los ángulos en los huecos ubicados en los extremos de los segmentos. Dependiendo de la figura que se desee construir, la longitud del segmento puede variar e igualmente la amplitud de los ángulos.
A continuación, presentamos algunas de las tareas propuestas.

Tarea 1. Construcción y definición de cuadriláteros

La sesión se inicia entregando cuatro ángulos y cuatro segmentos a cada estudiante. Dado que previamente habían logrado encajar el ángulo en los orificios de los segmentos, se les dio la indicación de jugar con las ocho estructuras y realizar las construcciones que quisieran. Posteriormente, se les pidió que construyeran una figura utilizando todas las estructuras:

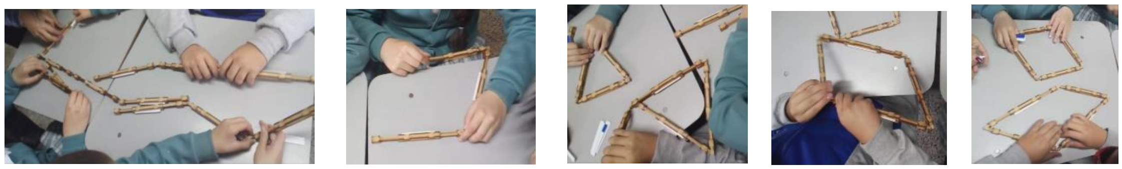


Figura 1. Construyendo figuras y cuadriláteros

Profesora:	¿Cuántos segmentos y cuantos ángulos tiene la figura que tienen sobre la mesa?
Sofía:	Cuatro.
Profesora:	Listo. Y, si le agregamos la característica de que sea una figura cerrada, ¿cómo me definirían esa figura que tienen en la mesa?
Sofía:	Es una figura cerrada que tiene cuatro segmentos y cuatro ángulos.
Profesora:	Perfecto. A esta figura le pondremos el nombre de cuadrilátero.

A partir de las diferentes construcciones hechas por los estudiantes, se evidenció que conocían algunos cuadriláteros, puesto que al decirles que nombraran qué era lo que tenían en la mesa, decían que tenían rectángulos o cuadrados. Como las respuestas eran diferentes, se comentó que todas las figuras que habían nombrado se podrían agrupar en un solo conjunto, el de los cuadriláteros, y que después se encontraría cómo diferenciar cada una de ellas.

Tarea 2. Definición de rectángulo y propiedad de los segmentos opuestos

En la mesa de trabajo se habían construido y pegado dos rectángulos (uno por pareja). Inicialmente, se les pidió a los estudiantes que midieran el ángulo que estaba ubicado a su derecha y luego el de la izquierda. En ambos casos llegaron a que la medida era de 90°; por ende, concluyeron que los cuatro ángulos eran rectos. Una vez identificada dicha característica, se les dio tiempo para que tocaran la figura y establecieran cuántos ángulos y cuántos segmentos la conformaban.

Figura 2. Uso de instrumentos para construir la definición de rectángulo

Profesora:	Muy bien y además de ser cuadrilátero, ¿cuál característica acabaron de encontrar con respecto a la medida de los ángulos?
Sofía:	Que todos miden 90.
Diana:	Que todos son rectos.
Profesora:	Correcto. Y, si unimos esas características y le ponemos el nombre de *rectángulo* a esa figura, ¿cómo la definirían?
Sofía:	Un rectángulo es un cuadrilátero que tiene cuatro segmentos y cuatro ángulos y todos sus ángulos son rectos.
[…]	
Profesora:	Exacto. Entonces si decimos cuadrilátero, ya sabemos que tiene cuatro ángulos y cuatro segmentos y no es necesario decirlo de nuevo. Pueden decir que es un cuadrilátero con los cuatro ángulos rectos o que es una figura con cuatro ángulos y cuatro segmentos y que sus ángulos miden 90° o son rectos. Pero no es necesario decir las dos cosas. ¿Claro hasta ahí?
[…]	
Sofía:	Un rectángulo es una figura cerrada con cuatro ángulos y cuatro segmentos y cuatro ángulos rectos.

Luego se procedió a hallar la característica de estos con respecto a las medidas de sus segmentos. Para esto se le asignaron dos segmentos a cada estudiante, para que los midieran.

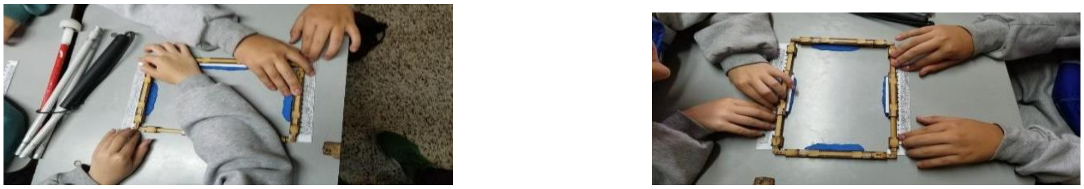


Figura 3. Determinación de una propiedad de los rectángulos

Profesora:	¿Cuál fue la medida del segmento que tienen en frente? ¿Cuál fue la medida de los segmentos que están ubicados a la izquierda?
Diana:	23 centímetros, 14 centímetros. Esos segmentos [los opuestos] también serían iguales.
Profesoras:	Exacto. Esos segmentos que están ubicados, así como están sentados ustedes, uno en frente del otro, se llaman segmentos opuestos. ¿Claro a cuáles segmentos nos referimos? Bueno, queremos que nos señalen cuáles son los segmentos opuestos en ese rectángulo que tienes sobre la mesa.
Diana:	[Señaló correctamente como segmentos opuestos aquellos que estaban ubicados frente a él, pero a la hora de señalar los que se encontraban a la izquierda y derecha se le dificultó un poco].
[...]	
Estudiante 1:	Los que están en frente.
Estudiante 2:	Los opuestos.
Estudiante 3	Que los segmentos opuestos miden igual.
[...]	

Profesora:	Listo, ya tienen las características, ahora ¿cómo nos definirían un rectángulo?
Estudiantes:	Es un cuadrilátero que tiene los segmentos de en frente con iguales medidas

En este punto de la sesión, se evidenció que los estudiantes lograron, en gran medida, desarrollar el proceso de conjeturación. Cada pareja de estudiantes identificó la característica en el rectángulo que le correspondía, es decir, que lograron hacerlo para dos casos particulares, y partiendo de esto lograron llegar a una generalización, reconociendo que dicha característica se cumplía para cualquier rectángulo. Esto les permitió formular la conjetura mencionada previamente, usando sus propias palabras.

Conclusiones

Consideramos que en el transcurso de las sesiones se logró, en parte, que los estudiantes desarrollaran el proceso de definir de manera descriptiva, como lo propone de Villiers (1998, 2004, citado por Silva, 2013), dado que se les presentaron las estructuras que representaban las figuras geométricas y, por medio del sentido del tacto y usando los instrumentos (regla y transportador), realizaron exploración y visualización para descubrir las características de las figuras geométricas estudiadas (rectángulo, cuadrado y rombo). Después de esto, formularon la definición del concepto geométrico correspondiente.

Los estudiantes expresaron la necesidad de usar el material para aprender geometría. Incluso algunos docentes de la institución estaban interesados en el material, debido a su funcionalidad, pues el niño puede manipularlo y hacer construcciones de figuras geométricas haciéndose una imagen mental de estas mismas. De esta manera, los estudiantes con discapacidad visual dejan de tener que limitarse a la memorización y repetición de conceptos geométricos para aprenderlos, y son partícipes de la construcción de significado. Además, el material ayuda a generar inclusión en el aula.

Referencias

Barrios, E. A., Muñoz, G. y Zetién, I. G. (2008). *El proceso cognitivo de la visualización por estudiantes de nivel superior mediante el uso de software dinámico (CABRI) en la resolución* *de problemas geométricos.* (Maestría en Educación). Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

Campo, J. E. (1986). *La enseñanza de las matemáticas a los ciegos.* Recuperado de http://sid.usal.es/idocs/F8/FDO1443/ense%C3%B1anza_matematicas_ciegos.pdf

MEN (2017). *Documento de orientaciones técnicas, administrativas y pedagógicas para la atención educativa a estudiantes con discapacidad en el marco de la educación inclusiva.* Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-360293_foto_portada.pdf

Perry, P., Samper, C., Camargo, y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina, *Geometría plana* (pp. 12-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Revuelta, R. L. (1993). *Palmo a palmo: la motricidad fina y la conducta adaptativa a los objetos en los niños ciegos*. Madrid, España: Organización Nacional de Ciegos Españoles, Sección de Educación.

Santacruz, L. X. y Sinisterra L. P. (2013). *Una secuencia didáctica para estudiantes en situación de discapacidad visual: el caso de los cuadriláteros en grado 3.ᵉʳ de educación básica* [recurso electrónico] (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Silva, L. (2013). *Argumentar para definir y definir para argumentar.* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA: IDEAS PREVIAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO

Javier Jiménez

Instituto Técnico Industrial Piloto IED.
educacionmtic@gmail.com, javier_jimenez@javeriana.edu.co

Examinando las ideas previas de los estudiantes de grado sexto del Instituto Técnico Industrial Piloto *IED* (*ITIP*), ligadas a los conceptos que atañen a la geometría plana, se inició indagando sobre lo que intuían por punto y recta. La intervención oral y la escucha dejaron que los niños interactuaran y revelaran sus nociones, para que fueran aprobadas o refutadas por sus compañeros. Luego, consultaron y expusieron estos términos con el fin de enriquecer sus concepciones. Aquí se aportan algunas ideas que declararon y se contrastan con las definiciones forjadas en la historia y con las citadas en publicaciones.

DEFINICIONES DE PUNTO Y LÍNEA RECTA

La importancia del estudio de punto y línea recta radica en el potencial que poseen para modelar fenómenos naturales. La existencia de la materia se intenta revelar a partir de la divisibilidad de los objetos, procurando fijar las partículas "elementales". Así, al tomar como prototipo el "punto geométrico" para señalar atributos de una onda-partícula lleva a suponer, desde la física, que cuanto menor es el radio de dicho elemento, mayor es la energía; si fuese infinitesimal, la energía sería infinitamente grande. Esto conduce a revisar otros conceptos en oposición, tales como "*lo discreto y lo continuo*", "*la materia y el vacío*", y evolucionar "*al objeto y al campo*", lo cual le compete a *la teoría cuántica*. Por otro lado, para explicar el origen del universo se plantean arquetipos unidimensionales que se describen como pequeños segmentos de una línea en vibración, llegando a *las teorías de las cuerdas*.

Jiménez, J. (2019). Elementos básicos de la geometría: ideas previas de los estudiantes de grado sexto. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 261-270). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Referentes históricos

Por sus contribuciones a la geometría, se resaltan los conceptos aportados por algunos griegos, y por los ilustres matemáticos Leibniz y Hilbert.

Euclides: Por acuerdo de historiadores, se dice que *Elementos* es un texto del 300 a. C. En el *Libro I* se fijan las definiciones de punto, línea y línea recta:

> 1. Un punto es lo que no tiene partes. 2. Una línea es una longitud sin anchura. 3. Los extremos de una línea son puntos. 4. Una línea recta es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella. (Euclides, 1991, pp.189-190).

En las definiciones 2 y 4, se diferencian las líneas (que admiten curvas) y las líneas rectas. En las notas a la definición 1, el traductor de los *Elementos* sella:

> 1. Aristóteles define el punto como el límite de la línea, la línea como límite de la superficie, la superficie como el límite del cuerpo sólido. 2. Alejandro de Afrodisia sostenía que los elementos primeros del plano son las líneas, y de las líneas los puntos. (Euclides, 1991, pp.189-190).

En conexión a la definición 4 en las notas sobre línea recta se despliega:

> Los griegos se formaron tres representaciones básicas de la línea recta: 1. la de un hilo tenso, 2. la de un rayo de luz, 3. la de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos. Y para Arquímedes 4. la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos. (Euclides, 1991, pp.190-191).

Finalmente, en los *postulados* con relación a la línea recta se indica:

> 1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera. 2. Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta. (Euclides, 1991, p.197).

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716): Al parecer, en 1663, Leibniz empezó a estudiar los *Elementos* de Euclides no solo para revisarlos y comentarlos sino con un propósito mayor, el de demostrar los axiomas y el de erigir una nueva *Característica Geométrica*. En 1677, escribió un ensayo sobre esta nueva forma de ver la geometría donde expuso su proyecto de construir un *análisis geométrico* basado en la situación, *el Analysis Situs*. Según Echeverría y De Mora (2016) "en el manuscrito de 10 de agosto de 1679, se ocupó en primer lugar de la definición de espacio y luego de la de punto… modificando la de Euclides… Leibniz partió de la relación de congruencia" (p.107):

> Lo siguiente a considerar es el *punto*, es decir aquello más simple entre todo lo que pertenece al espacio o la extensión; pues del mismo modo que el espacio contiene a la extensión absoluta, así los puntos expresan lo que es máximamente limitado en la extensión, sin duda el simple *situs*. De ahí se sigue que el punto es un mínimo y carece de partes, y todos los puntos son congruentes entre sí (es decir, pueden coincidir), por lo tanto, son semejantes y, se podría decir, iguales. (Leibniz, 1995, citado por De Mora, 2018, pp. 95-96).

En 1679, en una epístola a Huygens, a modo de resumen, Leibniz le anexa su *Característica Geométrica*. Allí define línea recta vinculándola con el infinito:

> Es el lugar de todos los puntos Y con respecto a los cuales tres puntos dados $A. B. C.$ se comportan del mismo modo; todos esos puntos [se refiere a los que "se comportan del mismo modo", es decir, a los que están en la misma relación de congruencia con A, B, y C] caerán en la recta infinita. (Leibniz, 1995, citado por Echeverría y De Mora, 2016, pp.112-113).

David Hilbert (1862-1943): Los *Fundamentos de la geometría* fueron publicados en 1899, en este texto se enumera los tres elementos de la geometría, las cinco relaciones que se establecen entre estos y los cinco grupos de axiomas. El primer capítulo lo introduce con los "*elementos de la geometría"*:

> Pensemos tres distintos sistemas de entes: a los entes del *primer* sistema los llamamos *puntos* y los designamos con A, B, C, …, a los entes del *segundo* sistema los nombramos *rectas* y los designamos con a, b, c, …, a los entes del *tercer* sistema, los llamamos *planos*, y los designamos con a, b, g, … Los puntos reciben también el nombre de *elementos de la Geometría lineal*, los puntos y rectas el de *elementos de la Geometría plana*, y los puntos, rectas y planos, el de *elementos de la Geometría espacial* o *del espacio*. (Hilbert, 1996, p.3).

Con este abordaje, Hilbert reclama la apertura de tomar cualquier terna de entes que cumplan con las relaciones y los grupos de axiomas, convirtiendo los elementos básicos en variables. En este sentido, Hilbert manifestó:

> Uno debería ser capaz de decir siempre, en lugar de puntos, líneas rectas y planos, mesas, sillas y jarras de cerveza. (Hilbert, 1996, p. xxix).

Obras al alcance de los estudiantes

Los textos revisados se clasifican en tres tipos: i) obras generales sin implicaciones matemáticas tales como enciclopedias en general, diccionarios enciclopédicos o Internet (enciclopedias en línea, wikis o blogs), ii) obras que son específicas para consulta de matemáticas sin ser libros de texto como enciclopedias temáticas y iii) obras de texto para educación básica y/o media.

Obras generales sin implicaciones matemáticas

Punto	i) (Lat. punctum, der. de pungere, punzar). 1. Elemento del espacio, de muy pequeñas dimensiones, que puede representarse por la intersección de dos rectas… (Larousse Librairie, 1982, pp. 9016-9017). ii) Señal diminuta. //Sitio. //Cosa muy corta, parte mínima. (Garzón, 1994, p.1013). iii) El punto es la unidad más simple, irreductiblemente mínima, de la comunicación visual, es una figura geométrica sin dimensión, tampoco tiene longitud, área, volumen, ni otro ángulo dimensional. No es un objeto físico. (Wikipedia, s.f.).
Recta	i) Recto, ta: (Del lat. Rectus). Que no se inclina ni aun lado ni al otro. //2. V. ángulo, caso, cilindro, compás, cono, feudo, seno recto. //3. V. ascensión, esfera, línea recta. //7. Geom. V. línea recta. (Real Academia Española, 1970, p. 1116). ii) Raya. Segmento, trazo. V. LINEA. (Corropio, 1985, p.747). iii) En geometría euclidiana, la recta o la línea recta es una línea que se extiende en una misma dirección; por lo tanto, tiene una sola dimensión y contiene un número infinito de puntos. Dicha recta también se puede describir como una sucesión continua de puntos extendidos en una sola dirección. (Wikipedia, s.f.).

Obras de consulta matemática

Punto	i) Situación en el espacio, sobre una superficie o en un sistema de coordenadas. Un punto carece de dimensiones y solamente está definido por su posición. (Castaño, 1982, p. 159). ii) Término genérico que designa los elementos de cualquier espacio geométrico, en particular los elementos de un espacio afín, euclideo o proyectivo. Con la aplicación de técnicas geométricas a otros aspectos de las matemáticas, al querer dar una imagen geométrica de determinados

	conjuntos se acostumbra a llamar puntos a sus elementos. Por lo tanto, no puede definirse el punto de una manera precisa, sino que hay que dar una definición en cada área de las matemáticas. (Espinosa, 2003, p. 242).
Recta	i) La línea recta es la más sencilla de todas las líneas. Un hilo delgado y tenso nos da su imagen; imagen imperfecta, puesto que una línea recta carece de espesor y debe suponerse ilimitada en los dos sentidos. La línea recta no puede definirse y su noción es intuitiva… (Grupo Editorial Cumbre S. A., 1977, p. 161). ii) Unión entre dos puntos del espacio o sobre una superficie. Una línea tiene longitud, pero no espesor, es decir, tiene una dimensión. La línea recta es la menor distancia entre dos puntos de una superficie plana. (Castaño, 1982, p. 115). iii) Es una sucesión de puntos que están en la misma dirección. Puede definirse también como la frontera o borde de dos semiplanos. (Santamaría, 1995, p. 320). iv) Recta: Geom. Conjunto continuo de puntos alineados, de dirección constante. (Espinosa, 2003, p. 255).

Obras de texto

Punto	i) La punta de una aguja, de un alfiler o de un lápiz, dan idea del punto. El encuentro o cruce de dos líneas forma también un punto. El punto no tiene ninguna dimensión; pero en la práctica se lo señala con un pequeño trazo que es algo extenso como el punto de la i (•), o con el cruce de dos rayitas (x). (Rozan, 1956, pp. 31-32). ii) Un punto no tiene tamaño, sólo ocupa un lugar. La pequeña marca que deja la punta afilada de un lápiz puede representar un punto. (Chapin, Illingworth, Landau, Misingila y McCracken, 1996, p. 41).
Recta	i) Línea recta. - Un hilo bien tirante, el doblez de una hoja de papel, las aristas de una regla, las equinas de las paredes, dan idea de la línea recta. La línea recta, o simplemente recta es el camino más corto que hay entre dos puntos… Para trazar rectas se emplea generalmente una regla, una escuadra o un cordón bien tirante. (Rozan, 1956, p. 32). ii) La recta es considerada como un conjunto infinito de puntos que se prolonga indefinidamente en dos sentidos opuestos. La marca que deja un lápiz al pasar por dos puntos usando el borde de una regla, da la idea de

	recta. En la representación de una recta, se trazan flechas en sus extremos para indicar que no termina. Las rectas se nombran con las letras que indican dos de sus puntos o mediante una letra minúscula. (Cubillos y Salgado, 2004, p. 218).

Ideas previas aportadas por los estudiantes

En periodo I-2019, se hizo un trabajo con 165 niños de cinco cursos de 6º grado. Se les solicitó que dibujaran un punto y una recta, y que luego los explicaran. Las respuestas se categorizan según el uso, los atributos físicos y la esencia:

Los términos descritos a partir de los usos

Usos del punto:	El punto nos ayuda a hacer figuras, es un signo de puntuación, se utiliza para separar números y para separar párrafos.
Usos de la recta:	La recta tiene diferentes usos (recta numérica), sirve para ubicar números y para crear superficies planas.

Términos descritos a partir de los atributos físicos

Forma del punto:	Es plano, es circular, es una circunferencia, es redondo, puede tener cualquier forma, el punto no tiene vértices.
Tamaño del punto:	Es pequeño, tiene cualquier tamaño, ocupa un espacio, el punto se puede medir, tiene área y perímetro.
Color del punto:	Es negro, es de diversos colores, puede tener cualquier color.
Forma de la recta:	Es plana, es una línea derecha, es delgada, es de cualquier grosor, no es una línea curva, no tiene partes circulares, no es torcida, no tiene altura, con dos puntos se forma una recta.
Tamaño de la recta:	Es larga, es corta, tiene comienzo y final, tiene varios tamaños, se puede medir, tiene área y perímetro.
Color de la recta:	Puede tener diversos colores, es de cualquier color, es negra.

Los términos descritos a partir de la esencia

Esencia del punto:	Es una figura geométrica, hace parte de una línea, hace parte de todas las figuras geométricas, es el inicio de una línea, no existe en la realidad, no existe en la naturaleza, el punto no tiene área, el punto no tiene volumen.
Esencia de la recta:	Es un elemento básico de la geometría, es esencial para la geometría, hace parte de las figuras geométricas, forma figuras, tiene diferentes posiciones, tiene dos sentidos, es infinita, no tiene fin, es la unión de dos puntos, no es una figura geométrica, no existe en la naturaleza, es un gráfico, se hace con una regla.

VÍNCULOS ENTRE LAS IDEAS PREVIAS Y LOS REFERENTES

Aquí se señalan algunas ideas de los estudiantes las cuales se comparan con las definiciones forjadas en la historia y en obras que están a su alcance.

En relación con los usos del punto se puede citar a Garzón (1994) que los emplea para indicar un sitio, y a Castaño (1982) como la situación en el espacio dado un sistema de coordenadas. En las diversas definiciones no se señalan los usos indicados por los niños. Esto se debe a que la relación que establecen está vinculada con la puntuación ortográfica o con la separación de cifras. Empero citan la recta numérica para ilustrar un uso.

Quienes indicaron cualidades físicas ligadas con forma, tamaño y color, lo hicieron a partir de los dibujos. En conexión con la noción de recta, las expresiones "es larga", "es corta", "tiene comienzo y final" tiene reciprocidad con la definición 2, y con el postulado 1 y 2 de Euclides (1991). Esas ideas están en Corropio (1985) y corresponden a la de *segmento de recta*.

Ahora, revisando la noción de Arquímedes citado por Euclides (1991) "la recta es la más corta de todas las líneas que tienen los mismos extremos" encaja con las dadas en clase "es la unión de dos puntos" y con "dos puntos se forma una recta" y se acoplan con las de Castaño (1982) y Rozan (1956).

El atributo mencionado en clase, la recta es "infinita", "no tiene fin", lo señala Leibniz citado por De Mora (2018). Además, se consigna en Wikipedia (s.f.), Grupo Editorial Cumbre S.A. (1977), y Cubillos y Salgado, (2004).

Las expresiones de los niños: la recta es una "línea derecha", "no es una línea curva", "no tiene partes circulares" y "no es torcida", se ligan con la definición 4, fijada por Euclides (1991) y con el intento de Leibniz citado por De Mora (2018) de precisarla con la frase el lugar de todos los puntos… los cuales… se comportan del mismo modo. A esta idea incluso se refieren la Real Academia Española (1970) "que no se inclina ni aun lado ni al otro" (p.1116) y Wikipedia (s.f.), Santamaría (1995) porque usan la frase tienen una misma dirección, o como lo dice Espinosa (2003) "de dirección constante" (p. 255).

Conclusiones y recomendaciones

Las ideas que imperan en los niños están ligadas a los usos y a las grafías hechas por ellos. Es valioso que para que ganen en abstracción, se haga énfasis en: 1. la idea matemática, 2. la representación y 3. la notación. Para lo primero se pueden vincular los elementos como se ve en Aristóteles, Alejandro de Afrodisia, citados por Euclides (1991), Librairie Larousse (1982), Santamaría (1995) y Rozan (1956). Además, como comenta Jiménez (2010),

> Se sugiere tener en cuenta las relaciones entre objetos geométricos que no se pueden dejar de lado y que extraídas del trabajo de Hilbert (1996) conciernen a: estar en (incidencia); posiciones relativas de un punto y una recta, posiciones relativas de una recta y un plano, estar entre (orden); la posición que tiene un punto con relación a otros en una recta, congruencia (movimiento-coincidencia); superponer figuras para comparar sus formas y tamaños, continuidad (denso); ubicar los puntos posibles en un plano, en una recta y entre dos puntos, paralelismo; trazar rectas secantes (perpendiculares y oblicuas) y no secantes. (p. 17).

En conexión con lo segundo se pueden diseñar tareas para representar el punto con una perforación (Jiménez, 2010) y la recta con un doblez (Rozan, 1956) y luego, otras para tomar un lápiz afilado (Chapin et al., 1996) y una regla sin marcas como se indica en Rozan (1956), y Cubillos y Salgado (2004). Finalmente, en cuanto a la notación se debe mantener una coherente como lo que plantea Hilbert (1996), Rozan (1956), y Cubillos y Salgado (2004).

Referencias

Castaño, J. (1982). *Diccionario de Matemáticas.* Bogotá: Editorial Norma.

Corropio, F. (1985). *Diccionario de Ideas Afines.* Barcelona: Herder.

Cubillos, C. y Salgado, D. (2004). *Aritmética y geometría 1.* Bogotá: Santillana S.A.

Chapin, S., Illingworth, M., Landau, M., Misingila, J. y McCracken, L. (1996). *Matemáticas para niveles intermedios – curso 1*. Estados Unidos: Ed. Prentice-Hall.

De Mora, M. (2018). Leibniz crítico de Euclides. El método del *Analysis Situ*. *Quaderns d'història de l'enginyeria, 16,* 93-107. Recuperado de https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/118716/article5.pdf

Echeverría, J. y De Mora, M. (2016). Leibniz crítico de Euclides. El método del *Analysis Situs. Kairos. Journal of Philosophy & Science*, *16*(1), 99-123. doi: 10.1515/kjps-2016-0011

Espinosa, J. (2003). *Diccionario de Matemáticas.* Madrid: Cultura S. A.

Euclides (1991). *Elementos* (trad. María Luisa Puertas). Madrid: Gredos.

Garzón, A. (1994). *Gran Diccionario Enciclopédico Visual*. Bogotá: Panamericana.

Grupo Editorial Cumbre S. A. (1977). *Nueva Enciclopedia Autodidactica Quillet* (tomo 2). Ciudad de México: Cumbre S. A.

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la Geometría.* (trad. Francisco Cebrian). Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

Jiménez, J. (2010). *Geometría con plegado de papel: Geopapiroflexia.* Bogotá: IDEP. Recuperado de http://geopapiroflexia.blogspot.com

Librairie Larousse. (1982). *Gran Diccionario Enciclopédico Larousse.* (Vol. 19). Barcelona: Planeta.

Punto. (s. f.). *Wikipedia.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_(geometría)

Recta. (s. f.). *Wikipedia.* Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Recta

Real Academia Española. (1970). *Diccionario de la Lengua Española*. Madrid: Espasa Calpe S. A.

Rozan, J. (1956). *Aritmética y nociones de geometría - cuarto libro*. Ciudad de México: Ed. Progreso.

Santamaría, C. (1995). *Diccionario de Matemáticas de Primaria y Secundaria*. Madrid: Ed. Escuela Española.

INTERPRETACIONES DE NIÑOS DE 4.° DE PRIMARIA RELATIVAS AL ÁNGULO

Sandra Milena Jiménez, **Viviana Paola Salazar**
Universidad Pedagógica Nacional
jimeneza.sandram@gmail.com, mdma.vpsalazarf298@pedagogica.edu.co

En esta comunicación presentamos el análisis de fragmentos de interacción en clase relacionados con interpretaciones que tienen estudiantes de 4° de primaria acerca del atributo medible de un ángulo. Pretendemos hacer énfasis en el potencial que tienen los espacios de interacción colectiva de una clase de matemáticas en la construcción de significados personales de los niños y en cómo estos pueden transitar hacia significados acordados en la comunidad matemática de referencia.

INQUIETUD INVESTIGATIVA

La comunicación que se lleva a cabo en el aula se puede aprovechar como una oportunidad para promover procesos de interpretación en los cuales los estudiantes puedan construir de forma colectiva significados de objetos matemáticos a partir de sus propios significados personales. Sin embargo, la complejidad comunicativa hace que, en ocasiones, las interpretaciones que el profesor y los estudiantes hacen acerca de lo dicho por alguien sean diferentes a lo que esperaba el emisor. Esto puede llevar a generar incongruencias entre las intenciones comunicativas del emisor y las reacciones de los interlocutores que derivan en una ruptura del proceso comunicativo en la clase en la construcción de significados.

Varios investigadores han señalado la importancia de centrar la atención en la construcción de significados vía la comunicación en la clase de matemáticas (Bartolini Bussi y Mariotti, 2010; Camargo et al., 2015; Radford, 2000; Sáenz-Ludlow y Kadunz, 2016) Con la revisión de estas investigaciones y a raíz de nuestra experiencia como docentes surgió la siguiente pregunta: ¿cuál es la evolución del significado del objeto matemático ángulo que exhiben estudiantes de cuarto de primaria al participar en una propuesta de enseñanza que se centra en los elementos constitutivos de este concepto, su representación y su medida?

Jiménez, S. y Salazar, V. (2019). Interpretaciones de niños de 4.° de primaria relativas al ángulo. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 271-280). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Esta ponencia se centra en el análisis de algunos fragmentos de interacción comunicativa entre una profesora y un grupo de 39 estudiantes de grado 4° de primaria, con edades entre 9 y 11 años. La intención es ilustrar de qué forma enfrentamos el reto de promover la construcción colectiva de significados acerca del atributo "medida de un ángulo", orientando la interpretación de significados personales en busca de una evolución de estos hacia significados reconocidos en la comunidad del discurso matemático.

MARCO TEÓRICO

Concebimos que la cognición humana está mediada por diferentes sistemas de signos socioculturales, por tanto, la interacción social que tiene lugar en el aula para construir significado es actividad semiótica. La perspectiva semiótica adquiere bastante importancia cuando se busca construir significado en el aula. Para analizar el proceso comunicativo en el aula usamos una perspectiva semiótica que destaca el papel de la interpretación de quienes participan en el acto comunicativo. Nosotras recurrimos a la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) con base en la teoría del signo triádico de Peirce, quien considera la semiosis como una actividad de comunicación o de pensamiento en la que se crean y usan "signos" (Figura 1).

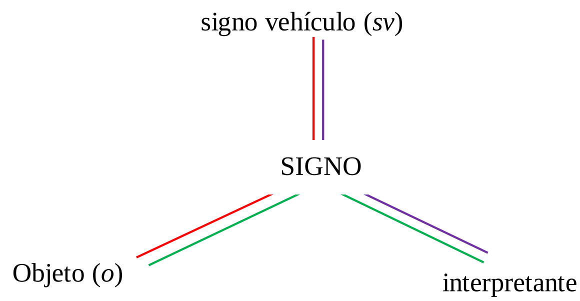


Figura 1: Diagrama de la estructura general del SIGNO.
Fuente: Camargo et al. (2015).

Como señalan Camargo et al. (2015), el "signo" de Peirce, denotado como SIGNO por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), refiere a una relación triádica, resultado de la integración de tres relaciones diádicas, en la que se articulan un objeto, una representación del objeto o signo vehículo (e. g., gesto, palabra, gráfico, etc.) y una interpretación (interpretante) del objeto que es lo que el signo vehículo produce en la mente de quien lo percibe e interpreta.

En la perspectiva de Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012), no solamente se involucra la idea de SIGNO sino también la diferenciación que hace Peirce del objeto del SIGNO. Esta diferenciación se enfoca en aspectos del objeto que son indicados y transportados en el signo vehículo y en las características del objeto que es construido por el receptor una vez que recibe e interpreta el signo vehículo. Haremos referencia a los siguientes objetos:

-Objeto Real (OR): objeto que acepta la comunidad de discurso dentro del cual tiene lugar el acto semiótico. En el caso que nos ocupa, nos referimos al Objeto Real Matemático (ORM), medida de ángulo, de naturaleza social, cultural e histórica.

-Objeto dinámico (OD): interpretación idiosincrática del OR, generada en la mente del intérprete cuando recibe un signo vehículo y lo interpreta.

-Objeto dinámico didáctico (ODD): aspecto que el profesor incluye en su interpretación acerca de lo que interpretaron los estudiantes.

-Objeto inmediato (OI): es un aspecto específico del OR que se codifica y se expresa en un signo vehículo (SV).

DISEÑO METODOLÓGICO

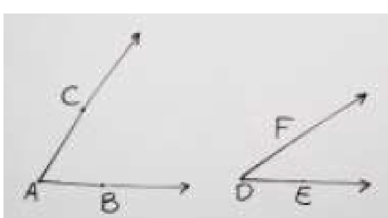
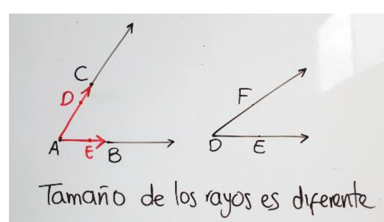
La investigación en la que se enmarca esta comunicación apoyó una innovación curricular en una institución educativa en el nivel de primaria. Se desarrolló en tres fases: i) planeación de una secuencia de enseñanza sobre el objeto ángulo, propuesta a partir de una conjetura sobre cómo impulsar su aprendizaje, vía la interacción comunicativa; ii) experimentación de la secuencia de enseñanza en 5 clases de geometría y análisis posteriores de cada intervención para hacer ajustes; y iii) análisis del aprendizaje, enfocando la atención en las interpretaciones como elemento de reflexión y posible punto de partida de posteriores intervenciones en el aula. Los detalles de la secuencia se pueden consultar en Jiménez y Salazar (2016).

La información para analizar se obtuvo de videograbaciones de las sesiones de clase en las que se desarrolló la secuencia, que se trascribieron y se fragmentaron de acuerdo al tema de la conversación. El análisis consistió en identificar en las expresiones de los estudiantes o de la profesora, el signo vehículo del objeto del que se habla (SV) y los objetos del signo (OI, OD, ODD), según las definiciones adoptadas.

ANÁLISIS

La profesora representa los ángulos y (Figura 2) y pregunta a los estudiantes cuál de ellos mide más. En la primera aproximación a cuál es el atributo que se le mide a un ángulo (SV), un estudiante, llamado Luis, dice que el ángulo es “más grande” (OI) y hace referencia al espacio que ocupa la representación, como un todo. Suponemos que Luis no se enfoca en alguna propiedad específica de las partes sino en el aspecto global de la representación.

Para movilizar las interpretaciones de los estudiantes, la profesora pregunta “¿Qué quiere decir más grande [un ángulo que otro]?” Como respuesta, hay dos interpretaciones. Por un lado, Stephanie y Mateo se refieren a que el atributo diferenciador de dos ángulos es la cantidad de puntos que se pueden determinar en los rayos, dependiendo de lo “largo” que sean representados (OI). Por otro lado, Manuela hace la siguiente intervención: “Yo digo que ambos son iguales porque tienen rayos […]” (OI). Suponemos que, para Manuela, el atributo diferenciador no es la longitud de los rayos porque estos se extienden indefinidamente.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Figura 2. Representación de los ángulos CAB y FDE</td>
<td>Figura 3. Representación de los ángulos congruentes CAB y DAE</td>
</tr>
</table>

La profesora dibuja el ángulo, superpuesto al ángulo (Figura 3), y alude a la comparación de dos ángulos en donde difiere la longitud de líneas que representan los rayos. Esto para buscar que los estudiantes descarten la idea de Manuela como el atributo medible de un ángulo (ODD). Esto tiene un efecto inmediato en la interpretación que tiene Mateo y Mabel sobre el atributo medible cuando dicen que para ellos la longitud de los rayos no es factor diferenciador del tamaño de dos ángulos (OD). Se ve una similitud del OD de los estudiantes con el (ODD) de la profesora.

Después, Mabel plantea un punto de vista diferente a los sugeridos previamente:

37	Mabel:	A Luis y Stephanie les parece [más] grande [uno de los ángulos representado en el tablero] porque […], como si tu tuvieras el transportador y […] si lo pusieras en setenta grados (pone el transportador en el tablero, e indica con el dedo donde irían los 70) (Figura 4a) y el otro lo pusieran un poco más hacia allá (indica hacia la derecha, refiriéndose a un ángulo de mayor amplitud, Figura 4b) y por eso parece más grande este (señala el ángulo de la izquierda; Figura 4c)

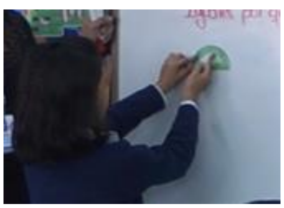
		
Figra 4a	**Figura 4b**	**Figura 4c**

Figura 4. Expresiones que acompañan lo que dice Mabel

38		(…)
39	Stephanie:	¡Ah! Lo que pasa es que la diferencia no es esa.
40	Profesora:	Más duro. Stephanie va a decir lo que le entendió a Mabel.
41	Stephanie:	Pues Mabel dice que […] la diferencia es que este (señala el ángulo de la izquierda; figura 5a) está más abierto que este (señala el ángulo de la derecha; figura 5b).

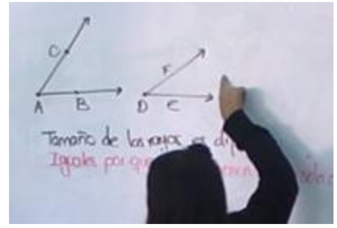
	
Figura 5a	**Figura 5b**

Figura 5. Gestos que acompañan la expresión de Stephanie

42	Profesora:	Miren lo que dice Stephanie, porque Stephanie cambió lo que había dicho. Ahora Stephanie está diciendo que (empieza a anotar en el tablero) uno es más [grande si es más] abierto que el otro (…).

El OI de Mabel está constituido por la explicación que da, relacionada con el número que se obtiene con el transportador, al usarlo sobre uno de los ángulos y el gesto que hace con la mano para mostrar que en el otro ángulo la medida cambiaría. Todo lo anterior para referirse a que la diferencia de tamaño entre los ángulos está determinada por cómo se vean, teniendo como elemento de referencia el transportador. Suponemos que para Mabel la diferencia entre dos ángulos se determina por la abertura medida con el transportador (OD).

Vale la pena hacer énfasis en el OI de Stephanie [41], pues en las intervenciones previas ella se refería a la longitud de los rayos como atributo diferenciador entre dos ángulos y ahora concuerda con Mabel en la explicación de la amplitud. Lo anterior es una clara evidencia de su cambio de interpretación. En su intervención se refiere a la abertura, aludiendo a que hay ángulos más abiertos que otros (OI). Suponemos que ella ahora considera, al igual que Mabel, que la abertura es el atributo diferenciador de un ángulo (OD).

Finalmente, Mateo y Miguel dicen sus interpretaciones. Mateo señala que el atributo medible de un ángulo está asociado al cambio de posición de un rayo con respecto al otro. Hace un movimiento de abrir y cerrar con sus manos uniéndola por las palmas (OI). En su intervención se refiere a que más abierto, es mayor tamaño, y más cerrado, es menor tamaño. Miguel afirma: “porque el mayor se puede decir que es más grande y el otro se puede decir que es más cerrado” (OI). Para él, el atributo medible es el grado de apertura (entendiéndose grado como la “magnitud” de apertura, y no como grados de ángulos) de los rayos (OD).

En la construcción del atributo de medida, los significados personales más comunes se pueden clasificar en tres grupos que llamamos aproximaciones:

- Primera aproximación: el factor diferenciador de la medida de dos ángulos es el tamaño.
- Segunda aproximación: un ángulo es más grande que otro por la longitud de las líneas que representan los rayos.
- Tercera aproximación: la inferencia en la medida de dos ángulos es su abertura.

RESULTADOS

En la primera aproximación al atributo medible de un ángulo surgió una de las interpretaciones erróneas más comunes y que más persiste en la escolaridad: lo que diferencia a dos ángulos es la longitud de la representación de los rayos que determinan el ángulo (Saa, Carillo, Alarcón, Pelegrín, Sánchez y Carrillo, 1990). Gracias a la interacción comunicativa, varios niños cambiaron su interpretación.

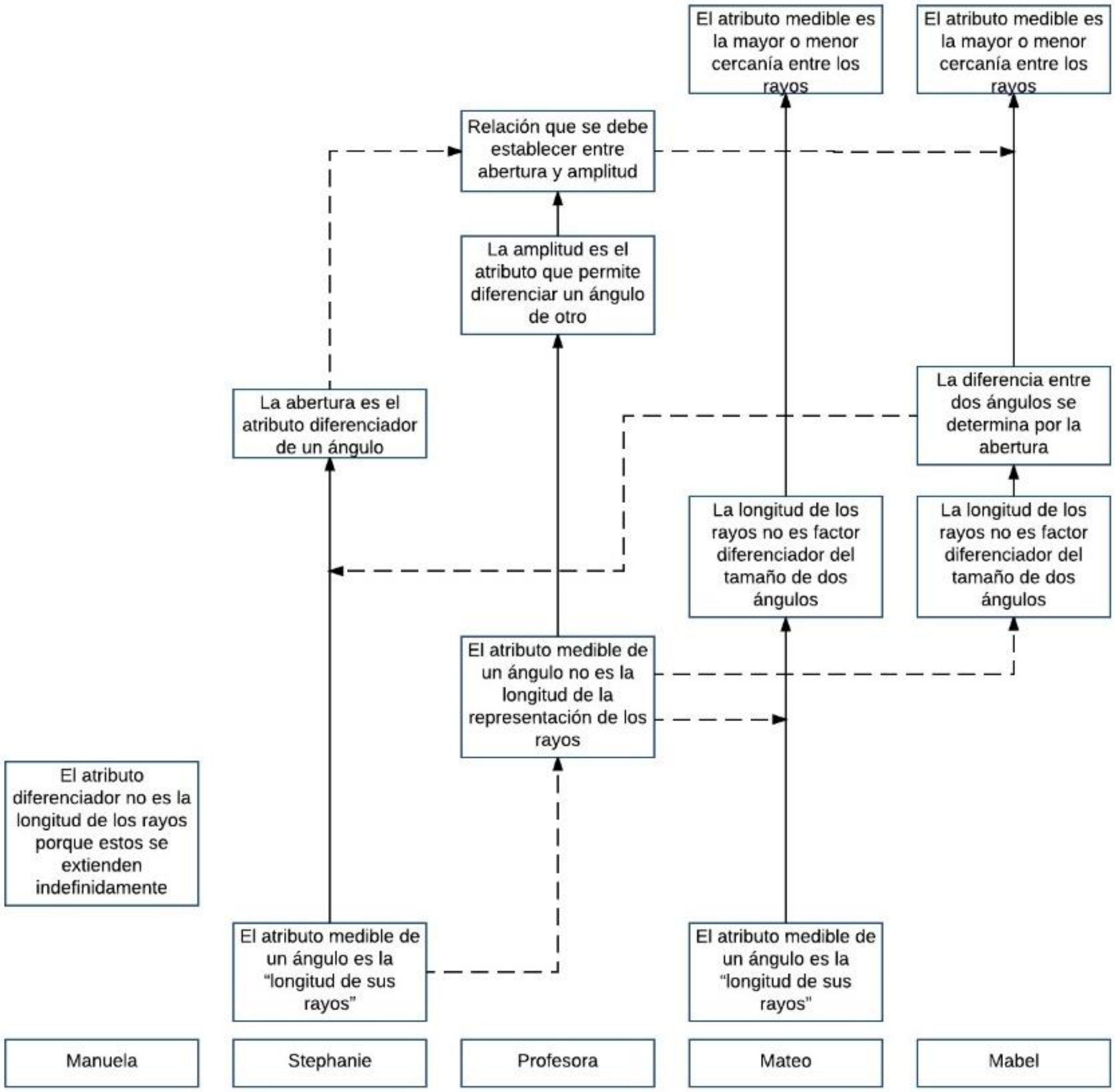


Figura 6. OI de los estudiantes y ODD de la profesora con relación al atributo medible de un ángulo.

En la Figura 6 se observa un esquema en el que, para cada niño que intervino en el fragmento y la profesora, hay una columna que representa sus OI relacionados con el atributo medible del ángulo a lo largo de la intervención. De abajo hacia arriba se ubican los OI de algunos estudiantes o de la profesora, en orden de aparición, siendo los de la parte superior los últimos. Si dos OI coinciden en su ubicación de forma horizontal, significa que se dieron simultáneamente. Las líneas continuas son usadas para representar la evolución personal de los OI, mientras que las punteadas reflejan cómo el OI de un estudiante o profesor tuvo influencia para que el OI de otra persona evolucionara, por lo que estas pueden estar por todo el esquema, sin orden aparente.

Es interesante ver que en el sector de mayor aglomeración de OI se repite la palabra abertura, lo que indica que la profesora hace esfuerzos porque los estudiantes usen adecuadamente el vocabulario y lo relacionen con el ángulo. Las líneas punteadas nos permiten ver cómo, en lugar de tener únicamente líneas continuas y verticales que indicarían procesos individuales sin influencia alguna, la construcción colectiva de significados en el aula sí permite la evolución de los significados de los estudiantes. Se puede apreciar que, gracias a la influencia de algunos OI, hay cambios de interpretación entre algunos participantes.

La implementación de la secuencia planeada nos permite afirmar que, aunque no todos los estudiantes evolucionan al mismo tiempo en sus interpretaciones sobre la medida de un ángulo, ellos se convierten en agentes indispensables del proceso de construcción de significados, pues no se trata solamente de escuchar los mensajes que la profesora emite, sino de todo un proceso de interpretación y reinterpretación que se realiza de forma colectiva.

Conclusiones

Gracias al análisis de las interacciones comunicativas, nos dimos cuenta de que sí es posible que el significado del atributo medible del ángulo evolucione en los estudiantes. Observamos que es viable si se posibilita un ambiente de clase que favorezca la interacción comunicativa entre todos sus integrantes y tareas que permitan a los estudiantes manifestar sus interpretaciones acerca del objeto matemático a tratar.

En las clases, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aprender la notación matemática de los objetos que se trabajaron, lo que les ayuda a tener herramientas para entender mejor el lenguaje matemático. Los estudiantes avanzaron considerablemente en lograr un lenguaje matemático que les permite comunicar más claramente sus ideas, lo cual es importante dado el grado en el que se encuentran.

REFERENCIAS

Camargo, L., Perry, P., Samper, S., Molina, Ó., Saénz-Ludlow, A. (2015). Mediación Semiótica en pro de la construcción de significado de rayo al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(3), 99-116.

Jiménez, S. y Salazar, V. P. (2016). *Significados de ángulo desarrollados por estudiantes de cuarto grado de primaria* (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática*, *12*(1), 51-69.

Saa, M., Carrillo, D., Alarcón, J., Pelegrín, M., Sánchez, E. y Carrillo, E. (1990). *Los ángulos: recursos para su aprendizaje*. Murcia: Ediciones de la Universidad de Murcia.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME.* Recuperado de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Sáenz-Ludlow, A. y Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts* (pp. 1-21). Rotterdam: Sense Publishers.

LA GEOMETRÍA ESCONDIDA DE ALGUNAS OBRAS DE ARTE

Rafael Melo

Fundación Universitaria Konrad Lorenz
rafael.meloj@konradlorenz.edu.co

Hay muchas obras de arte en las que se hace evidente la conexión con el mundo de las matemáticas. Hay otras en las que dicha conexión no es tan explícita. De hecho, ni se nos pasaría por la cabeza que las matemáticas tengan algo que ver. Sin embargo, ahí están. Todo depende de los ojos con los que las veamos. En este documento se pretende dar ejemplos de pinturas que se clasifican dentro de las dos maneras mencionadas y mostrar que esa rama de las matemáticas, llamada geometría, es una herramienta tan poderosa como lo es un pincel.

SEMILLERO DE INVESTIGACIÓN: GEOMETRÍA, ARTE Y FRACTALES

Uno de mis roles como docente de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz ha sido liderar el semillero de investigación llamado: 'Geometría, arte y fractales'. En este semillero se guía al estudiante para que realice su propia investigación acerca de temas afines y, luego de que haya indagado y tenga organizado todo lo que averiguó, divulgue sus resultados por medio de un póster, o por medio de una comunicación breve.

Los estudiantes asistentes al semillero generalmente pertenecen a la carrera de matemáticas. Sin embargo, en los tres semestres que he impartido dicho espacio, también he contado con la presencia de estudiantes de ingeniería y de psicología. Esto hace el ejercicio más interesante pues las líneas de sus profesiones son muy abiertas. Algo curioso es que, por muy ajenos que sean sus puntos de vista, en la mayoría de casos la idea a la que convergen es la misma.

En los encuentros se han intercambiado ideas y opiniones, en particular, sobre distintas obras de arte. Como fruto de estas charlas surge este análisis de algunas pinturas famosas. El objetivo es detectar herramientas geométricas dentro de cada una. Como veremos, en algunas es evidente, pero en otras definitivamente no lo es.

Melo, R. (2019). La geometría escondida de algunas obras de arte. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 281-286). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Claramente el conocimiento de resultados geométricos y la experiencia con la materia influyen mucho en la detección. Aunque también se da el caso en que el estudiante lo único que sabe de geometría es lo intuitivo, y sin embargo nota que hay algo de matemáticas implícito.

GEOMETRÍA Y ARTE

La geometría es la rama más antigua en la historia de las matemáticas. Esto se debe a que forma parte de nuestra vida diaria. Desde que el hombre tiene uso de razón, la interacción con su entorno lo ha llevado a considerar e interactuar con objetos como puntos, rectas y curvas. Por otra parte, el arte es una forma de manifestar ideas y sentimientos a través de un grabado, escultura, etc. Estas ideas y sentimientos se ven influenciados por la manera en que percibimos nuestro entorno. De aquí la relación innegable entre geometría y arte.

Conceptos matemáticos como el de proporción, simetría, periodicidad, infinito, etc., inspiraron a varios artistas a crear determinadas obras que hoy en día son consideradas magníficas. Lo anterior sugiere que el desarrollo de la geometría apoya el avance de las bellas artes. Lo recíproco también es cierto, solo que es más difícil de ver; es decir, el interés de crear cierta obra que cumpla determinada condición puede involucrar un gran problema geométrico.[26]

GEOMETRÍA ESCONDIDA

Hay muchos elementos geométricos que podemos buscar escondidos en distintas pinturas famosas. Algunos son tan evidentes que simplemente no podemos ignorarlos, más aún, pareciera incluso que gritaran para ser contemplados. Por ejemplo consideremos la famosa obra titulada: *En blanco II*, del reconocido pintor ruso Vasili Kandinsky (1866-1944):

[26] Por ejemplo, está el Hombre de Vitruvio y la cuadratura del círculo.

Figura 1. *En blanco II.* Fuente: http://martha-fonosema.blogspot.com/2010/11/sobre-el-blanco-ll-1923-kandinsky.html

La utilización de figuras geométricas como triángulos, rectángulos y arcos de circunferencias son visibles mediante una breve inspección. La sensación de profundidad nace de la disposición de un plano, que lleva la misma dirección diagonal que los demás objetos. Otro ejemplo similar, en el que los elementos geométricos no se esconden, se puede apreciar en *Mateo's Toys*, del artista colombiano Omar Rayo (1928-2010):

Figura 2. *Mateo's Toys.* Fuente: http://www.fotografiacolombiana.com/exposicion-mateo%C2%B4s-toy-del-maestro-omar-rayo/

Por otra parte tenemos ejemplos de obras donde los elementos o herramientas geométricas utilizadas no son evidentes. Tal es la situación de la Gioconda, obra del genio italiano Leonardo Da Vinci (1452-1519):

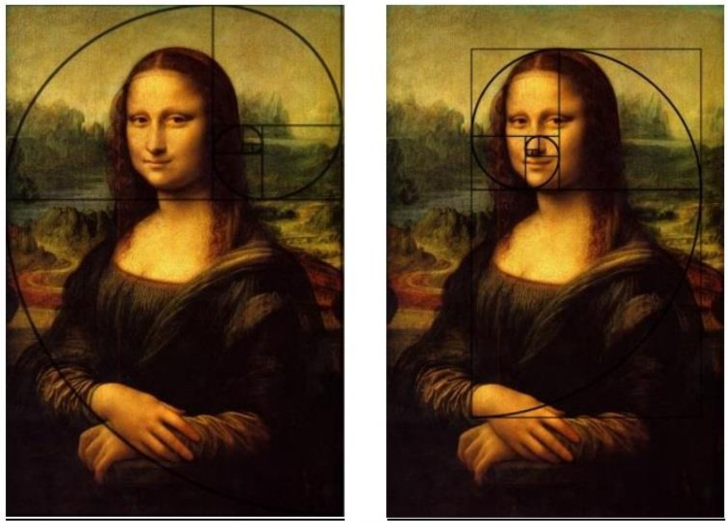


Figura 3. *La Gioconda.* Fuente: https://matematicasbecquerelianas.weebly.com/uploads/6/0/1/0/60102399/andr%C3%A9s_suarez.pdf

En ella podemos apreciar que la espiral de Durero se ajusta exactamente, tanto en el rectángulo que limita a la obra (izquierda), como en la disposición de su cuerpo (derecha). Esto significa que la imagen fue creada teniendo en mente la famosa proporción aurea, y que la Mona Lisa complementa al paisaje de fondo a tal punto que "si ella no estuviera, sin duda ese paisaje resultaría incompleto" (Otero, 2013, p. 34). Dicha proporción es el elemento geométrico escondido.

Finalmente, un ejemplo donde la herramienta geométrica utilizada no es nada evidente es *Círculo Límite IV,* una obra del artista neerlandés Escher (1898-1972) quien pretendía representar el infinito en un espacio finito:

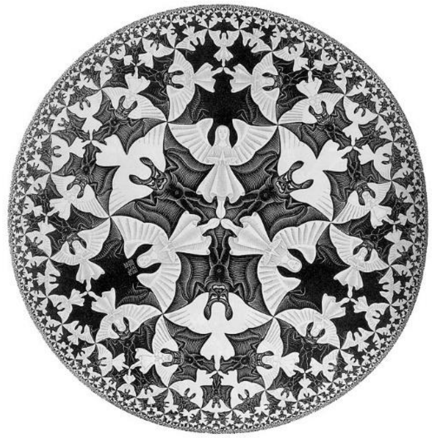


Figura 4. *Círculo límite IV*. Fuente: https://www.flickr.com/photos/alvy/167726805

Esta obra describe perfectamente el comportamiento de la noción de distancia en el mundo de la geometría hiperbólica plana. Lo más asombroso de esto es que "aún sin ser matemático, sus obras muestran un interés y una profunda comprensión de los conceptos geométricos" (Lamúa, 2018, p. 224).

CONCLUSIONES

- Hay elementos geométricos invisibles en muchas obras. Con una mejor preparación podremos apreciarlos más fácilmente.

- No todos los creadores de dichas obras fueron conscientes de la utilización de los elementos geométricos invisibles.

REFERENCIAS

Cruz, F. F. (2 de julio de 2009). Exposición *Mateo's toys* del maestro Omar Rayo. Recuperado de http://www.fotografiacolombiana.com/exposicion-mateo%C2%B4s-toy-del-maestro-omar-rayo/

Ibañez, A. (15 de junio de 2016). *Límite Circular IV, Cielo e Infierno*. Recuperado de https://www.flickr.com/photos/alvy/167726805

Lamúa, A. (2018). *Los secretos del infinito*. Madrid: Loft Publications.

Martha, M. (26 de noviembre de 2010). *Sobre el Blanco II – 1923 Kandinsky*. Recuperado de http://martha-fonosema.blogspot.com/2010/11/sobre-el-blanco-ll-1923-kandinsky.html

Otero, J. (2013). *La obra pictórica de Leonardo da Vinci*. Bogotá: Universidad Nacional.

Suárez, A. (2016). *Proporción Aurea en la Gioconda y en las Meninas*. Recuperado de https://matematicasbecquerelianas.weebly.com/uploads/6/0/1/0/60102399/andr%C3%A9s_suarez.pdf

Jardines Geométricos, una propuesta de proyecto interdisciplinario

Héctor David Pinto

IET *Nuestra Señora de la Paz – Quípama (Boyacá).*
davidpinto1032@hotmail.com

La experiencia que aquí se reporta tuvo como objetivo integrar la geometría con otras áreas de conocimiento y el PRAE de la IE Nuestra Señora de la Paz – Quípama, para reforzar conciencia ambiental respecto a la forestación. Para el proyecto Jardines Geométricos, los estudiantes elaboraron materas en forma de cuerpos geométricos, las decoraron, escribieron en sus caras las fórmulas para el cálculo de las magnitudes de los prismas y sembraron diferentes plantas en ellas, que se ubicaron en un terreno del colegio. El proyecto fue realizado con estudiantes de grado noveno quienes recibieron una inducción al tema de la forestación en clase de ciencias naturales, realizaron estudios estadísticos sobre los tipos de plantas a sembrar, y construyeron las materas en clase de matemáticas y artística.

Introducción

La relación entre los conceptos matemáticos o geométricos vistos en el aula de clase con situaciones extraescolares de los estudiantes es en algunas ocasiones muy clara. Son ejemplos de esto el cálculo de operaciones básicas para tareas como comprar en la tienda y recibir el "vuelto", el reconocimiento de figuras geométricas planas como los cuadrados presentes en una hoja cuadriculada, o la circunferencia que se puede dibujar con la tapa de un frasco. Pero, existen conceptos que, a pesar de tener más presencia en la vida cotidiana, no son del todo percibidos por los estudiantes. Un ejemplo son los cuerpos geométricos.

En la cotidianeidad de un estudiante una puerta, por ejemplo, tiene forma de un prisma rectangular, pero es común que se refiera a su forma como un rectángulo. De igual forma, un transportador o graduador, una tapa o un CD son identificados como círculos, sin tener en cuenta que, al ser elementos tridimensionales, en realidad corresponderían a cilindros. Aún después de ser identificados los cuerpos geométricos, encontrar una utilidad para el cálculo del área o del volumen

Pinto, H. (2019). Jardines geométricos, una propuesta de proyecto interdisciplinario. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 287-295). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

de un sólido, se convierte en una actividad casi exclusiva de la clase de geometría, o, a lo sumo, una actividad de un arquitecto o ingeniero, algo aún un poco alejado de la mente de un estudiante de noveno grado.

Este proyecto buscó proveer una aplicación de lo visto en clase sobre cuerpos geométricos, que fuera práctica y llamativa para los jóvenes. Un propósito del proyecto era involucrar a los estudiantes en un ambiente de aprendizaje del tipo 6, como lo presenta Skovsmose (2012); de no lograrse, al menos que se llegara a involucrar en un ambiente tipo 5. La relación del tema con la forestación en el colegio exigió que los estudiantes realizaran cálculos de áreas y de volúmenes de cuerpos geométricos para determinar el espacio necesario en el jardín para la matera y la cantidad de tierra necesaria para la siembra. Además, la actividad de decoración de la matera y de sembrado de una planta involucró la parte emocional de los estudiantes, puesto que cada matera, junto con su planta, se convertiría en un aporte personal significativo del estudiante al colegio.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Skovsmose (2012) presenta seis ambientes de aprendizaje en los que relaciona tres tipos de referencias (Matemáticas puras, Semirealidad, Situaciones de la vida real) con dos formas de organización de la actividad de los estudiantes (Paradigma del ejercicio y Escenarios de investigación). El ambiente tipo 6 corresponde a un escenario de investigación en un contexto de situación de la vida real, el cual no se da frecuentemente en clase. Skovsmose plantea que uno de los problemas para trabajar en este ambiente es la pérdida de autoridad y control del docente de la clase, quien tiene que salirse de la zona de comodidad y dejar que el estudiante determine el avance de su proyecto y tenga autonomía para decidir los pasos que seguirá. A esto fue lo que se pretendió llegar con los estudiantes, aprovechando el tema de los cuerpos geométricos.

Según el Ministerio de Educación Nacional (2016), en los Derechos Básicos de Aprendizaje para el área de matemáticas, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y en los libros de texto, se incluye el tema de cuerpos geométricos para los grados octavo y noveno. Dentro de las actividades, basadas en estándares y DBA para cada área de trabajo se encuentran, entre otras, las siguientes:[27]

[27] Tomados de:

En el área de Ciencias Naturales

- Realizo mediciones con instrumentos adecuados a las características y magnitudes de los objetos de estudio y las expreso en las unidades correspondientes.
- Utilizo las matemáticas como herramienta para modelar, analizar y presentar datos.
- Clasifico organismos en grupos taxonómicos de acuerdo con sus características celulares.
- Respeto y cuido los seres vivos y los objetos de mi entorno.

En el área de Educación Artística

- Propongo y elaboro autónomamente creaciones innovadoras, de forma individual o de colectiva, en el marco de actividades o jornadas culturales en mi comunidad educativa.

En el área de Matemáticas

- Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
- Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes, ángulos con niveles de precisión apropiados.
- Describe atributos medibles de diferentes sólidos y explica relaciones entre ellos por medio del lenguaje algebraico.[28]
- Identifica y utiliza relaciones entre el volumen y la capacidad de algunos cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) con referencia a las situaciones escolares y extraescolares.

- Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales
- Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media
- Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas y los DBA para el área de Matemáticas.

[28] Derecho Básico de Aprendizaje para el grado octavo. Se hizo uso de este derecho para dar mayor significado a la actividad con el uso de poliedros.

Se ve mayor presencia de actividades del área de Matemáticas, porque fue desde este departamento que se gestionó el proyecto transversal en un principio, y también de Naturales, debido a la necesidad de realizar un aporte significativo a la sociedad.

Descripción de la experiencia

Contexto

El proyecto se realizó con estudiantes de grado noveno de la IET Nuestra de la Paz – Quípama, al occidente del departamento de Boyacá. A pesar de ser el colegio central del municipio, la mayoría de los estudiantes provienen de fincas y casas ubicadas en las cercanías de la cabecera municipal. Por las condiciones geográficas de la región, las actividades principales del municipio son la minería y la agricultura.

El propósito del proyecto fue relacionar la geometría con actividades propias de los estudiantes, tratando de enlazar el contenido curricular con situaciones en las que ellos se vieran realmente interesados. El proyecto también tenía como propósito involucrar otras áreas del conocimiento como Artes y Ciencias Naturales para convertirse en un proyecto transversal. El título del proyecto, Jardín Geométrico, fue propuesto por los estudiantes, quienes, desde un principio, se apropiaron de la idea de embellecer el espacio alrededor de su salón de clases.

Etapas

La realización del proyecto tuvo las siguientes etapas:

1. Análisis de datos relacionados con la deforestación. Como parte de una evaluación de estadística, el docente diseñó un instrumento de evaluación con datos tomados del IDEAM[29] referentes a la cantidad de hectáreas de árboles deforestados en Colombia. Este ejercicio motivó a los estudiantes a querer contribuir con la reforestación del país y a defender el medio ambiente. Si bien los estudiantes fueron conscientes de que en la región la deforestación no es una de las principales problemáticas, diferentes noticias en televisión e

[29] Los datos fueron tomados de la página del IDEAM, www.ideam.gov.co.

Internet[30] les han mostrado que la deforestación en el país sí los está afectando indirectamente.

2. Revisión documental. Los estudiantes tuvieron como tarea consultar en Internet sobre algunos conceptos como deforestación, reforestación, IDEAM, PRAE, entre otros; además, tuvieron que indagar sobre los efectos de la tala ilegal, de la problemática actual del país en relación con la deforestación indiscriminada y sobre los beneficios de la reforestación.

3. Explicación de los cuerpos geométricos redondos y sus características. Uno de los ejes del proyecto era poder trabajar el tema de cuerpos redondos de una manera distinta a la tradicional. Por ello, el docente no dedicó mucho tiempo de clase para trabajar los ejemplos propuestos por el libro de texto[31], ejercicios que pedían calcular áreas y volúmenes en contextos no relacionados con lo cotidiano de los estudiantes. Más bien buscó que los estudiantes realizaran estos cálculos para sus propias materas.

4. Elección de los prismas para elaborar las materas. Luego de analizar las propiedades de los cuerpos redondos, los estudiantes evidenciaron la inconveniencia de su utilización en el proyecto; por esta razón, el docente propuso trabajar con poliedros. Junto con la profesora de artística, los estudiantes notaron que los prismas, por sus características, ofrecían ventajas para la construcción de las materas; notaron que el cálculo de las medidas era más simple y que era más fácil que las plantas expandieran sus raíces en una matera en forma de prisma que en forma de cono.

5. Capacitación sobre el proceso de la siembra. La profesora de Ciencias Naturales, con la colaboración del coordinador de la Institución y otros profesores, instruyeron a los estudiantes acerca de las condiciones del terreno, características de la región, como el clima y la humedad, y el tipo de plantas más adecuadas para sembrar.[32] Esto era importante, ya que debido a condiciones geográficas de la región, existen plantas que no se adaptan al clima, otras necesitan de un cuidado constante para su crecimiento, y algunas precisan de

[30] Se puede ver como ejemplo "Cuarenta mil canchas de fútbol: lo que creció la deforestación en Colombia entre 2017 y 2018" de Noticias Caracol. Recuperado de https://bit.ly/2JPal0n

[31] El libro de texto autorizado por el colegio es *Proyecto Saberes Matemáticas 9* de Santillana.

[32] La capacitación tuvo como base la experiencia personal de los docentes y la información recuperada del documento "Plantas para zonas calurosas". Recuperado de https://plantas.facilisimo.com/plantas-para-zonas-calurosas_891726.html

un abono y terreno especiales. Los consejos de los profesores permitieron a los estudiantes escoger las plantas para el proyecto, el sitio junto a su salón de clases para sembrar directamente en el suelo, ubicar las materas rodeando las plantas, y hacerse a una idea de las dimensiones que debía tener cada matera.

6. Elección de la planta, sorteo de los prismas y asignación del espacio dentro del jardín. Debido a la cantidad de estudiantes, ellos se organizaron en seis grupos de trabajo. Cada grupo escogió la planta que quería sembrar. Por sorteo, se asignó uno de los seis prismas a cada grupo y el espacio dentro del jardín donde la colocarían. Se construyeron materas en forma de prismas triangular, rectangular, pentagonal y hexagonal, una matera en forma de pirámide truncada y una matera en forma de prisma cuya base fuera un rombo. Las plantas escogidas fueron limón bebé, lirio, sábila, rosas, colino (que más adelante se cambió por chocolata) y novio.

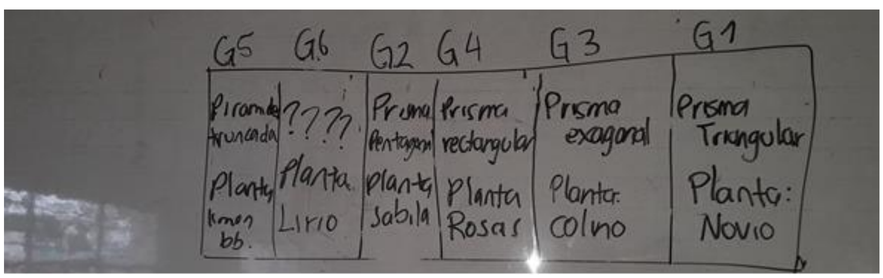


Figura 1. Asignación de plantas, prismas y lugares en el jardín.
Fuente: Elaboración propia.

7. Construcción de las materas y preparación del terreno para la siembra. Unos días antes de la siembra, los estudiantes construyeron sus materas en la clase de Artística. En clase de matemáticas, tomaron las medidas de las materas, y las decoraron con las fórmulas para el cálculo de cada área y el volumen y sus dimensiones propias; además, llevaron herramientas para deshierbar, mover la tierra, allanar un poco y echar algo de abono.

Figura 2. Estudiantes realizando diversas tareas para el proyecto.

Fuente: Elaboración propia.

8. Ubicación de la matera y sembrado de las plantas. Los estudiantes llevaron sus materas y sus plantas para organizar el jardín. Tenían claro cuál era su objetivo y qué debía hacer cada estudiante, cosa que hicieron sin la supervisión del profesor.

Figura 3. Adecuación del jardín por parte de los estudiantes.

Fuente: Elaboración propia.

9. La última etapa del proyecto fue la presentación del Jardín Geométrico a los padres de los estudiantes. Esta parte incentivó a los estudiantes a mostrar sus logros, hacer evidente su esfuerzo por contribuir a la sociedad, y ayudar a sensibilizar a la comunidad sobre la importancia de la forestación y el cuidado del medio ambiente.

Figura 4. Presentación del proyecto a padres de familia.
Fuente: Elaboración propia.

CONCLUSIONES

El objetivo principal del proyecto fue establecer un escenario de investigación en un contexto de situación de la vida real en el que los estudiantes trabajaran con conceptos geométricos. La cooperación entre las áreas de Ciencias Naturales, Artística y Matemáticas, permitió abordar con mayor claridad algunos temas, por ejemplo, el espacio necesario para el crecimiento de una planta y la técnica adecuada para sujetar las tablas al construir un prisma hexagonal; además, permitió que los docentes vieran que lo estudiado en la clase de matemáticas puede involucrarse con las Ciencias Naturales o las Artes, para desarrollar proyectos conjuntamente.

Respecto al profesor, en varios momentos del proyecto no pudo salir del paradigma del ejercicio, debido a la inseguridad que sintió al salirse de la zona de comodidad, como la llama Skovsmose (2012). Por su parte, los estudiantes tuvieron la experiencia de involucrarse en un proyecto que mostraba una geometría aplicada y llevada a su contexto diario; esto generó su empatía hacia el proyecto. La presentación del proyecto a los padres de familia fue motivante para los estudiantes, pues sus padres y otros miembros de la comunidad educativa valoraron su esfuerzo y agradecieron el embellecer las instalaciones del colegio.

Finalmente, cuando un estudiante encuentra este tipo de motivaciones, cuando comprende que debe ser responsable de su avance y adquisición de conocimientos, sin el control de un docente, y cuando propone soluciones a problemas cotidianos, utilizando la geometría, es cuando, en mi opinión, se comienza a lograr nuestro objetivo como educadores.

REFERENCIAS

Fernández, E. (S. f.). *Plantas para zonas calurosas [Mensaje en un blog]*. Recuperado de https://plantas.facilisimo.com/plantas-para-zonas-calurosas_891726.html

IDEAM (s. f.). *Monitoreo y seguimiento al fenómeno de la deforestación en Colombia*. Recuperado de http://www.ideam.gov.co/web/bosques/deforestacion-colombia

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje - Matemáticas*. Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). *Estándares Básicos de Competencias en Ciencias Naturales y Ciencias Sociales.* Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Autor.

Ministerio de Educación Nacional. (2010). *Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media*. Bogotá: Autor.

Sánchez, C., Sabogal, Y., Buitrago, L., Fuentes, J., Patiño, O., Joya, A. y Ramírez, M. (2016). *Proyecto Saberes Matemáticas 9*. Bogotá: Ed. Santillana.

Skovsmose, O. (2012). Escenarios de investigación. En P. Valero, Paola y O. Skovsmose, (eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 109-130). Bogotá: Universidad de los Andes.

ESTUDIO DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN FRACTAL UTILIZANDO UN SISTEMA DE FUNCIONES ITERADAS

Mariana Zamora, Alejandro Angulo

Gimnasio Vermont

mz1957@gimnasiovermont.edu.co, alejandro.angulo@gimnasiovermont.edu.co

La experiencia presentada en este documento surge de la realización de un estudio monográfico por parte de una estudiante de último grado en el marco del Programa del Diploma del Bachillerato Internacional. En tal estudio se abordó el constructo teórico "Sistema de Funciones Iteradas", que fue utilizado posteriormente para construir un fractal de creación propia utilizando un algoritmo computado en Excel.

INTRODUCCIÓN

La experiencia comunicada en la ponencia surgió de la realización, por parte de la primera autora (estudiante de grado 11.°, supervisada por el segundo autor), de una monografía para el Programa del Diploma Bachillerato Internacional en el Colegio Gimnasio Vermont de Bogotá. El tema general de la monografía fue la geometría fractal; sin embargo, también se incluyeron elementos de otras áreas de la matemática como el algebra lineal y la probabilidad. Se exploró la pregunta: ¿cómo se puede utilizar un sistema de funciones iteradas para construir un fractal?, se realizó un estudio del concepto *sistema de funciones iteradas* y de enfoques de iteración. Finalmente, se creó un algoritmo computado en Excel para construir un fractal.

¿QUÉ ES UN FRACTAL?

Un fractal es un objeto geométrico aparentemente irregular que exhibe el mismo tipo de estructura a toda escala, lo cual hace que muestre cierta *autosimilaridad*. El concepto fue propuesto por Mandelbrot en su libro "*Los objetos fractales*", como una forma de modelar matemáticamente objetos irregulares de la naturaleza. Mandelbrot lo define así:

Zamora, M. y Angulo, A. (2019). Estudio de la construcción de un fractal utilizando un sistema de funciones iteradas. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 297-305). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Conjunto u objeto fractal: Que tiene una forma, bien sea sumamente irregular, bien sumamente interrumpida o fragmentada y sigue siendo así a cualquier escala que se produzca el examen. (Mandelbrot, 1988, p.168).

ESTUDIO ACERCA DEL SISTEMA DE FUNCIONES ITERADAS

En la base de las técnicas para construir fractales, a diferentes escalas, está un sistema de funciones iteradas (SFI). Su comprensión implica estudiar las funciones que lo conforman. A continuación, una síntesis de tal estudio.

Transformaciones del SFI

Las funciones que componen un sistema de funciones iteradas son transformaciones en el espacio (en el caso de este estudio: $\mathbb{R}^2$). La herramienta matemática utilizada para su construcción es el álgebra lineal, por lo que las funciones son expresadas usando notación propia del espacio vectorial de matrices. El estudio se centró en tres transformaciones principales:

Rotación

$$R_\alpha(P) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} [P]$$

Donde α es el ángulo de rotación. Es necesario aclarar que esta se realiza tomando el origen del sistema de coordenadas como centro de rotación, relativa al eje x, en sentido positivo.

Escala

$$S_{k_1 k_2}(P) = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} [P]$$

En la que k_1 es el factor de escala en x y k_2 en y.

Cuando el factor de escala es igual para x y y, siendo k el factor de escala:

$$S_k(P) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} [P]$$

En un fractal, se deben realizar a escala copias de la figura inicial para que cumpla con la condición de autosimilaridad.

Traslación

La traslación, a diferencia de las dos transformaciones anteriores, no es una transformación lineal. Se realiza sumando un vector a una matriz: el vector (T).$T_{(x,y)}(P) = [P] + \begin{bmatrix} x & x & \cdots & x \\ y & y & \cdots & y \end{bmatrix}$

Para el vector que define la transformación:

$$T \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \cdots & t_{1,j} \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \cdots & t_{2,j} \end{bmatrix}$$

Todos los elementos $1, j$ son iguales entre sí, y los elementos $2, j$ son iguales entre sí. Siendo j =1,2… n.

Al realizar una traslación sobre un conjunto de puntos P, la dimensión de la matriz que determina la traslación y la matriz que determina el conjunto deben ser iguales. Si se trabaja en $\mathbb{R}^2$ debe ser siempre de dimensión $2 \times n$.

Definición de transformaciones realizadas a un único punto.	Definición de transformaciones realizadas a un conjunto de puntos.
$T_{(x,y)}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $R_\alpha: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $S_k: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$	$T_{(x,y)}: E \longrightarrow E$ $R_\alpha: E \longrightarrow E$ $S_k: E \longrightarrow E$
Tabla 1. Definiciones formales de las funciones *Nota*. E es el espacio de las matrices de dimensiones ($2\times n$)	

Transformación afín como síntesis del SFI

Para construir el fractal se usó una transformación afín, que es aquella que recoge, en una sola, todas las transformaciones que se desean realizar. Como el producto de matrices cumple la propiedad asociativa, pero no la conmutativa, es muy importante el orden en el que se realizan las transformaciones (Kolman y Hill, 2006).

Al estudiar variados ejemplos, se llegó a una generalización de cómo se forma la transformación afín en la que el orden es rotación, escala y traslación:

$$T(P) = \left[\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} [P]\right] + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

En la transformación afín, α es el ángulo de rotación, a y d son los factores de escala en x y y respectivamente, b y c son los desplazamientos en x y y para el sesgo, y $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ el vector de traslación.

Al realizar los productos entre matrices de las transformaciones lineales, se obtiene la transformación afín:

$$T(P) = \begin{bmatrix} a\cos\alpha - c\sin\alpha & b\cos\alpha - d\sin\alpha \\ a\sin\alpha + c\cos\alpha & b\sin\alpha + d\cos\alpha \end{bmatrix} [P] + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Para simplificar la matriz, cada uno de sus elementos fue representado por una letra de la siguiente manera: $T(P) = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} [P] + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

Se pudieron encontrar ecuaciones para los elementos de la matriz (2 x 2) en la transformación que conlleva una rotación con ángulo α definido e igual escala en x e y. $p = k \cos\alpha$; $q = -k\sin\alpha$; $r = k\sin\alpha$; $s = k \cos\alpha$

Enfoques de iteración

Como se dijo, un fractal es aquella figura que parte de una estructura básica y se repite a varias escalas; es precisamente la iteración de las transformaciones en el sistema la que "captura" algebraicamente la autosimilaridad del fractal.

Es importante comprender que para construir el fractal sería necesario realizar infinitas iteraciones, por lo que se dice que a medida que la cantidad de iteraciones va tendiendo a infinito, la imagen del fractal se va acercando a cómo luciría el fractal en sí; formalmente, de acuerdo con Barnsley (1993), $\lim_{n\to\infty} T(\psi) = \phi$), en donde T es la transformación por aplicar, n es el número de iteraciones, y ϕ es el atractor (fractal) resultante, hecho que es fundamento del Teorema del Collage. El proceso de iterar las transformaciones del SFI se puede realizar a partir de dos enfoques: el determinista y el aleatorio (Rubiano, 2009).

Enfoque determinista

En este enfoque las iteraciones se realizan partiendo de un conjunto de puntos definidos al cual se aplican las transformaciones, lo que genera otro conjunto de puntos a los cuales es necesario aplicar las transformaciones nuevamente. Este proceso puede realizarse en un entorno de geometría dinámica como GeoGebra, pero requiere bastante tiempo lograr un número de iteraciones suficiente para apreciar el atractor. En este enfoque todas las repeticiones y ajustes se deben hacer mediante cálculos utilizando la transformación afín.

Enfoque aleatorio

Este enfoque plantea una forma diferente de realizar las iteraciones utilizando apoyo en otra rama de las matemáticas: se denomina aleatorio porque la iteración consiste en una aplicación aleatoria de las transformaciones dependiendo de las probabilidades que se les asignen (Adame, 2005).

En este enfoque la iteración sigue los siguientes pasos:

1. Se selecciona un punto inicial V_o de coordenadas (x_o, y_o)
2. Se le asigna a cada transformación del SFI una probabilidad $p_i > 0$; $i = 1,2 \ldots n$. Tal que: $p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$. Estas se refieren a la probabilidad de que se le aplique cada una de las transformaciones a un punto dado.
3. Se elige un número aleatorio r. Tal que $r \epsilon [0, 1)$
4. r y las probabilidades se relacionan de la siguiente manera:
   Si $0 \leq r < p_1$entonces se aplica la primera transformación $T_1(V_o) = V_1$
   Si $p_1 \leq r < p_1 + p_2$ entonces se aplica $T_2(V_o) = V_1$
   Si $p_2 \leq r < p_1 + p_2 + p_3$ entonces $T_3(V_o) = V_1$
   Si $p_{n-1} \leq r < p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$ entonces se aplica la enésima transformación $T_n(V_o) = V_1$
5. Se traza el punto V_1, de coordenadas (x_1, y_1), y se realizan nuevamente los pasos 3 y 4 sobre V_1 manteniendo las probabilidades de las transformaciones para obtener V_2. Se realiza lo mismo i veces para obtener el punto V_i. Siendo i el número de iteraciones realizadas.

Para un fractal autosimilar en el que se quiere que los puntos se distribuyan de forma uniforme, la asignación de probabilidades a las transformaciones debe ser uniforme. De lo contrario, se generarán más puntos asociados a la transformación con una mayor probabilidad asignada.

Para el fractal construido en este estudio, la estructura básica de la cual se partió fue un segmento que se transformó en tres, los cuales medían la mitad del segmento inicial, como se muestra en la figura 1.

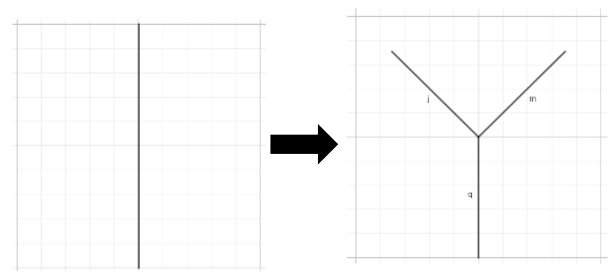


Figura 1. Semilla del fractal

Es necesario distinguir tres transformaciones: la Transformación 1 es la que resulta en el segmento 1 (representado con la letra q en la imagen); la Transformación 2 en el 2 (representado con la letra j); y la Transformación 3 en el 3 (representado con la letra m). Para construir la figura mostrada se realizó una escala a un factor de $\frac{1}{2}$ para todos los segmentos. Para el segmento 2 y 3 se realizaron rotaciones de $45°$ y $-45°$ respectivamente, además de una traslación de $\frac{1}{2}$ en el eje y.

Para hallar los elementos de cada transformación afín que a su vez representan las “partes” del fractal, se utilizaron las ecuaciones encontradas anteriormente.

Transformaciones	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{e}$	$\boldsymbol{f}$
T_1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0
T_2	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
T_3	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{1}{2}$

Tabla 2. Transformaciones afines del fractal a construir

Inicialmente, se desarrolló una aproximación determinista a la iteración del SFI usando Geogebra. Para ello se creó una "macro", una herramienta nueva que generara la iteración del SFI, pero se requieren dos puntos cada vez que se va a realizar una iteración, así toma bastante tiempo producir una imagen como la de la figura 2.

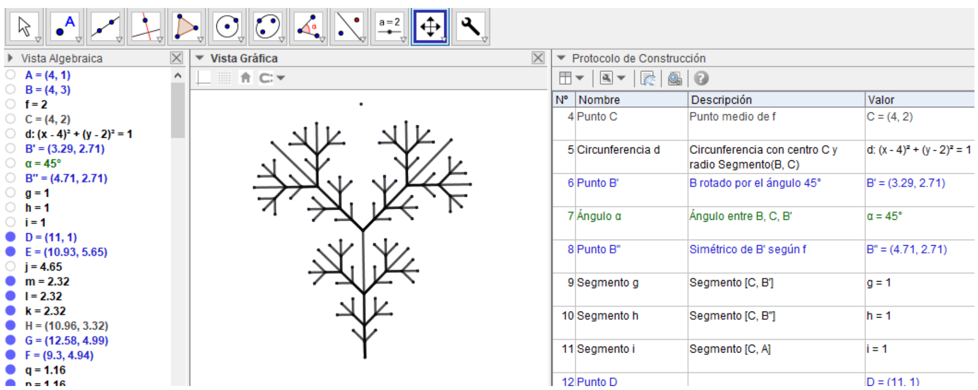


Figura 2. Imagen después de 5 iteraciones del SFI en el entorno de Geogebra

Por lo anterior, se decidió utilizar el enfoque aleatorio para realizar las iteraciones con apoyo en Excel como herramienta de computo. Para llevarlo a cabo fue necesario utilizar dos funciones del programa: *ALEATORIO* y *SI*. Para poder comprender cómo se utilizó la función *SI*, es necesario reconocer que: $x' = \big(p(x_o) + q(y_o)\big) + e$, así como $y' = \big(r(x_o) + s(y_o)\big) + f$ Siendo p, q, r, s, e y f los elementos de la transformación afín realizada y (x_o, y_o) las coordenadas del punto al cual se le realiza la transformación.

Debido a que eran tres transformaciones y la asignación de probabilidades se realizó de manera uniforme, cada una tuvo una probabilidad de $\frac{1}{3}$ de ser aplicada.

Se crearon funciones en Excel para obtener las coordenadas de x' y y' partiendo desde un punto inicial aleatorio. Las funciones realizan una búsqueda en tres intervalos: $\left[0, \frac{1}{3}\right)$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, o $\left[\frac{2}{3}, 1\right)$, para encontrar a cuál pertenece el número aleatorio, y basado en el rango al cual pertenece, realiza la transformación correspondiente.

Las funciones se utilizaron para obtener 10000 puntos y se realizaron gráficos de dispersión representando el fractal construido con 4996, 7000 y 10000 puntos como se muestra a continuación.

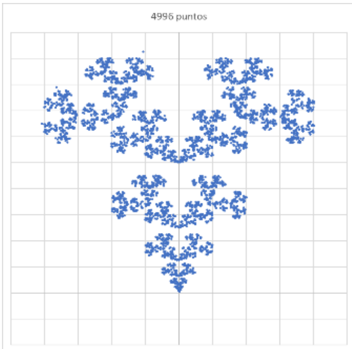
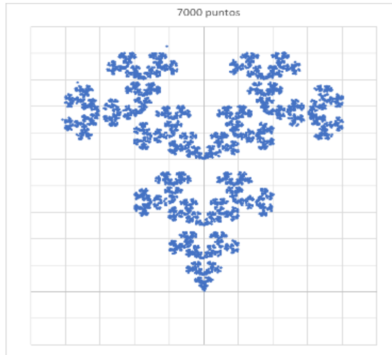
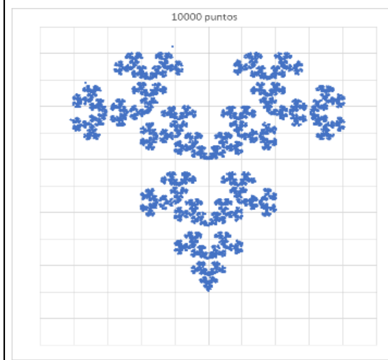
4996 puntos	7000 puntos	1000 puntos
		

Figura 3. Gráficos generados en Excel del algoritmo de iteración aleatoria

CONCLUSIONES

El estudio de cada parte del SFI permitió que se alcanzara una buena comprensión de la fórmula de Excel que permitió modelar el fractal.

El tema trabajado es relativamente nuevo tanto para el mundo de las matemáticas como para su autora, lo que fue un componente muy interesante de la investigación. Por un lado, la bibliografía utilizada fue, en su mayoría, escrita por los matemáticos que trabajaron por primera vez esta área lo que permitió que la investigación fuera más cercana a su perspectiva. Por otro lado, al ser un tema trabajado durante poco tiempo, para alcanzar una amplia comprensión fue necesario estudiar a fondo nuevos conceptos y familiarizarse con una geometría distinta a la trabajada comúnmente en sus cursos de matemática del colegio.

El papel de la tecnología en la investigación fue muy importante, pues permitió que se pudiera construir el fractal de una manera más rápida, y que se pudiera representar una gran cantidad de puntos.

REFERENCIAS

Adame S., E. A. (2005). *Sistemas de funciones iteradas y los fractales*. Bogotá: Fundación Universitaria Konrad Lorenz.

Barnsley, M. (1993). Fractals Everywhere. San Francisco: Morgan Kaufmann.

Kolman, B., y Hill, D. R. (2006). *Álgebra Lineal*. (Octava edición). Ciudad de México: Pearson Educación de México.

Mandelbrot, B. (1988). *Los objetos fractales*. Barcelona: Libros para pensar la ciencia.

Rubiano, G. (2009). *Iteración y fractales*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Pósteres

GEOMETRÍA. RA COMO HERRAMIENTA PEDAGÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DEL PENSAMIENTO ESPACIAL

Esperanza Beltrán, Ana Patricia Cerero, Adriana Patricia Herrera
Independiente
esperanza_8410@hotmail.com, pattycerero@gmail.com, aphc1983@hotmail.com

El proyecto tiene como fin crear un material didáctico para que los estudiantes desarrollen conocimiento de geometría espacial. Consta de talleres prácticos que, a través del uso de una aplicación de realidad aumentada (RA), les permitirá visualizar y manipular sólidos, para resolver problemas.

ENSEÑANZA DE GEOMETRÍA ESPACIAL CON REALIDAD AUMENTADA

Esta propuesta es el resultado de las diferentes experiencias vividas a través del paso por la educación, tanto básica como universitaria, y en nuestra práctica docente. Identificamos las dificultades que tienen los estudiantes, las mismas que experimentamos durante nuestra formación, cuando se enfrentan a conceptos propios de la geometría espacial de manera abstracta, tratan de comprender el desarrollo de sólidos a partir de representaciones en una superficie de dos dimensiones, y deben identificar las diferencias y relaciones existentes entre lo bidimensional y lo tridimensional. A partir de esta problemática y contemplando el auge que tiene hoy en día el uso de distintas aplicaciones, entre estas la realidad aumentada, se pretende usarla para potenciar el desarrollo de habilidades y competencias propias del pensamiento espacial y de los sistemas geométricos, para lograr que aquellos objetos abstractos migren a un contexto cotidiano del estudiante, combinando “objetos virtuales […] en tercera dimensión o animaciones, con entornos físicos reales” (Céspedes, 2012, p. 52).

Geometría. RA

Últimamente, se utilizan diferentes herramientas tecnológicas en las aulas de clase para favorecer el aprendizaje; sin embargo, “en la educación son muy pocas las experiencias que se conocen” (Céspedes, 2012, p. 53), acerca del uso de las aplicaciones de RA. Geometría.RA pretende ser un apoyo en el proceso de enseñanza y aprendizaje, al momento de abordar temas de la geometría espacial, con el fin de favorecer la comprensión del estudiante, por medio de la visualización y manipulación de objetos tridimensionales, con el fin de hallar un acercamiento a diferentes conceptos geométricos como deconstrucción de figuras sólidas, perímetro, área, volumen e isometrías. Por tal razón, se diseñó un material didáctico conformado por tres cartillas, de acuerdo

Beltrán, E., Cerero, A. y Herrera, A. (2019). Geometría.Ra como herramienta pedagógica para la enseñanza del pensamiento espacial. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 309-310). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

al nivel de educación: diseñadores (4.° y 5.° primaria), arquitectos (6.° y 7.° bachillerato) e ingenieros (8 y 9 de bachillerato), en las que se requiere el uso de una aplicación de realidad aumentada para Android, que hemos creado. Esta permite visualizar los objetos involucrados en los temas propuestos en cada una de las cartillas.

La cartilla *Diseñadores* se enfoca en la deconstrucción de sólidos y los conceptos básicos sobre perímetro y área de figuras planas y sólidos geométricos; *Arquitectos* tiene como tema fundamental volúmenes y aplicaciones en contextos; *Ingenieros* permite abordar el tema de las proyecciones utilizando cubos truncados. La aplicación Geometría.RA, creada en Unity, está compuesta por cuatro escenas:

- Inicio: botones Sólidos, Aplicaciones, Proyecciones y Salida.
- Sólidos, Aplicaciones y Proyecciones: la cámara captura los marcadores guardados en la base de datos *vuforia,* y los relaciona con los diferentes solidos geométricos, objetos o cubos truncados configurados en *unity*, ajustando “la posición del modelo 3D que aparece en la pantalla cuando le movemos o giramos” (Rigueros, 2017, p. 260).

Este material didáctico permite abordar la temática de solidos geométricos como una secuencia. El estudiante tiene un papel activo en su proceso de aprendizaje. Con el material se fomenta la lectura, ejercitación y simulación. De esta manera, se impulsa el desarrollo de habilidades para hallar y utilizar información, construir significados e interactuar con diferentes contextos.

REFERENCIAS

Céspedes de los Ríos, G. (2012). Realidad aumentada como herramienta en la enseñanza de geometría básica. *Revista Panorama-Análisis*, 8, 50-58. Recuperado de http://revia.areandina.edu.co/ojs/index.php/Ll/article/viewFile/424/458

Rigueros, C. (2017*). La realidad aumentada: lo que debemos conocer. TIA*, 5(2), 257-261. Recuperado de https://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/tia/article/download/11278/pdf/

Resolver un problema con tecnología digital: más que usar un artefacto

William Cárdenas, **Yessica Galvis**, **Camilo Sua**
Universidad Pedagógica Nacional
wacardenas@upn.edu.co, ymgalvisr@upn.edu.co, jcsuaf@pedagogica.edu.co

Se quiere presentar evidencia de la pertinencia de incorporar tecnologías digitales en la clase de matemáticas, para poder resolver un problema geométrico que difícilmente se puede hacer a partir de la manipulación de material concreto.

Dado un sector circular se puede construir un cono al superponer los extremos del sector. ¿Cuál es la amplitud del ángulo del sector para que el cono tenga volumen máximo? Lo anterior fue una tarea propuesta en el *Seminario Tecnología en Ciencias y Matemáticas* de la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional durante el semestre 2018-1. Esta tarea se presentó con el objetivo de poner en evidencia el uso de Tecnologías Digitales (de aquí en adelante denotada como TD), para obtener una solución óptima a un problema que, con recursos concretos, no podría ser abordado de igual forma. Inicialmente, se solicitó usar acetato, lana, regla y lápiz para recrear un modelo de la situación que fuera útil en la generación de estrategias de solución y para advertir sobre posibles respuestas. Luego se invitó a los estudiantes a hacer uso de TD (*v.g.*, GeoGebra y Excel) con la finalidad de obtener precisión en los cálculos de la situación explorada.

La manipulación de los materiales concretos no permitió obtener una respuesta precisa, dado que no se conocían con exactitud algunas medidas como la del radio de la base y la de la altura del cono, necesarios para realizar los cálculos pertinentes. Por ello, se construyó el cono en GeoGebra y se calculó el volumen. Al arrastrar uno de sus vértices, fue posible identificar un rango de valores para el radio de la base del cono en que el volumen era máximo. Posteriormente, se utilizó una tabla de valores en Excel para obtener un valor más preciso. En esta se registraron valores para el radio del cono con variación de 0,0001 cm; para cada uno se calculó la altura y volumen del cono correspondiente. Con estos datos se calculó el ángulo buscado del sector circular, gracias a una fórmula conocida.

Cárdenas, W., Galvis, Y. y Sua, C. (2019). Resolver un problema con tecnología digital: más que usar un artefacto. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 311-313). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Villareal (2012) afirma que investigaciones en Educación Matemática han mostrado que existen cambios en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas cuando se incorporan las TD. Por ejemplo, en la creación de ambientes donde las matemáticas son concebidas como una ciencia experimental, en la cual las TD permiten la generación y validación de conjeturas, ensayar y aprender del error, el desarrollo de procesos como la visualización, entre otros. A su vez, Pedró (2012) afirma que el uso de las TD contribuye a transformar las prácticas de la escuela en espacios flexibles y eficaces. El impacto de implementar estas herramientas demanda un cambio de roles de estudiantes y profesores. En primer lugar, las actitudes de los estudiantes cambian debido a que asumen con mayor responsabilidad su aprendizaje y también sus capacidades de colaboración, de dominio de la tecnología y de solución de problemas. En segundo lugar, como lo mencionan Papadopoulos y Dagdilelis (2009), exige que los profesores estén capacitados para incluir las TD en el aula. Esto implica reconocer el cambio y el dinamismo que tienen los objetos de acuerdo a las estrategias que se empleen en determinada tarea.

En la tarea propuesta era pertinente el uso de material concreto para visualizar la situación y reconocer las dificultades inherentes. El uso de TD favoreció procesos como la visualización, comunicación y argumentación entre los grupos de trabajo; además, permitió encontrar la solución a través de diferentes estrategias, de acuerdo a la forma en la que cada grupo abordó la situación propuesta. El problema incitó la reflexión acerca de las responsabilidades que tienen los profesores de matemáticas cuando incorporan TD en sus clases, a saber: crear tareas que requieran el uso de TD, tener claros los objetivos de enseñanza y aprendizaje, ser consciente de las diferentes formas de razonar de los estudiantes cuando enfrentan un problema, entre otros.

Referencias

Papadopoulos, I. y Dagdilelis, V. (2009). ICT in the Classroom Microworld - Some Reservations. En M. D. Lytras, P. Ordonez de Pablos, E. Damiani, D. Avison, A. Naeve y D. G. Horner (eds.), *Best Practices for the Knowledge Society. Knowledge, Learning, Development and Technology for All. WSKS 2009. Communications in Computer and Information Science*, vol. 49, (pp. 137-145). Berlin: Springer, Heidelberg.

Pedró, F. (2012). *Tecnología y escuela. Lo que funciona y por qué.* Madrid: Fundación Santillana.

Villarreal, M. (2012). Tecnologías y Educación Matemática: Necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *Virtualidad, Educación y Ciencia, 3*(5), 73-94.

UNA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA PARA CONSTRUIR DISTRIBUCIONES CONJUNTAS BIVARIADAS, A TRAVÉS DE UN TIPO DE CÓPULAS

Luis Eduardo Castillo, **Santiago García**
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
lecastillom@udistrital.edu.co; segarciap@correo.udistrital.edu.co

A través de un tipo especial de cópulas, se quiere presentar una interpretación geométrica de cómo se pueden construir distribuciones conjuntas bivariadas de probabilidad, a partir de una pirámide.

PROPUESTA

Sea la cópula bivariada definida como:

$$C(u,v) = (1-a)uv + aW(u,v) + ab(M(u,v) - W(u,v))$$

definida de $[0,1]^2$ en $[0,1]$ con $0 \leq a,b \leq 1$, donde $W(u,v)$ y $M(u,v)$ son $máx\{u+v-1,0\}$ y $mín\{u,v\}$ respectivamente los límites de Fréchet (Trivedi y Zimmer, 2007). Por el Teorema de Sklar, cualquier distribución conjunta bivariada de variables aleatorias continuas queda determinada de forma única a través de esa cópula. (Nelsen, 2006)

La función $H(u,v) = ab\big(M_S(u,v) - W_S(u,v)\big)$, definida de $[0,1]^2$ en $[0,1]$ y $0 \leq a,b \leq 1$, se puede considerar como una función generadora de cópulas y, por ende, de distribuciones conjuntas bivariadas. La función H representa geométricamente una pirámide y cualquier valor de $0 \leq a,b \leq 1$, define diferentes pirámides de la misma base de H y con altura menor o igual a ½ . (Moise, 1991).Un acercamiento geométrico de H, cuando $a = 1$ y $b = 1$, lo podemos ver a través de la Figura 1. También, y a manera de ejemplo, una pirámide se puede generar cuando $a = 0.25$ y $b = 0.75$, como también se puede apreciar en la Figura 1.

Castillo, L. y García, S. (2019). Una interpretación geométrica para construir distribuciones conjuntas bivariadas, a través de un tipo de cópulas. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 315-316). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

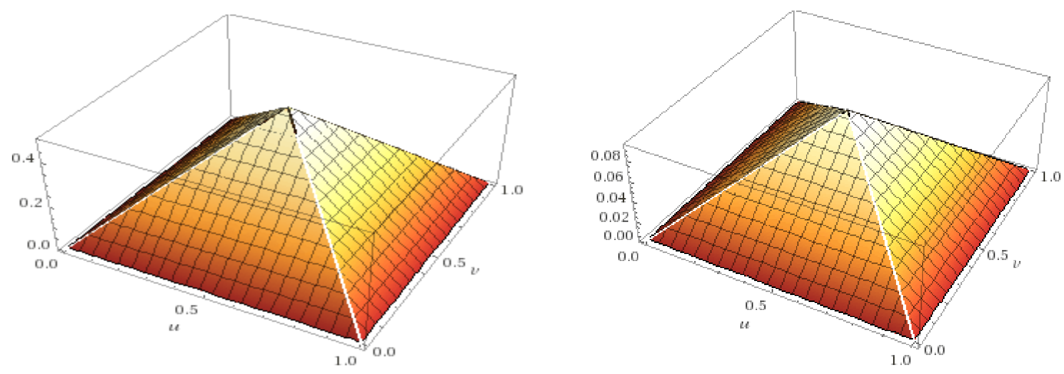


Figura 1: A la izquierda, acercamiento geométrico de la función H, cuando $a = 1$ y $b = 1$; a la derecha, acercamiento geométrico de la función H, cuando $a = 0.25$ y $b = 0.75$.

Finalmente, en la Figura 2, desde una óptica geométrica, se puede ver el comportamiento geométrico de las distribuciones bivariadas de probabilidad, cuando $a = 0.25$ y $b = 0.75$, como una deformación de la pirámide cuando $a = b = 1$ y dada por la cópula:

$$C(u,v) = 0.75uv \ + \ 0.25W(u,v) + 0.1875(M(u,v) \ - \ W(u,v))$$

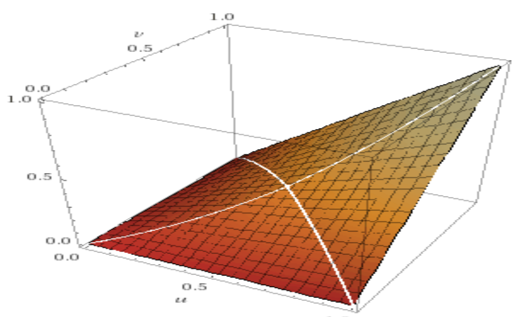


Figura 2: Acercamiento geométrico de la cópula cuando *a* = 0.25 y *b* = 0.75

REFERENCIAS

Moise, E. E. y Downs Jr., F. L. (1991). *Geometry* (first edition). Addison-Wesley Publishing Company.

Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Nueva York: Springer.

Trivedi, P. K., y Zimmer, D. M. (2007). Copula Modeling: An Introduction for Practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics*, *1*(1), 1-111. http://dx.doi.org/10.1561/0800000005.

INGENIERÍA DIDÁCTICA: ESTRATEGIA PERCEPTIVA CON DGPAD COMO MEDIO PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Mikel Vincent De Castro, **Jesús David Berrío**

Universidad del Atlántico

mvdecastro@est.uniatlantico.edu.co, jberriovalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Comunicamos avances de un proyecto que busca mostrar una manera alternativa de enseñar la geometría. Consideramos que esta es un área de las matemáticas donde se razona con figuras, luego asumimos que esta comprende dos aspectos fundamentales: los procesos de percepción de las figuras, donde entra en juego la intuición y, los procesos de razonamientos teóricos utilizando las figuras, donde entra en juego la deducción. A partir de esto, buscamos que los estudiantes se introduzcan en la parte teórica de la geometría, partiendo de la estrategia perceptiva y la intuición, llegando a un equilibrio entre lo perceptivo y lo teórico.

INTRODUCCIÓN

Actualmente, se busca que la enseñanza de la geometría esté basada en metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimiento por parte de los estudiantes (Gutiérrez y Jaime, 2012). Se asume que la geometría es el área de las matemáticas que se ocupa de razonar con figuras. Por lo tanto, se dice que esta comprende dos aspectos fundamentales: los procesos de percepción de las figuras, en los que actúa la intuición y los procesos de razonamientos teóricos utilizando las figuras, en los actúa la deducción (Acosta y Fiallo, 2017). A partir de esto, buscamos que los estudiantes se introduzcan en la teoría, pero a través de la percepción de las figuras, y así lograr un equilibrio entre la percepción y la teoría. Por lo tanto, el objetivo de esta presentación es ofrecer una propuesta para la enseñanza de la geometría que favorece el proceso de la exploración de las figuras mediante los procesos de percepción e intuición y como esto lleva a la necesidad de explicar relaciones o propiedades geométricas.

De Castro, M. y Berrío J. (2019). Ingeniería didáctica: estrategia perceptiva con DGPad como medio para la enseñanza de la geometría. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 317-319). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO DE REFERENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Tomando como marco teórico didáctico la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007), buscamos que se produzca un aprendizaje por adaptación, resultado de la interacción del estudiante con el medio (software de geometría dinámica DGPad). El profesor propone una actividad que el estudiante debe desarrollar. Por ejemplo, "Dados dos puntos A y B, construir 20 puntos P tales que $AP = PB$". Se busca que los estudiantes identifiquen la mediatriz como lugar geométrico, utilizando la "técnica del hilvanado" en la cual se parte de un dibujo aproximado para deducir las propiedades del lugar buscado. Probablemente, los alumnos comienzan a utilizar directamente la técnica del hilvanado, o pueden construir algunos puntos que ya saben que son equidistantes de A y B: el punto medio de AB, y los vértices del cuadrado de diagonal AB. Una vez que han encontrado más de cinco puntos que cumplan aproximadamente la condición, comenzarán a buscar otras posiciones hasta completar los 20 puntos pedidos.

METODOLOGÍA

Empleamos la Ingeniería Didáctica que se ajusta al estudio de realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de las situaciones didácticas (Artigue, Moreno y Douady, 1995). En Didáctica de las Matemáticas, esta es utilizada con una doble función: para designar una metodología de investigación y para señalar un proceso de producción de secuencias de enseñanza y aprendizaje. En este caso, se busca controlar el medio con el que interactúa el estudiante y la manera en que interviene el profesor.

RESULTADOS ESPERADOS

Luego de un análisis a priori, se espera que el estudiante produzca un aprendizaje por adaptación, y concluya que la mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan con los extremos de dicho segmento.

REFERENCIAS

Acosta, M. y Fiallo, J. (2017). *Enseñando geometría con tecnología digital: una propuesta desde la teoría de las situaciones didácticas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Artigue, M., Moreno, L. y Douady, R. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Libros de Zorzal.

Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 32, 55-70.

SE LLAMA EUCLÍDEA Y ES UN VIDEOJUEGO

Yessica Galvis, **Camilo Sua**
Universidad Pedagógica Nacional
ymgalvisr@upn.edu,co, jcsuaf@pedagogica.edu.co

Con el ánimo de incorporar tecnologías digitales en la clase de geometría escolar, en un ambiente donde estos recursos son inexistentes, se ha escogido la aplicación Euclídea. Esto porque son escasas las investigaciones en Educación Matemática que analizan su pertinencia y bondades en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Lo anterior implica una apuesta de carácter personal por el uso decidido de esta herramienta, para determinar su potencial y favorecer así la formulación de argumentos por parte los estudiantes cuando resuelven problemas.

En el marco del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, cuya cohorte 2018-1 está adscrita al énfasis en Tecnología Digital y Educación Matemática, se está desarrollando un trabajo de grado que tiene sus origines en una motivación personal, la cual contempla principalmente dos asuntos. El primero de ellos hace referencia a promover en la clase de geometría procesos de argumentación. Esto obedece a lo expuesto en los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas (MEN, 1998), en los que se indica que la argumentación hace parte fundamental de los cinco niveles del desarrollo del pensamiento geométrico. Los argumentos pueden ser de carácter informal o de carácter deductivo, según el nivel.

La segunda motivación consiste en ver el potencial del uso de Tecnología Digital en los procesos de enseñanza y aprendizaje, apuesta que lidera el Ministerio de Educación Nacional desde inicios de este siglo. Es premisa que las tecnologías de la información permiten que la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se vivan desde otra perspectiva, particularmente con los programas de geometría dinámica. Como bien lo señalan Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004), estas posibilitan el estudio de los componentes fundamentales de las figuras geométricas y sus propiedades.

Galvis, Y. y Sua, C. (2019). Se llama Euclídea y es un videojuego. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 321-323). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

El trabajo de grado actualmente se desarrolla en el Colegio Rafael María Carrasquilla (Bogotá) con estudiantes de grado noveno, los cuales no tienen acceso a equipos de cómputo en la clase de matemáticas. Tal circunstancia llevó a contemplar el uso de tecnología móvil (celulares, tabletas); lo cual conllevó a realizar una búsqueda de programas y aplicaciones (Geogebra, DGPad, entre otros) que sean compatibles con los dispositivos en mención. Se escogió Euclídea, la cual se ambienta en la modalidad de videojuego. Sin embargo, para su incorporación y uso correcto, es necesario que los estudiantes tengan un conocimiento básico de geometría euclidiana. Esto condujo a diseñar algunas tareas con regla y compás con el fin de proveer herramientas conceptuales a los estudiantes, que les permitan resolver las tareas propuestas por Euclídea, y asimismo generar argumentos que sustenten sus estrategias de solución.

Este videojuego tiene como objetivo realizar construcciones geométricas utilizando regla y compás. Euclídea ofrece cerca de 120 niveles (tareas), en los cuales se va incrementando la dificultad. Para resolver las tareas se pueden utilizar rectas, circunferencias y otros objetos geométricos particulares. Euclídea le permite al jugador poner a prueba conocimientos geométricos, experimentar el proceso de construcción, gracias al dinamismo de los objetos representados en pantalla, y recibir una realimentación sobre la pertinencia de su propuesta. Lo anterior permite relacionar este videojuego con programas de geometría dinámica.

A través del póster, se pretende mostrar al público una herramienta alternativa, de fácil acceso, para usar en la clase de geometría. Sobre esta no se han encontrado investigaciones, lo que lleva a considerar nuevas oportunidades apoyadas en tecnología móvil a favor de la enseñanza de la geometría. Se quiere también presentar las perspectivas teóricas que sustentarán este estudio, específicamente la clasificación de los argumentos de los estudiantes en un ambiente de geometría dinámica (Flores, 2007), y la apropiación que logran los estudiantes de la herramienta tecnológica, escogiendo para esto la Génesis Instrumental (Sua y Camargo, 2019).

REFERENCIAS

Castiblanco, A., Urquina, H., Camargo, L., y Acosta, M. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Flores, H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Serie de Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Bogotá: Autor.

Sua, C. y Camargo, L. (2019). Geometría dinámica y razonamiento científico: Dúo para resolver problemas. *Educación Matemática*, *31*(1), 7-37.

EL MOOC COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Camilo Garzon,[1] Carlos León,[1] Sergio Rubio-Pizzorno[2]

Universidad La Gran Colombia,[1] Instituto GeoGebra Internacional[2]

cgarzonm@ulagrancolombia.edu.co, carlos.leon@ugc.edu.co, zergiorubio@gmail.com

La tecnología y sus avatares nos permiten pensar, como docentes, en la educación matemática desde variadas perspectivas. Una de tales es la construcción de un *Massive Open Online Course* (MOOC) o mejor conocido como curso abierto, masivo y en línea. Es un espacio académico flexible y abierto que nos permite llegar a distintos tipos de poblaciones, mediante el uso de las tecnologías digitales.

La tecnología ha traído distintos cambios en nuestra sociedad del siglo XXI y la educación no queda exenta de tales avatares. Da lugar a la construcción de conocimiento de manera más autónoma que permita materializar soluciones a las problemáticas de las personas y sus comunidades (Rubio-Pizzorno, 2018). A partir de este planteamiento, se configura esta comunicación —la cual reporta la etapa inicial de un proyecto de grado—, que apunta al uso de recursos educativos abiertos. Estos contribuyen a “mejorar dramáticamente las vidas de cientos de millones de personas a lo ancho y largo del mundo a través de oportunidades educacionales libremente disponibles, de alta calidad, y relevantes localmente” (Open Society Institute y Shuttleworth Foundation, 2007). Específicamente consideramos la elaboración de un Curso abierto, masivo y en línea (MOOC, por sus siglas en inglés). En este, el tiempo y los espacios académicos son flexibles para los estudiantes, el docente puede estructurar una secuencia educativa pertinente a los contenidos del curso y proponer distintos tipos de actividades reflexivas, de evaluación y de socialización. Para estructurar el MOOC se utiliza el modelo RASE (Poveda, 2019) el cual recomienda disponer claramente de Recursos, Actividades, Soporte y Evaluación.

Garzón, C., León, C. y Rubio, S. (2019). El MOOC como herramienta didáctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 325-327). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Los temas que se van a enseñar en el MOOC corresponden de manera general al estudio de nociones geométricas, específicamente considerando el carácter dinámico de la geometría (Rubio-Pizzorno, 2018), para lo cual se ha planteado el uso de ambientes de geometría dinámica. En cuanto a estas tecnologías, actualmente se evalúa la pertinencia de diferentes tecnologías digitales a utilizar en este proyecto, según su valor pragmático y epistémico (Artigue, 2002). Entendemos el valor pragmático como el potencial productivo de la tecnología digital, referido al aprovechamiento de la herramienta en relación también a su eficiencia; y el valor epistémico como la comprensión de los objetos matemáticos que se movilizan, permitiendo su visualización y su articulación desde el propio concepto y la construcción de este. Pero se debe realizar hincapié sobre la formalidad en los argumentos para el uso de esta herramienta, por tal razón se da prioridad a un análisis de las situaciones de enseñanza-aprendizaje según las naturalezas de la geometría, reportadas por Rubio-Pizzorno (2017), a saber: la naturaleza epistémica, epistemológica, filosófica y digital. En cuanto a la naturaleza epistémica se refiere al "conocimiento geométrico referente a la construcción metodológica y racional de los objetos y representaciones" (p. 144), la naturaleza epistemológica da cuenta de los fundamentos y métodos para construir el conocimiento, la naturaleza filosófica se entiende como una explicación racional de la relación entre los diferentes diagramas y las diferentes conclusiones que se pueden obtener de estos y, por último, la naturaleza digital —base formal de este trabajo—, la cual permite representar los objetos geométricos a trabajar mediante el uso de ambientes de geometría dinámica.

REFERENCIAS

Atirgue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245–274. doi: 10.1023/A:1022103903080

Open Society Institute y Shuttleworth Foundation. (2007). *Declaración de Ciudad del Cabo para la educación abierta: abriendo la promesa de recursos educativos abiertos.* Recuperado de https://www.capetowndeclaration.org/translations/spanish-translation.

Poveda, W. (2019). *Resolución de problemas matemáticos y uso de tecnologías digitales en un curso masivo en línea* (Tesis de doctorado). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México.

Rubio-Pizzorno, S. y Montiel, G. (2017). Geometría dinámica como actualización didáctica de la evolución conceptual de la geometría. En P. Perry (ed.), *23 Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 143-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Rubio-Pizzorno, S. (2018). *Integración digital a la práctica del docente de geometría.* (Tesis de maestría). Centro de Investigaciones y de Estudios Avanzados (Cinvestav), Ciudad de México, México.

ESTRATEGIA PARA EL ESTUDIO DE CONGRUENCIA ENTRE CUADRILÁTEROS

Jannick Lugo, **Jonathan Bernal**, **Zaira López**, **Camilo Sua**, **Angélica Ramírez**

Universidad Pedagógica Nacional

jalugog@upn.edu.co, jdbernalg@upn.edu.co, zmlopezg@upn.edu.co, jcsuaf@pedagogica.edu.co, maramireza@upn.edu.co

En libros de texto de matemáticas, tanto escolares como universitarios, se da un tratamiento a la relación de congruencia entre polígonos. Sin embargo, generalmente esta relación queda limitada al estudio de triángulos y sus correspondientes criterios de congruencia. Presentamos los avances de un estudio realizado sobre la congruencia en cuadriláteros y sus posibles nexos con la teoría de grafos. La idea es que al pasar de grafos a matrices y a partir de las regularidades que se vean allí, se pueda obtener una caracterización de dichas matrices cuando representan o no un criterio de congruencia, con el fin de buscar una generalización para los tipos de congruencias de polígonos con *n* lados.

INTRODUCCIÓN

En los libros de texto de geometría, en niveles escolares o universitarios, se puede apreciar la presencia de uno o varios capítulos cuyo objeto de estudio son los triángulos y algunas de sus propiedades o relaciones, incluyendo entre estas la congruencia (Clemens, 1994). Sin embargo, la revisión en estos libros deja ver que la relación de congruencia no se estudia en detalle para otros polígonos. Presentamos los resultados de un ejercicio académico de indagación, promovido al interior de un curso de geometría, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, a través del cual se examinó el concepto de congruencia entre cuadriláteros. La motivación principal yace en la necesidad de ampliar el limitado estudio, según nuestra percepción, de la relación de congruencia, principalmente cuando esta se desarrolla apenas en triángulos. De este ejercicio esperamos caracterizar la relación de congruencia en cuadriláteros, avanzando particularmente en la identificación de “criterios” de congruencia en estos polígonos, con lo que puedan establecerse relaciones o generalidades en un conjunto de polígonos más amplio (por

Lugo, J., Bernal, J., López, Z., Sua, C. y Ramírez, A. (2019). Estrategia para el estudio de congruencia entre cuadriláteros. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 329-331). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

ejemplo, pentágonos, hexágonos). Para ello, le asociamos a cada criterio, una matriz, con el fin de encontrar una regularidad en esta, convirtiendo un problema geométrico (siendo engorroso) en un problema algebraico.

MÉTODO

En un primer momento se contempló la definición de congruencia de cuadriláteros, planteando esta como una extensión de la presentada para triángulos. Posteriormente, se evaluó la posibilidad de establecer posibles criterios de congruencia considerando que de las ocho condiciones involucradas en su definición se requiriera el cumplimiento de cuatro. Este ejercicio llevó a reconocer dieciseis posibles criterios de los cuales ninguno garantizó la congruencia de los cuadriláteros. En un segundo momento, se consideraron criterios que involucraran cinco condiciones (v.g. LLLLA: cuatro lados y un ángulo congruentes). Reconocimos treinta y dos posibilidades, de las cuales solo ocho pudieron ser comprobadas de manera empírica y/o teórica. Luego llegamos a la construcción de los grafos para relacionar los vértices que tengan marca de congruencia, con una matriz cuadrada de acuerdo con el número de vértices, compuesta de ceros y unos, en la que uno indica marca de congruencia y cero cuando no, para encontrar cierta regularidad en la misma.

AVANCES Y CONCLUSIONES

El ejercicio realizado ha permitido reconocer algunos criterios de congruencia entre cuadriláteros, así como una justificación teórica de estos. Además, se han reconocido algunas posibles conexiones entre los criterios de congruencia de triángulos y de cuadriláteros con la teoría de grafos, lo cual nos ha motivado a extender nuestro estudio en otro tipo de polígonos, con el fin de validar nuestras hipótesis y avanzar en una posible generalización de los criterios de congruencia a la luz de la teoría de grafos. Por motivos de extensión no alcanzamos a presentar tales resultados en este documento.

REFERENCIAS

Clemens, S. R., O'Daffer, P. G. y Cooney, T. J. (1998). *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*. México: Addison Wesley Longman.

Moise, E. y Downs, F. (1970). *Matemática Moderna: Geometría Serie IV* (1ª ed.). Ciudad de México: Fondo Educativo Interamericano, Sistemas Técnicos de Edición, S. A.

Samper, C., y Molina, O. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Bogotá: Fondo Editorial Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de http://editorial.pedagogica.edu.co/docs/files/Geometria Plana-2.pdf

Tecnologías digitales y no digitales en el proceso de construcción de significado

Nathalia Moreno, **María Fernanda Castro**, **Camilo Sua**

Universidad Pedagógica Nacional

inmorenob@upn.edu.co, mfcastros@upn.edu.co, jcsuaf@pedagogica.edu.co

Se presenta una experiencia en aula que permite reconocer cómo el uso de la tecnología digital y no digital en la solución de problemas geométricos aporta a la construcción de significado. El objetivo del póster es mostrar qué aspectos, del significado de bisectriz de ángulo, movilizaron los estudiantes, profesores en ejercicio, al resolver un problema con el apoyo de tecnología.

Experiencia en aula

Esta experiencia se realizó con estudiantes del seminario “Tecnología en Ciencias y Matemáticas”, de la Maestría en Docencia de la Matemática, ofertada por la Universidad Pedagógica Nacional, cuyo énfasis era Tecnología Digital en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. En dicho seminario, el profesor titular propuso algunos problemas que debían ser resueltos con ayuda de tecnologías digitales (GeoGebra, Logo) y no digitales (doblado de papel, escuadra). A través de esta tarea se pretendía que los estudiantes del seminario evidenciaran que el potencial de que cada una de las tecnologías involucradas no depende de lo novedosa que sea dicha tecnología, sino de las características del problema que se propone y los significados que se involucran al resolverlo.

El problema propuesto fue construir la bisectriz de un ángulo cualquiera. Se esperaba que los participantes del seminario tuvieran, como definición de bisectriz, la siguiente:

> Dado el $\angle ABC$, $\overrightarrow{BD}$ es bisectriz del $\angle ABC$ si: i) D pertenece al interior del $\angle ABC$; ii) $\angle ABD \cong \angle DBC$.

Moreno, N., Castro, M. y Sua, C.. (2019). Tecnologías digitales y no digitales en el proceso de construcción de significado. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 333-335). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Los estudiantes debían consignar en una tabla información relacionada con el proceso de resolución del problema con cada tecnología, respondiendo:

- Agilidad en la resolución del problema.
- ¿Cómo se usa la herramienta?
- ¿Qué aspectos se reconocen en la herramienta que no son propios de su naturaleza/origen? (*v.g.* se usa la escuadra para copiar medidas, como si esta fuera un compás)
- ¿Qué conceptos geométricos se involucran?

La interacción entre estudiantes y objetos de estudio en el momento de resolver la tarea es importante porque centramos nuestra atención en el proceso de construcción de significado. En consonancia con esto, asumimos la postura de Samper, Perry y Camargo (2017), quienes afirman que construir significado es un proceso social y de interacción que consiste en lograr compatibilidad de las ideas que un estudiante tiene de un objeto o relación (significado personal) con aquellas que la comunidad de referencia ha establecido (significado institucional). A medida que se trata al objeto o la relación en diversas situaciones, se descubren nuevas propiedades, y, por tanto, se construye significado. Es decir, el concepto de un objeto es mediado por las experiencias que se tienen con él.

Al socializar las estrategias para resolver el problema, surgieron situaciones que llevaron a descubrir propiedades, relaciones entre conceptos, y el uso apropiado de herramientas. Se evidenció que, al hacer uso de la herramienta bisectriz con la que cuenta GeoGebra, la representación era una recta y no un rayo; por tanto, como no corresponde con la definición, se tenía que construir el rayo de la recta que sí es la bisectriz y ocultar la recta. En Logo, era necesario conocer las propiedades requeridas en la definición para proporcionar las instrucciones correctas (*v.g.* reconocer que la bisectriz tiene extremo en el vértice del ángulo y puntos en el interior del mismo). Al utilizar doblado de papel, la estrategia presentada era doblar este, tratando que los lados del ángulo coincidieran, dado que la bisectriz debe determina dos ángulos adyacentes congruentes. Al usar la escuadra, la construcción moviliza la definición de bisectriz como lugar geométrico, siendo esta todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Esta experiencia se convirtió en evidencia de que para aportar a la construcción de significado se deben diseñar tareas que incluyan tecnologías digitales y no digitales, pues los conceptos que promueven las primeras pueden ser complementados por aquellos promovidos por las segundas.

REFERENCIAS

Samper, C., Perry, P., y Camargo L. (2017). Construir significado, más que conocer la definición. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 77, 51-58.

ALGUNOS FACTORES DETERMINANTES EN EL DISCURSO DE LOS DOCENTES EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN BÁSICA SECUNDARIA

Carmen Eliza Riascos Murillo, **Leidy Liceth Rentería Riascos**

Universidad del Valle

riascos.carmen@correounivalle.edu.co, leidy.renteria@correounivalle.edu.co

La ponencia expone una hipótesis acerca del discurso de los docentes al enseñar geometría en el aula, que dificultan el aprendizaje. Para tal fin, se tuvieron en cuenta fundamentos sobre las formas como este debe expresarse en el aula, así como, lo establecido por el Ministerio de Educación Nacional, en los Estándares Básicos de Competencia (2006) con respecto al proceso de comunicación.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La enseñanza de las matemáticas, específicamente de la geometría, está mediada por distintos factores que inciden en el aprendizaje de los alumnos. Entre ellos sobresalen el discurso del profesor, los recursos, la metodología, y el contexto, entre otros. En el trabajo que se presenta, la mirada está puesta en el en primero de ellos, puesto que, el discurso en la clase de geometría es un componente determinante de la práctica educativa del docente en la enseñanza en el aula. Sobre ello, Bailera y Honrado (2016) expresan que "el discurso es, por tanto, la unidad observacional que interpretamos al escuchar o leer una emisión verbal en datos de clases" (p. 438). El discurso le permite al docente referirse a un objeto de conocimiento, además de interactuar con los estudiantes sobre dicho objeto.

Teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente, es preciso cuestionarse: ¿cuáles son algunas dificultades detectadas en el discurso de un docente al enseñar geometría? Al respecto, surge una hipótesis la cual se intenta poner a prueba para ratificarla o refutarla en el trascurrir del proceso de investigación. Esta es:

Riascos, C. y Rentería, L. (2019). Algunos factores determinantes en el discurso de los docentes en la enseñanza de la geometría en básica secundaria. En C. Samper y L. Camargo (Eds.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 24 (pp. 337-338). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Hipótesis: El docente tiene un escaso manejo de términos técnicos en la clase de geometría lo que obstaculiza la comunicación sobre los objetos de conocimiento. Entendemos los términos técnicos como los términos específicos. Sáenz (2008) señala que, al enseñar matemáticas, los docentes brindan recursos comunicativos a los alumnos para que ellos adquieran esas formas semánticas, y aprendan a hablar matemáticamente, y a pensar matemáticamente. Sin embargo, queremos investigar si los docentes hacen uso de los términos técnicos o no.

EL DISCURSO EN CLASE DE GEOMETRÍA

El lenguaje permite al docente transmitir o expresar una idea o conocimiento, haciendo uso de palabras las cuales, de forma organizada, propician la configuración de un discurso frente a la temática que se está trabajando. Por eso, es necesario que el docente emplee terminologías adecuadas y propias de la cultura en la que se comunica.

Sáenz (2008) habla sobre el privilegio que tiene

> El lenguaje verbal y no verbal en la construcción del conocimiento y en las maneras como los maestros crean contextos comunicativos en el aula, para apoyar a los estudiantes en la construcción conjunta de la comprensión de la matemática escolar. (p. 789)

Ante ello, es importante mencionar que el discurso no es solo la enunciación de palabras o ideas; va más allá, puesto que, se deben tener en cuenta ciertos parámetros tales como el manejo de términos técnicos, comunicación de propiedad y la enunciación de teorema, axiomas entre otros.

REFERENCIAS

Bailera, A y Honrado, I. (2016). El Discurso Matemático del Profesor: Ejemplos, Explicaciones y Coherencia Local. *Investigación en Educación Matemática XX*, 437- 446.

Ministerio de Educación Nacional (2006). República de Colombia. *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá: Autor.

Forero-Sáenz, A. (2008) Interacción y Discurso en la Clase de Matemáticas. *Universitas Psychologica, 7*(3), 787-805.