SERIES – Pruebas de convergencia o divergencia

Se llama **serie infinita**, o simplemente una serie a la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Sucesión de sumas parciales

Definición.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión y $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$ la n-ésima suma parcial de la sucesión.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente** si la sucesión de sumas parciales S_n es convergente; esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \{S_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

Si $\lim_{n\to\infty} \{S_n\}$ no existe, entonces se dice que la serie es **divergente**.

Serie Geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(r)^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

Si $|r| < 1$, entonces una serie geométrica **converge** y su suma es

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r| \geq 1$, entonces una serie geométrica **diverge**.

La **razón(r)** de una serie geométrica se calcula dividiendo términos consecutivos:

$$r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Teoremas

1. **Condición necesaria para convergencia.**

   Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

2. **Prueba del término n-ésimo para divergencia.**

   Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ diverge

3. **Múltiplo constante de una serie.**

   Si c es cualquier constante distinta de cero, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} ca_k$ convergen ambas o divergen ambas.

4. **Suma de dos series convergentes.**

   Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ convergen a S_1 y S_2, respectivamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ convergen a $S_1 \pm S_2$.

5. **Suma de una serie convergente y una divergente.**

   Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ diverge.

Serie Armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

La serie armónica es la suma de los recíprocos de los enteros positivos.

Serie Telescópica

Una serie es telescópica cuando viene dada por la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k - a_{k+1}$$

Observe que la suma parcial n-ésima es:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_{k+1} = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \ldots$$

Si una serie telescópica converge, su suma está dada por:

$$S = a_1 - \lim_{x \to \infty} a_{n-1}$$

Prueba de la Integral

Teorema. [62] **Prueba de la integral.**

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos y f es una función continua que es no negativa y decreciente sobre $[1, \infty)$ tal que $f(k) = a_k$ para $k \geq 1$.

1. Si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ converge.
2. Si $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ diverge.

Serie P-Serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

La **p-serie** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Prueba de comparación

Teorema. [63] **Prueba de comparación.**

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ es convergente y $a_n \leq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ tambien es convergente.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ es divergente y $a_n \geq b_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ tambien es divergente.

Prueba de comparación de límite.

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos. Si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

donde L es finita y $L > 0$ entonces las dos series son ya sea ambas convergentes o ambas divergentes.

Prueba de la razón

Prueba de la razón.

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos donde

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

1. Si $L < 1$, la serie es **convergente**.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie es **divergente**.
3. Si $L = 1$, la prueba no proporciona ninguna información.

Prueba de la raíz

Prueba de la raíz.

Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ es una serie de términos positivos donde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} = (a_n)^{1/n} = L$$

1. Si $L < 1$, la serie es **convergente**.
2. Si $L > 1$ o $L = \infty$, la serie es **divergente**.
3. Si $L = 1$, la prueba no proporciona ninguna información.

Series alternantes

Serie cuyos términos alternan entre valores positivos y negativos se denomina serie alternante.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

Prueba de la serie alternante.

Si la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ satisfase que

1. Si $a_{n+1} \leq a_n,\quad$ para toda n
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

La serie es **convergente**.