Libro interactivo

Relaciones entre figuras geométricas en el plano

Ángel Cabezudo Bueno

RED educativa digital Descartes

Relaciones entre figuras geométricas en el plano

Ángel Cabezudo Bueno
Red Educativa Digital Descartes

Fondo Editorial RED Descartes

Córdoba (España)
2021

Título de la obra:
RELACIONES ENTRE FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

Autor:
ÁNGEL CABEZUDO BUENO

Diseño del libro: Juan Guillermo Rivera Berrío
Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interactivos: DescartesJS
Fuentes: Lato y UbuntuMono
Fórmulas matemáticas: $\KaTeX$
Núcleo del libro interactivo: septiembre 2023

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
https://proyectodescartes.org

Proyecto iCartesiLibri
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm
https://prometeo.matem.unam.mx/recursos/VariosNiveles/iCartesiLibri/

ISBN: 978-84-18834-20-2

Tabla de contenido

PREFACIO **5**

CONCEPTOS PREVIOS **6**

1. Relaciones métricas en la circunferencia **11**

1.1 Tangente a una circunferencia por un punto exterior 13

1.2 Circunferencia que contiene a tres puntos dados 16

1.3 Cuatro puntos concíclicos 18

1.4 Cuadrilátero inscrito 26

1.5 Cuadrilátero circunscrito 32

2. Lugares geométricos **37**

2.1 Lugar de un punto sobre un segmento que resbala apoyado en los lados de un ángulo recto 39

2.2 Arco capaz 46

2.2.1 ¡Un lugar geométrico interesante! 46

2.2.2 Definición de arco capaz. Ángulos en la circunferencia 50

2.2.3 Resolución de problemas con el arco capaz 52

PREFACIO

El presente material didáctico puede constituir un complemento al correspondiente de Geometría en el nivel educativo de **4º Curso de Educación Secundaria Obligatoria** y bien podría ser incluido en una programación de aula para un *Taller de Matemáticas.*

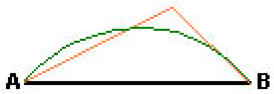
Se han seleccionado dos partes diferenciadas: Algunas figuras relacionadas con la circunferencia y determinación de lugares geométricos.

El cuadro de **Conceptos previos** mostrado en la siguiente página es un resumen de figuras geométricas en el plano y algunas propiedades que el alumno debiera conocer antes de consultar esta unidad didáctica, lo que viene a indicar la cantidad de conceptos geométricos, en su mayor parte elementales, que se van a poder relacionar.

Las escenas de geometría construidas con **DescartesJS** posibilita al alumno observar las propiedades geométricas e interaccionar con los elementos representados lo que le permite reflexionar, analizar y experimentar más fácilmente una serie de cuestiones que se derivan de los siguientes temas:

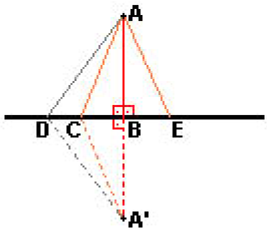
- Construcción de las dos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior
- Construcción de la circunferencia que contiene a tres puntos dados
- Construcción de cuatro puntos concíclicos
- Propiedad del cuadrilátero inscrito a una circunferencia
- Propiedad del cuadrilátero circunscrito a una circunferencia
- Lugar de puntos desde los que se ve un segmento bajo un mismo ángulo
- Lugar de un punto sobre un segmento que resbala apoyado en los lados de un ángulo recto

CONCEPTOS PREVIOS



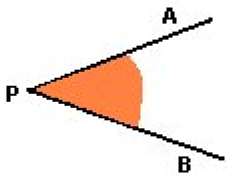
Distancia entre dos puntos.

- La recta es más corta que cualquier otra línea que tenga los mismos extremos.



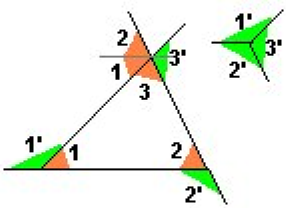
Distancia de un punto a una recta.

- Menor longitud de los segmentos con origen en el punto y extremo en la recta: La tiene el segmento perpendicular.



Ángulo.

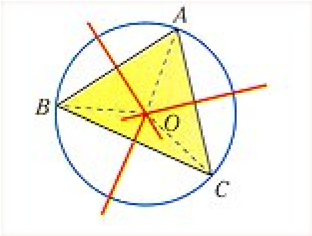
- Vértice
- Lados
- Suma y resta de ángulos
- Producto y cociente de un ángulo por un número.



Triángulos. Ángulos interiores y exteriores.

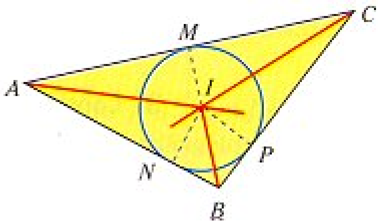
- La suma de los ángulos interiores vale 180°
- La suma de los ángulos exteriores suma 360°
- La medida ángulo exterior es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.

Mediatriz de un segmento.



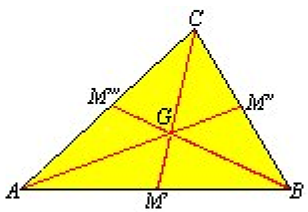
- Recta perpendicular al segmento por el punto medio
- Cada punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento
- Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado Circuncentro
- El Circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo

CONCEPTOS PREVIOS



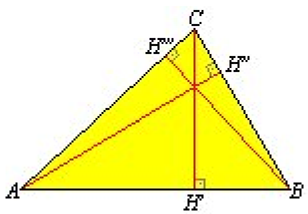
Bisectriz de un ángulo.

- Recta que pasa por el vértice y lo divide en dos ángulos iguales
- Cada punto de la bisectriz está a la misma distancia de los lados del ángulo
- Las tres bisectrices interiores de un triángulo se cortan en un punto llamado Incentro
- El Incentro es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo



Mediana de un triángulo.

- Segmento cuyos extremos son un vértice y el punto medio del lado opuesto.
- Las tres medianas se cortan en un mismo punto llamado Baricentro.
- La distancia del baricentro al vértice es el doble de la distancia del baricentro al punto medio del lado opuesto.

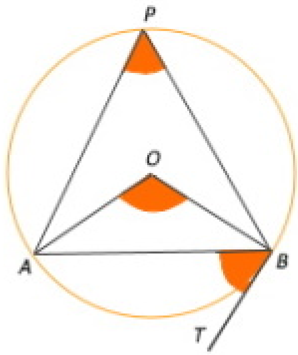


Altura de un triángulo..

- La altura de un triángulo es el menor segmento trazado desde un vértice al lado opuesto.
- La altura relativa a un lado es perpendicular a dicho lado trazada desde el vértice opuesto.
- Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado Ortocentro

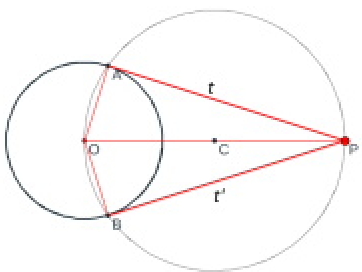
CONCEPTOS PREVIOS

Circunferencia.



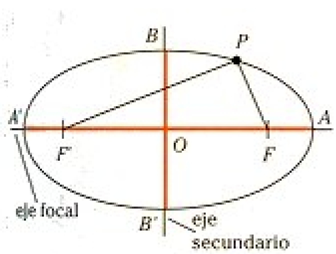
- Arcos, cuerdas, ángulo central e inscrito, posición relativa de dos circunferencias.
- Cada punto de la circunferencia dista lo mismo del centro.
- Cualquier segmento que une un punto cualquiera con el centro mide lo mismo y se llama radio.
- A arcos iguales les corresponden ángulos centrales iguales.
- Un ángulo inscrito mide la mitad del central que abarca el mismo arco. Como consecuencia un ángulo inscrito que abarca media circunferencia es recto.

Tangente a una circunferencia.



- Distancia de un punto a una circunferencia, recta tangente.
- La recta tangente a una circunferencia trazada por un punto exterior es perpendicular al radio correspondiente al punto de tangencia.

Elipse.



- Lugar de puntos P tales que la suma de distancias a otros dos puntos fijos F y F' (focos) es constante. PF+PF´=2·OA.
- Una circunferencia es un caso particular de elipse, cuando F=F´= O. Entonces, OA= r y PF+PF´=2·r.
- Se dice que una circunferencia es una elipse de excentricidad cero ya que FF' = 0.

Capítulo I

Relaciones métricas en la circunferencia

1.1 Tangente a una circunferencia por un punto exterior

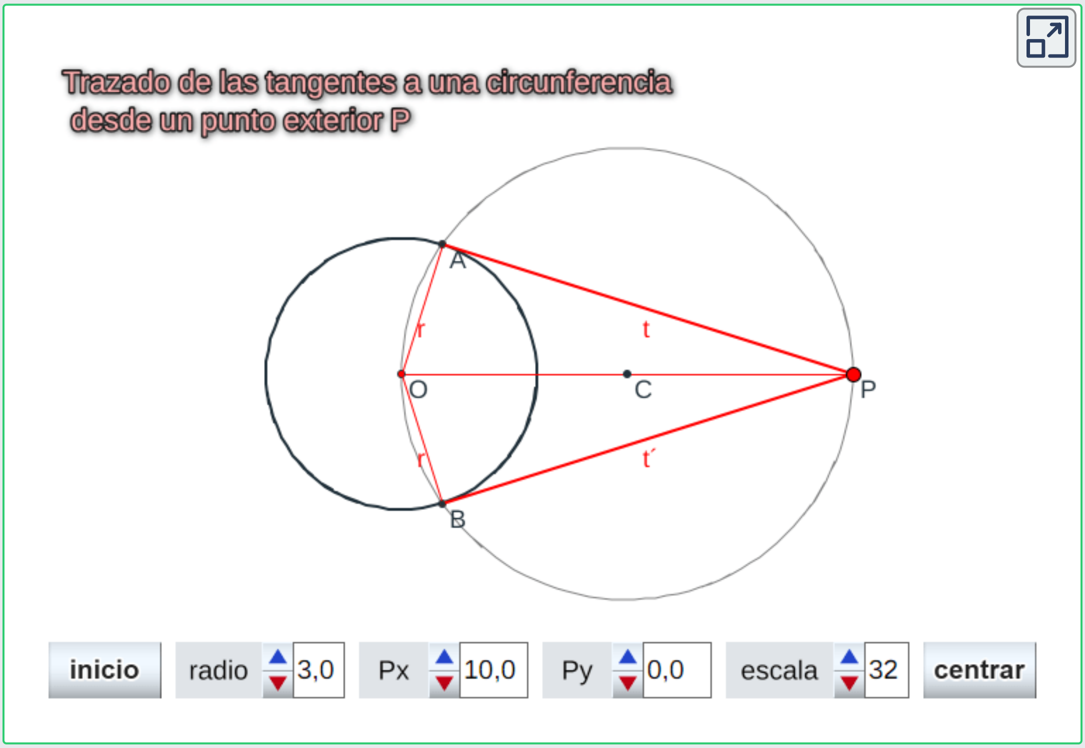
DEBES DE SABER...

> ... que para trazar la tangente t a una circunferencia en uno de sus puntos A basta trazar la perpendicular al radio r que pasa por él.

En este apartado vas a aprender a construir la tangente a una circunferencia desde un punto P exterior.

OBSERVA LA SIGUIENTE ESCENA INTERACTIVA...

Se trata de dibujar la tangente a la circunferencia de centro O y radio $r = 3$ desde el punto $P(10, 0)$



Hay dos soluciones: la recta PA y la PB simétricas respecto de la recta que une P con O

El punto de contacto A ha de ser el vértice de un ángulo recto cuyos lados, radio y tangente, pasan respectivamente por el centro O y el punto P. Este ángulo abarca por tanto el diámetro OP de la circunferencia de centro C (punto medio de OP). Lo mismo podemos decir del punto de contacto B. Recordar la propiedad de los ángulos inscritos a una circunferencia que abarcan su diámetro (miden 90º)

Bastará trazar la circunferencia de diámetro OP y unir P con las intersecciones de A y B que produce dicha circunferencia con la circunferencia dada.

EXPERIMENTA:

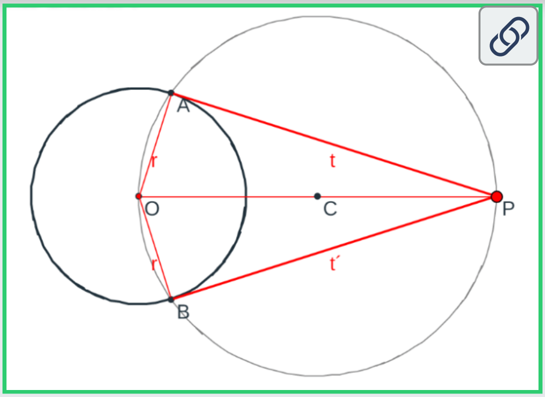
El punto P es un control que puedes mover arrastrándolo con el ratón. También puedes cambiar su posición introduciendo sus coordenadas (Px, Py) desde la ventana de parámetros.

La circunferencia a la que queremos trazar las tangentes, tiene centro $O(0, 0)$ y radio r que podemos cambiar introduciendo su valor desde la ventana de parámetros.

Sitúa el punto P en $(8, -2)$ e introduce el valor del radio $r = 3.5$ de la circunferencia de centro $O(0, 0)$. Observa que las tangentes a dicha circunferencia desde P se trazan desde P a los puntos de intersección que produce la circunferencia de diámetro OP sobre la circunferencia dada.

Comprueba este hecho las veces que quieras cambiando el punto P y el radio de la circunferencia de centro $O(0, 0)$

PROPIEDAD: Puesto que las tangentes PA y PB son simétricas respecto de la recta que une P con O se cumplirá que $PA = PB$



PROBLEMAS:

1. Dibuja en tu cuaderno o utiliza un programa de dibujo como $GeoGebra$, una circunferencia de radio $1,5cm$ y un punto P que diste del centro de la primera $5cm$.

a. Utilizando la regla y el compás, dibuja las tangentes a la circunferencia trazadas desde P.

b. Mide las tangentes PA y PB y comprueba que tiene el mismo valor.

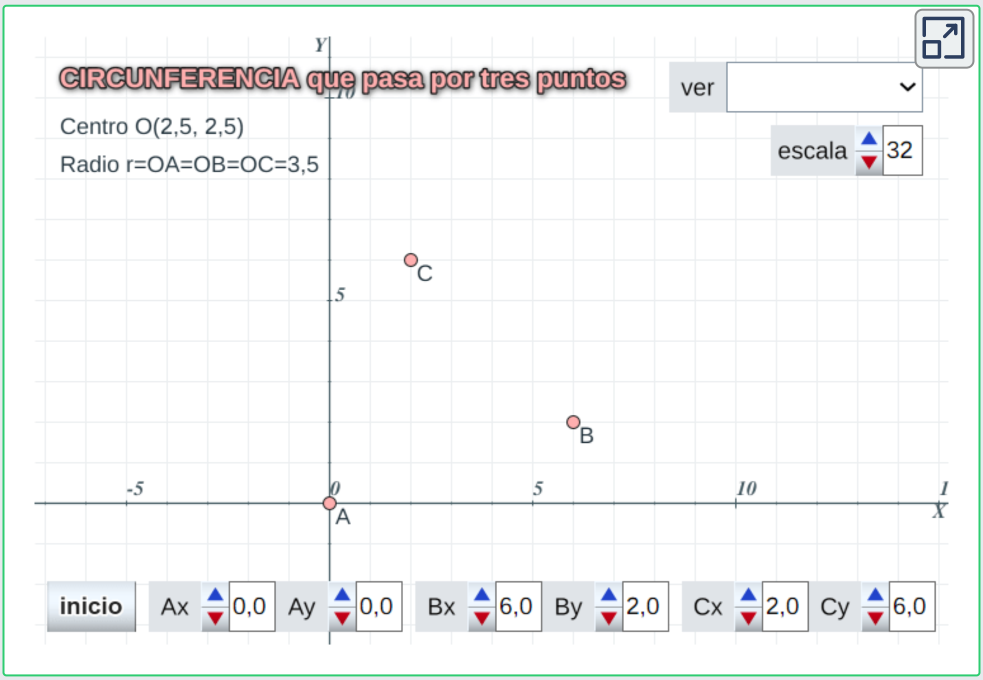
c. Aplica el $Teorema\ de\ Pitágoras$ al triángulo rectángulo OPA para calcular exactamente la longitud de PA. Compara el resultado con el obtenido en el apartado anterior

1.2 Circunferencia que contiene a tres puntos dados

OBSERVAR...

> Observa que bastan tres puntos para definir una circunferencia. Estos tres puntos permiten determinar el centro y el radio.

1. Se construyen los segmentos AB y BC
2. Se trazan las mediatrices m y n de AB y BC respectivamente.
3. El punto de corte O de m y n cumple la propiedad de estar a la misma distancia de los tres puntos A, B y C. $(Propiedad\ de\ la\ mediatriz)$.
4. El punto O es el centro de la circunferencia y el radio $r = distancia\ OA = distancia\ OB = distancia\ OC$



EXPERIMENTA CON LA ESCENA INTERACTIVA:

Cambia los puntos A, B y C utilizando los controles (desplazando con el ratón) o introduciendo directamente las coordenadas (Ax, Ay), (Bx, By), (Cx, Cy) en la ventana de parámetros.

Experimenta poniendo A, B y C casi alineados. Utiliza si fuera preciso la escala, disminuyéndola para poder ver la escena. ¿Qué pasa con el centro de la circunferencia? ¿Cómo es la circunferencia? ¿Qué le pasa a las mediatrices m y n?

Mueve el punto C respecto de A y B hasta que queden alineados ¿Qué pasa con el centro de la circunferencia? ¿En qué se ha convertido la circunferencia?

PROBLEMAS

1. Dados los puntos A(-2, 1), B(2,-1) C(3, 5), obtener la circunferencia que les contiene, observa las coordenadas del centro y la medida del radio.
2. Resuelve el problema anterior pero ahora hazlo en tu cuaderno, usando regla y compás o un programa de dibujo como $GeoGebra$. Comprueba si obtienes el mismo resultado.
3. Sitúa A y B en las condiciones iniciales y posiciona el punto C para que los tres puntos pertenezcan a la circunferencia de radio 4. ¿Hay más de una solución?
4. Resuelve el problema anterior pero ahora con regla y compás y en tu cuaderno.

1.3 Cuatro puntos concíclicos

Vamos a estudiar una propiedad interesante que cumplen cuatro puntos que están en una circunferencia (puntos concíclicos).

La imagen aparecerá algunas veces al final de un párrafo, al poner el puntero sobre ella se muestra un cuadro de ayuda. Utilízala sólo después de haber reflexionado sobre la cuestión propuesta.

PIENSA:

1. Si los cuatro puntos fueran vértices de un rectángulo ¿Pertenecen a la misma circunferencia?.
   ¿Cómo se obtendría el centro? ¿Qué longitud tiene el radio?
2. Si los cuatro puntos fueran vértices de un paralelogramo no rectángulo,
   ¿Pueden pertenecer a una circunferencia?
3. Si te dan cuatro puntos cualesquiera en el plano,
   ¿Cómo harías, con los conocimientos previos, para saber si están en una misma circunferencia?

EXPERIMENTA CON LA ESCENA INTERACTIVA:

> Observa la escena

Se consideran cuatro puntos en el plano A, B, C y D.

A y B determinan una recta m con pendiente p_m

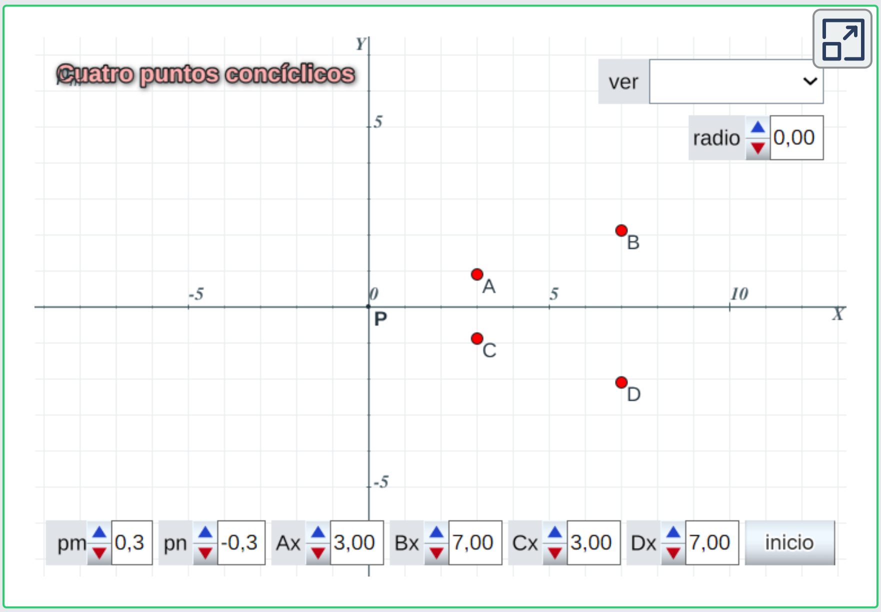
C y D determinan otra recta n con pendiente p_n

Suponemos que m y n no son paralelas (rectas secantes)... se cortan en un punto P. Para verlo, selecciona la opción **segmentos** en el menú desplegable **ver**

Inicialmente hemos situado A y C a la misma distancia de P. Lo mismo ocurre con B y D. Además p_m=$0,3$ y p_n=$-0,3$

El punto Q es el corte de las mediatrices de los segmentos AB y CD

En este caso comprobarás que están sobre una circunferencia de centro Q y radio r = QA = QB = QC = QD. Para ver la circunferencia que pasa por los cuatro puntos introduce el parámetro r correspondiente (r = $2,61$) y pulsa [Intro].

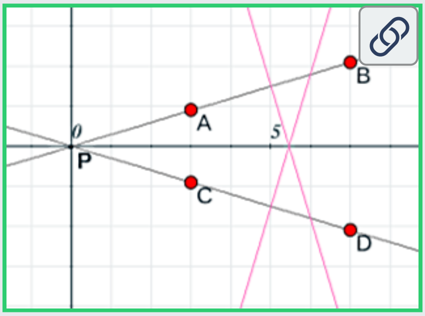


En este caso resulta evidente que PAxPB = PCxPD

Cambia la posición del punto A, por ejemplo, y advierte que QA = QB ≠ QC = QD, por lo que los cuatro puntos no están en la circunferencia de centro Q, a la vez que PAxPB ≠ PCxPD

Se nos puede ocurrir la siguiente idea: Si cambiamos de posición A, B, C y D pero de tal manera que se cumpla PAxPB = PCxPD, ¿los puntos pertenecerán a la circunferencia de centro Q?

Intentemos convencernos de que esto es así. Cambiemos de posición los puntos A, B, C y D tratemos de hacer ajustes con las distancias PA, PB, PC y PC hasta que se cumpla PAxPB = PCxPD



- Empecemos por reiniciar la escena (botón **inicio**) para que el radio tome el valor 0 y la circunferencia se oculte.
- Posicionemos A en $Ax = 4,0$, B en $Bx = 5,5$. Observa como los cuatro puntos no están todos equidistantes de Q (intersección de las mediatrices de los segmentos AB y CB) donde debe estar el centro de la circunferencia.
- Posicionemos C en $Cx = 2,5$ y D en $Dx = 8.8$
- Ahora, nuevamente, se cumple la igualdad "mágica" PAx $PB = PC$x$PD = 23,98$
- Este producto no es el mismo que en el ejemplo inicial, pues las distancias PA, PB, PC y PD han cambiado.
- Las distancias de los cuatro puntos al punto Q son todas iguales $QA = QB = QC = QD = 3,29$
- Visualiza la circunferencia (menú ver) para comprobar el resultado entrando el valor $r = 3,29$ en la ventana de parámetros.

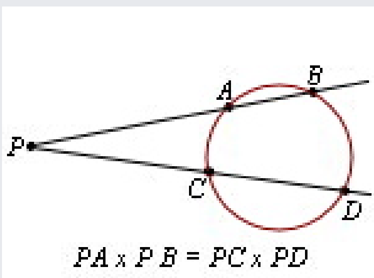
Asigna A_x = 2 y B_x = 6 con pendiente p_m=$0,6$ y C_x=3 con pendiente p_n=$-0,4$.
¿Qué valor hay que dar a D_x para que A, B, C y D sean concíclicos? ¿Cuál es el centro? Escribe el valor del radio y dibuja la circunferencia.

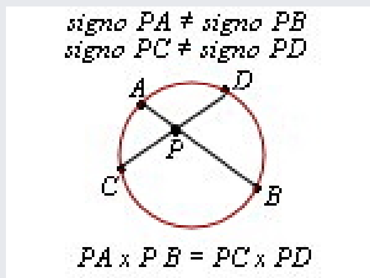
DEFINICIÓN: Potencia de un punto respecto de una circunferencia

> Si desde un punto P trazamos una secante a una circunferencia, el producto de las distancias de los puntos de corte A y B sobre la circunferencia al punto P es constante (PAx$PB = constante$). A este producto se le llama POTENCIA del punto P respecto de la circunferencia.

Observaciones:

El punto P puede ser exterior, interior o pertenecer a la circunferencia.





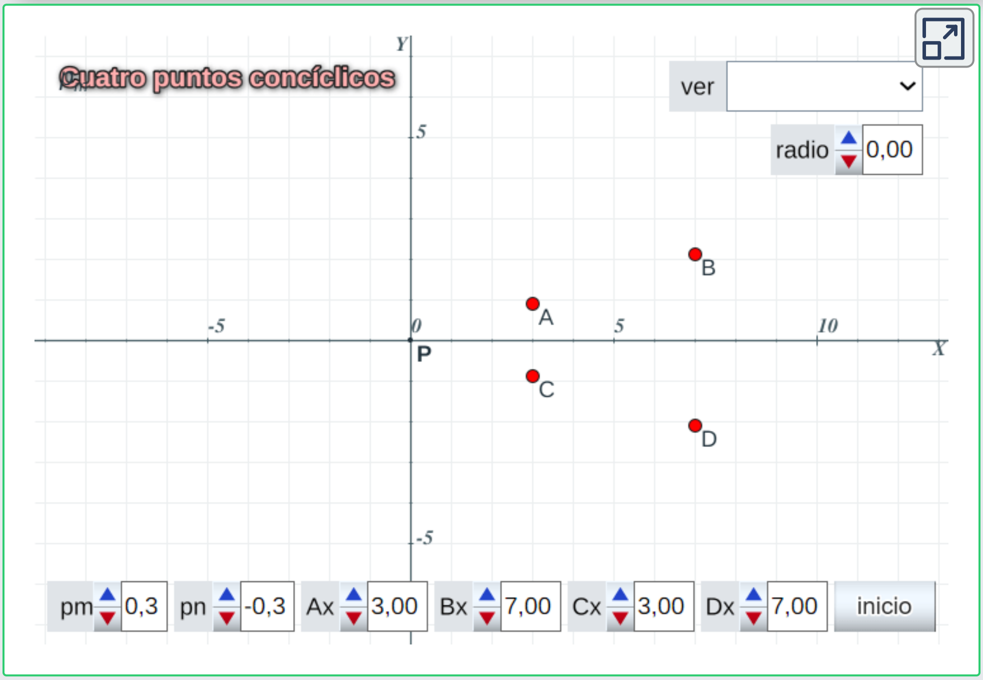
Si el *punto es interior* las distancias PA y PB *son de signos opuestos* (pues para ir de P a A se hace en sentido contrario sobre la recta al que se hace para ir de P a B. Por tanto si el P punto es exterior a la recta, tiene potencia positiva y si es interior tiene potencia negativa.

Un punto P que esté sobre la circunferencia tendrá potencia 0. ¿Por qué?

EJERCICIOS:

1. Actuando sobre la escena, dibuja la circunferencia tal que la potencia del punto P respecto de ella valga $11,45$.
2. Posiciona cuatro puntos concíclicos.
3. Dibuja una circunferencia interior al punto P tal que su potencia sea -7.66
4. ¿Dónde debes posicionar los puntos A y B para que la potencia de P sea 0? ¿Qué pasa ahora con los puntos C y D?

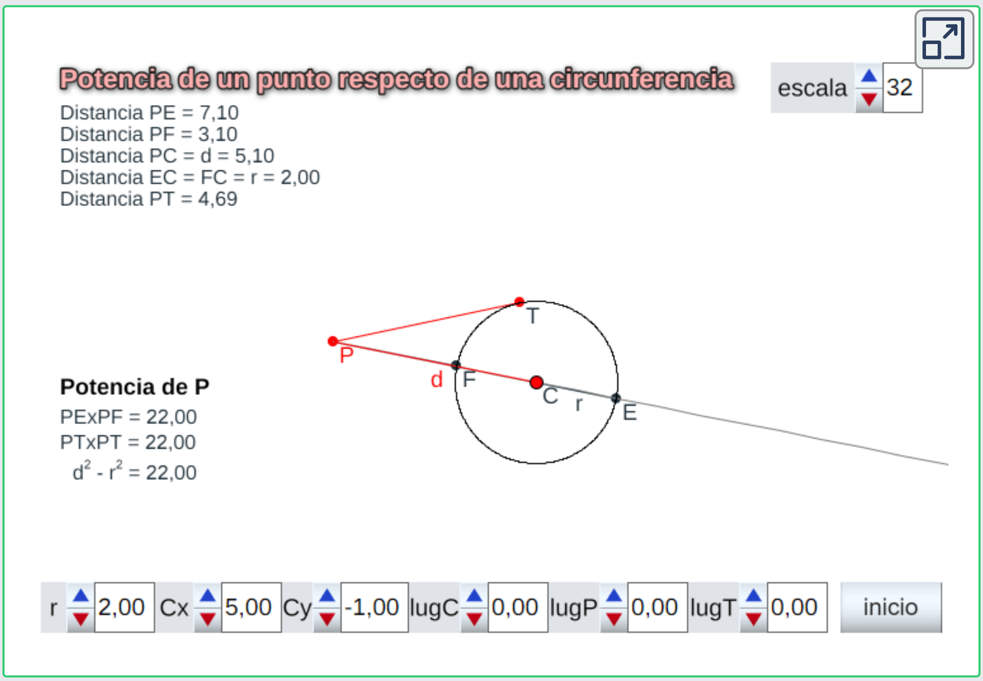
Nota: *Asigna otros valores a las pendientes* p_m *y* p_n*, además de los originales.*



EXPERIMENTA CON LA SIGUIENTE ESCENA

> **Observaciones**: Se pueden modificar desde la ventana de parámetros, los siguientes:

- Radio r de la circunferencia respecto de la que se calcula la potencia del punto P
- Coordenada del centro $C(Cx, Cy)$
- $lugC$, es el radio de valor PC de la circunferencia de centro P. Introduce el valor $5,10$ en la ventana del parámetro $lugC$, verás el lugar de centros C con radio $5,10$. Después de visto pulsa inicio.
- $lugP$, es el radio de valor PC de la circunferencia de centro C. Introduce el valor $5,10$ en la ventana del parámetro $lugP$, verás el lugar de puntos P con radio $5,10$. Después de visto pulsa inicio.
- $lugT$, es el radio de valor PT de la circunferencia de centro P. Introduce el valor $4,69$ en la ventana del parámetro $lugT$, verás el lugar de puntos T con radio $4,69$. Después de visto pulsa inicio.



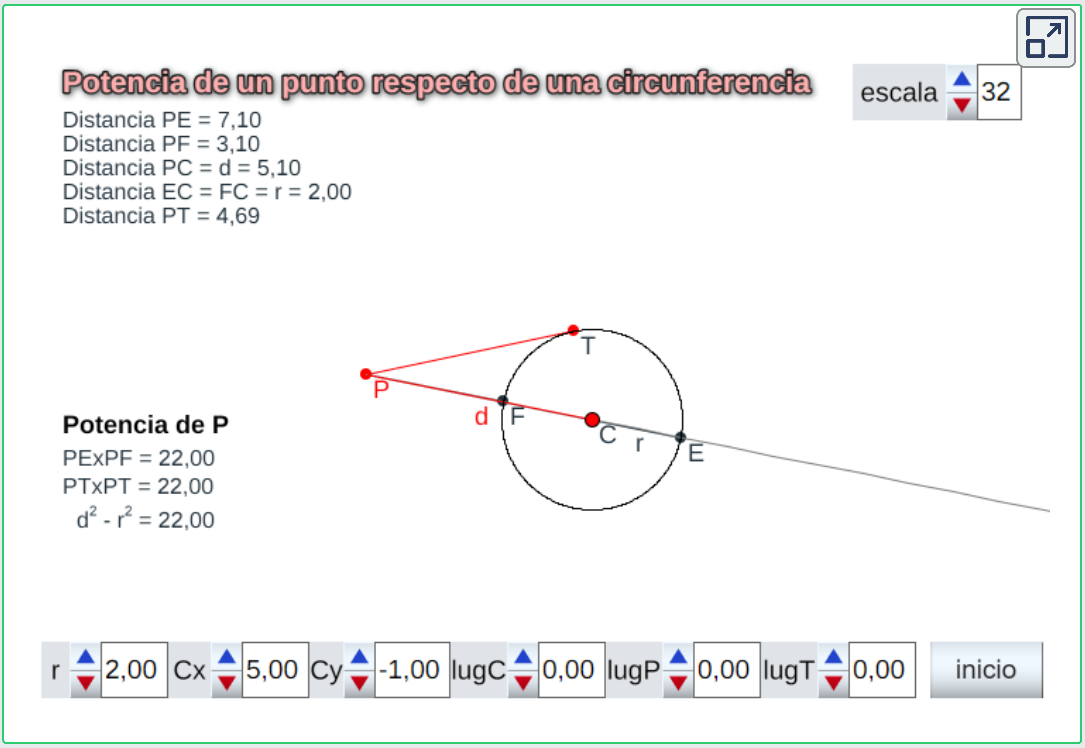
Estas observaciones te permitirán contestar algunas preguntas.

PIENSA...

Reflexiona sobre las siguientes cuestiones, experimenta en la anterior o en la siguiente escena DESCARTES y trata de dar respuesta.

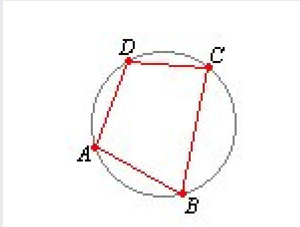
4. Si trazamos una recta desde P que pase por el centro C de la circunferencia ¿Cuáles son los puntos de corte? ¿Cómo podemos expresar, en este caso la potencia de P respecto de la circunferencia?
5. Si la recta trazada desde P es tangente a la circunferencia entonces hay un solo punto T de corte (punto de tangencia). ¿ Se cumple que PT x PT = PT^2 es la potencia de P respecto de la circunferencia?
6. Dado un punto P exterior a una circunferencia, su potencia podrá ser p.e. 22. ¿Existirán otras circunferencias con el mismo radio r respecto de las cuales P tenga la misma potencia 22?
7. ¿Cuál es el lugar de centros de todas las circunferencias de igual radio que tiene la misma potencia para P?
8. ¿Habrá circunferencias con distinto radio y con la misma potencia de P respecto de ellas?
9. ¿A qué distancia de P se encuentran los centros de todas las circunferencias de radio 2 con potencia 30?
10. Llamamos d a la distancia del punto P al centro de la circunferencia (PC = d), siendo r el radio. Demuestra que, si el punto P es exterior, la potencia se puede expresar por $d^2 - r^2$.

11. ¿Existen distintos puntos que tengan la misma potencia respecto de la circunferencia de radio r y centro C?



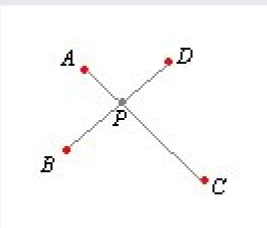
1.4 Cuadrilátero inscrito

DEFINICIÓN: Cuadrilátero inscrito en una circunferencia



Un cuadrilátero cuyos vértices son puntos de una circunferencia se dice que está inscrito en ella. Un cuadrilátero es inscriptible si existe una circunferencia que contenga sus cuatro vértice.

REFLEXIONA...



Si un cuadrilátero es inscriptible sus vértices cumplirán la propiedad de los cuatro puntos concíclicos entonces trazando las diagonales AC y BD estás se cortarán en un punto P interior. Las diagonales representan dos rectas secantes que pasan por P y la potencia de P respecto de la circunferencia es PA x PC = PB x PD

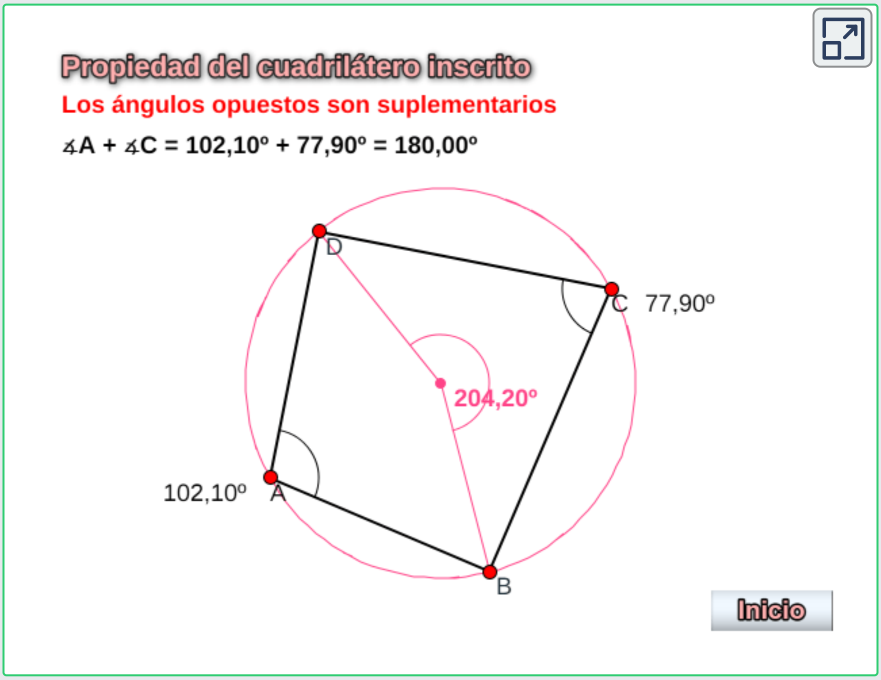
1. ¿Cómo averiguar si un cuadrilátero es inscriptible?
2. ¿Si es inscriptible, como determinar la circunferencia ?

DESCUBRIENDO OTRA PROPIEDAD DEL CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE...

Esta propiedad tiene que ver con la relación existente entre un ángulo inscrito en una circunferencia y el central correspondiente.

EXPERIMENTA CON LA ESCENA SIGUIENTE...

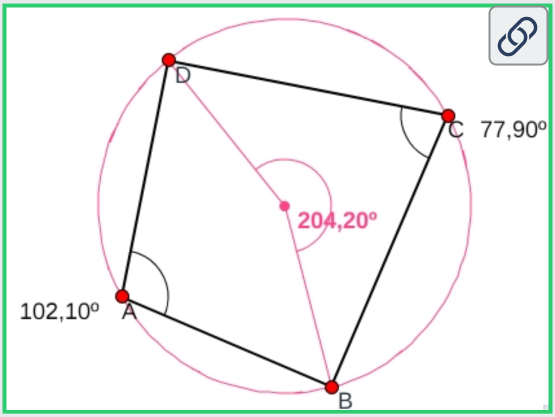
Podrás experimentar que cuando un cuadrilátero es inscriptible los ángulos opuestos son suplementarios.



Los ángulos A y C son opuestos y su suma A + C = 180º. Posiciona los puntos donde quiera que sea, son controles que podrás pinchar y arrastrar con el ratón sobre la circunferencia y comprueba que la relación entre ángulos apuestos es la dicha antes.

¿Tiene esto que ver con el hecho de que el central correspondiente a un ángulo inscrito mide el doble que éste?

Observa la escena en las condiciones iniciales.



- ¿Cuánto mide el central correspondiente a A? ¿Cuánto medirá el central correspondiente a C?
- ¿Cuánto suman los centrales correspondientes a A y a C?
- Cambia la posición de los puntos y responde a las preguntas anteriores.
- ¿Explica esto la propiedad anunciada?

3. Toma tu cuaderno y trata de demostrar esta propiedad.

REFLEXIONA...
La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera, inscriptible o no, suman 360°

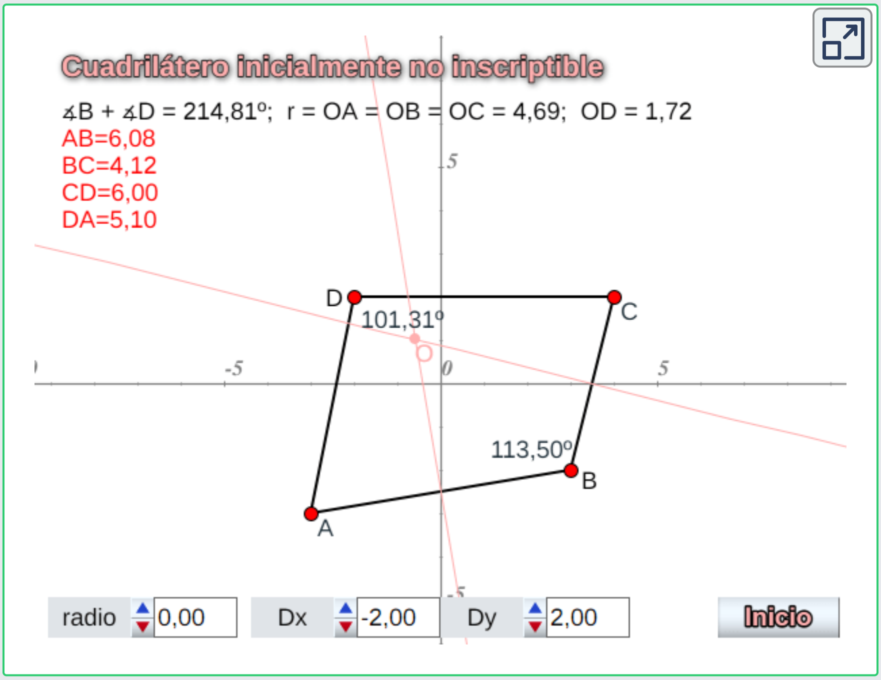
4. ¿Sabes por qué?

Pero por el hecho de ser inscriptible la suma de ángulos opuestos no puede ser cualquier otra que 180°.

La propiedad de ser inscriptible añadida al cuadrilátero ha introducido una limitación al valor de los ángulos.

SIGUE EXPERIMENTANDO CON LA ESCENA...

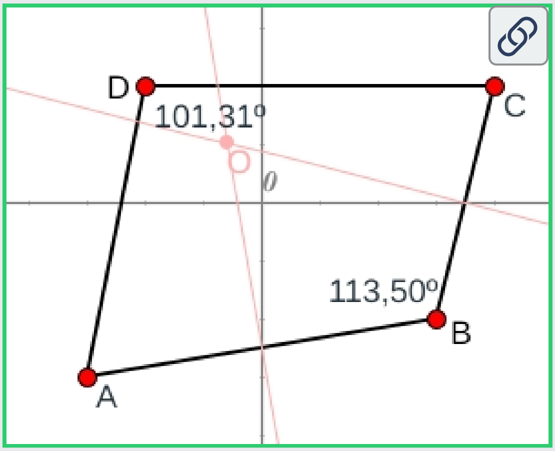
Inicialmente el cuadrilátero no es inscriptible. Observa que la suma de los ángulos $B + D$ no es 180°.



Se han trazado las mediatrices a los lados AB y BC. Y el corte O de ambas tendrá que ser el centro de la circunferencia. Se cumple que $OA = OB = OC = r$ pero OD no mide los mismo por tanto los cuadro vértices no son concíclicos y el cuadrilátero no queda inscrito.

Si quieres ver la circunferencia donde deben estar situados los cuatro vértices escribe en la ventana de parámetros el valor que debe tener el radio $(r = 4.69)$.

Si desplazas el punto D hasta colocarlo en la circunferencia entonces $B + D = 180^\circ$.



Puedes para ello desplazarlo con el ratón o modificar las coordenadas del punto (Dx, Dy) desde la ventana de parámetros.

Es evidente que la posición del vértice D puede ser cualquiera del arco AC.

EJERCICIOS:

1. Prueba a colocar el vértice D en otras posiciones, manteniendo las de inicio de A, B y C, hasta hacer el cuadrilátero inscriptible
2. Cambia el $radio$ a valor 0.
3. Cambia la posición de A, B y C y haz inscriptible el cuadrilátero. Recuerda que para conseguirlo tienes que ir mirando la suma $B + D$. También te servirá dibujar la circunferencia escribiendo el nuevo valor del radio.

4. Dibuja un cuadrilátero inscriptible tal que $AB = 4$, $BC = 5$. ¿Cuánto vale el ángulo en B y en D? ¿Cuánto miden los otros dos lados? ¿Hay más soluciones? Obtén al menos una más.

REFLEXIONA...

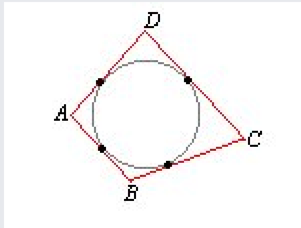
Un cuadrilátero rectángulo ¿es siempre inscriptible?

Prueba a formar un rectángulo (cuatro lados paralelos dos a dos), por ejemplo haciendo $AB = CD = 6$ y horizontales y $AD = BC = 4$ verticales, para facilitar la construcción. ¿Qué pasa con la suma $B + D$? Dibuja otro rectángulo y hazte la misma pregunta.

5. Toma tu cuaderno, dibuja un rectángulo y trata de demostrar que es inscriptible.

1.5 Cuadrilátero circunscrito

DEFINICIÓN: Cuadrilátero circunscrito a una circunferencia



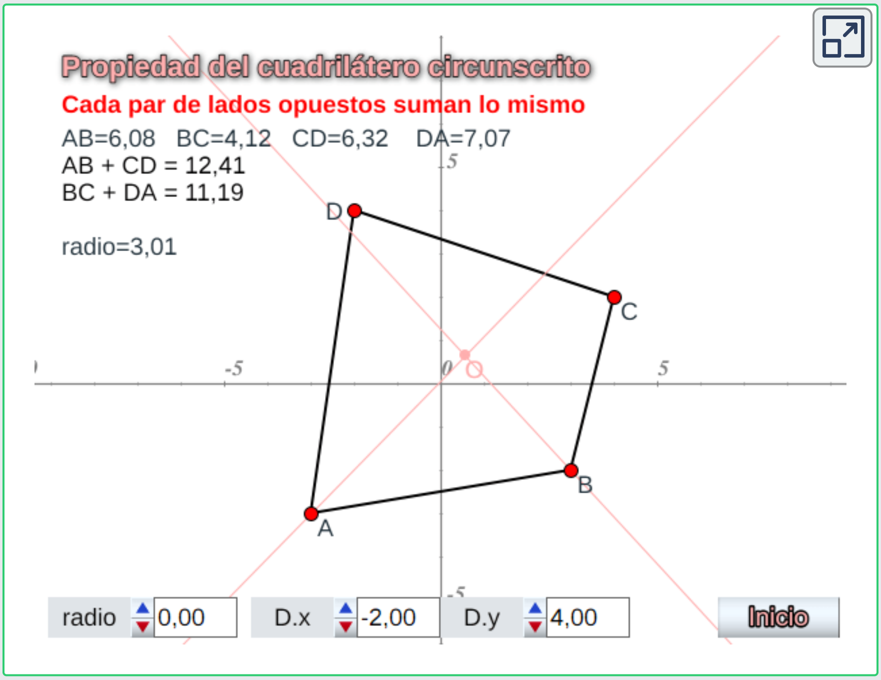
> Un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia cuando sus lados son tangentes a ella.

Desde otro punto de vista la circunferencia quedará inscrita en el cuadrilátero pues en cada lado existe un punto y solo uno que pertenece a la circunferencia.
Vamos a descubrir la propiedad que caracteriza a un cuadrilátero circunscribible, pues no todo cuadrilátero lo es.

OBSERVA LA FIGURA ANTERIOR...
Ahora hay que fijarse en que los lados AD y AB son tangentes trazadas desde el punto A a la circunferencia y los lados CB y CD son tangentes trazadas desde C.

¿Recuerdas qué decíamos en la $página$ 15 de las rectas tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior ella? ¿Cómo son las longitudes de los segmentos limitados entre A y los puntos de tangencia? ¿Y las longitudes de los segmentos limitados entre C y los puntos de tangencia?

EXPERIMENTA CON LA ESCENA SIGUIENTE...



- En la figura inicial de la escena se ha dibujado un cuadrilátero que no es circunscribible.
- Se han dibujado las bisectrices de los ángulos en $\measuredangle A$ y $\measuredangle B$. Su punto de corte O deberá ser el centro de la circunferencia sobre la que debiera estar circunscrito el cuadrilátero.[1]
- El valor del radio de esta circunferencia es [2], para este caso, $3,01$. Y si quieres verla basta que introduzcas este valor en la ventana del parámetro $radio$ y terminar pulsando $\hookleftarrow$ $(Intro)$.

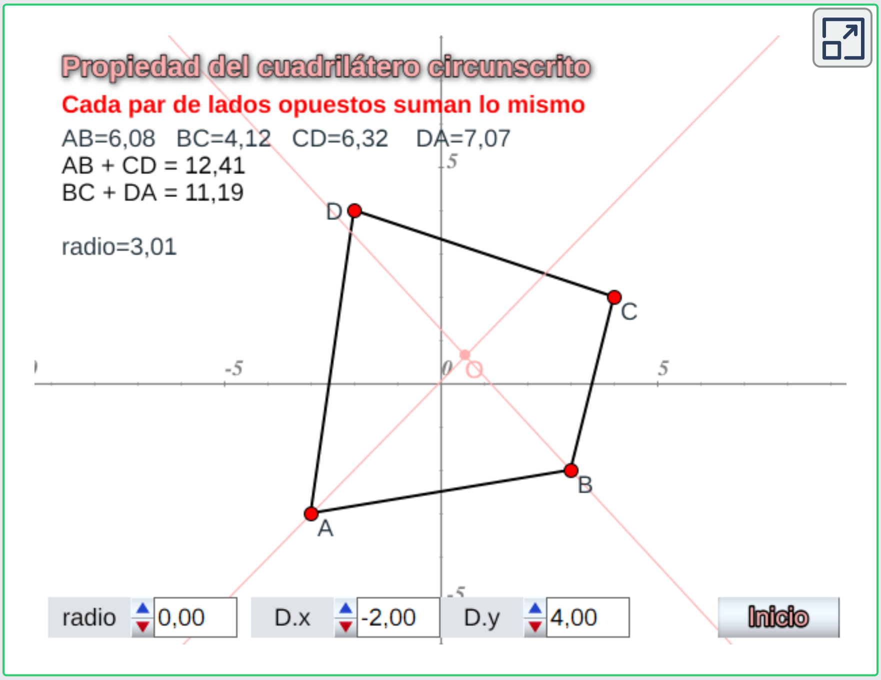
---

[1] El corte O de las dos bisectrices equidista de los lados DA, AB y BC. Para que el punto O sea el centro de la circunferencia inscrita al cuadrilátero es necesario que equidiste también de CD.

[2] Este radio ahora es la distancia del punto O a los tres lados DA, AB y BC

- Se comprueba que el cuadrilátero no queda circunscrito a la circunferencia.
- Comprueba además que la suma de los lados opuestos no es la misma, es decir $AB + CD$ no es igual a $BC + DA$.

DESCUBRIR LA PROPIEDAD



- Ahora vas a cambiar las longitudes de los lados hasta conseguir que la suma $AB + CD$ sea igual a $BC + DA$. Para ello desplaza los controles colocados en los vértices hasta que lo consigas.[3] En ese momento observa el valor que tiene el radio y dibuja la circunferencia, como lo hiciste antes: introduce este valor en la ventana del parámetro $radio$.

[3] Para facilitar que se obtenga esta igualdad se han proporcionado los controles del punto $D(D.x, D.y)$ con una variación de $0,01$

- Comprobarás que el cuadrilátero ha quedado circunscrito a la circunferencia es decir has obtenido un cuadrilátero circunscribible.
- Repite el ejercicio, variando las longitudes de los lados AB, BC, CD y DA y asegúrate que cuando el cuadrilátero es circunscribible, se cumple $AB + CD = BC + DA$.

PROPIEDAD: La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea circunscribible es que la suma de los lados opuestos valga lo mismo.

REFLEXIONA:

Has comprobado que cuando la suma de los lados opuestos vale lo mismo el cuadrilátero se puede circunscribir en una circunferencia.

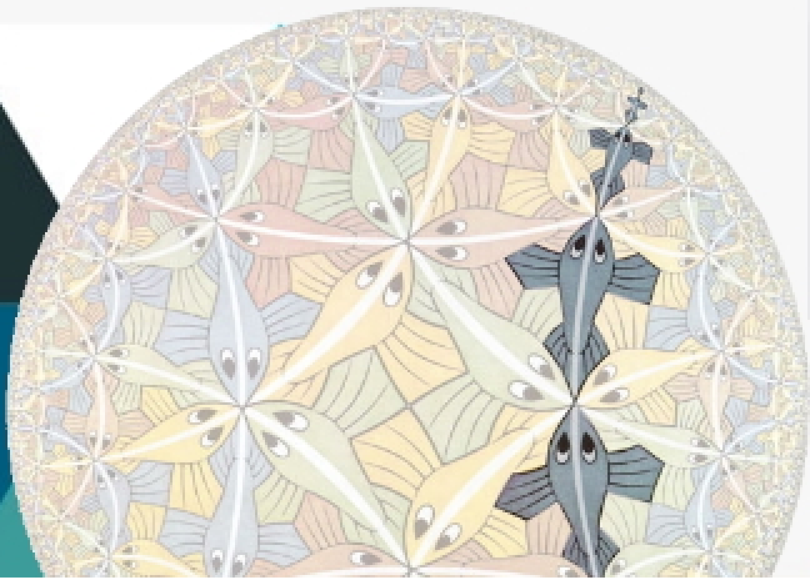
Cumplida la propiedad, el centro de la circunferencia es la intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero.

6. Ahora supón que un cuadrilátero está circunscrito a una circunferencia y trata de demostrar que la suma de los lados opuestos vale lo mismo.

[4] Propiedad de las dos tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia

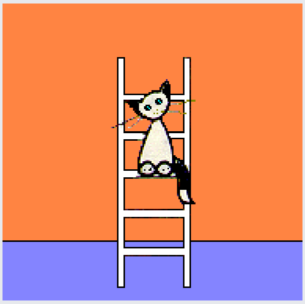
Capítulo II

Lugares geométricos



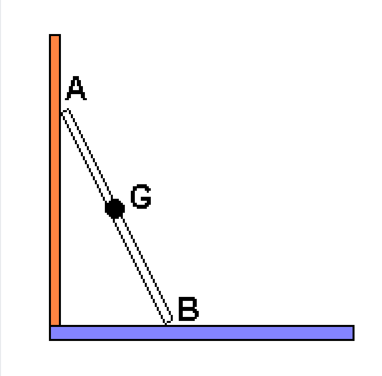
2.1 Lugar de un punto sobre un segmento que resbala apoyado en los lados de un ángulo recto

DEFINICIÓN: Un lugar geométrico es un conjunto de puntos caracterizados por cumplir una misma propiedad. Así una circunferencia es el lugar de puntos del plano que están a igual distancia de otro llamado centro. La distancia común es el radio de la circunferencia.



Vamos a presentar una situación real, después hacemos una interpretación geométrica ideal y resolvemos el problema matemáticamente.

Una escalera está situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared, se desliza hacia abajo. ¿Por qué línea se mueve el gatito sentado en el centro de la escalera?

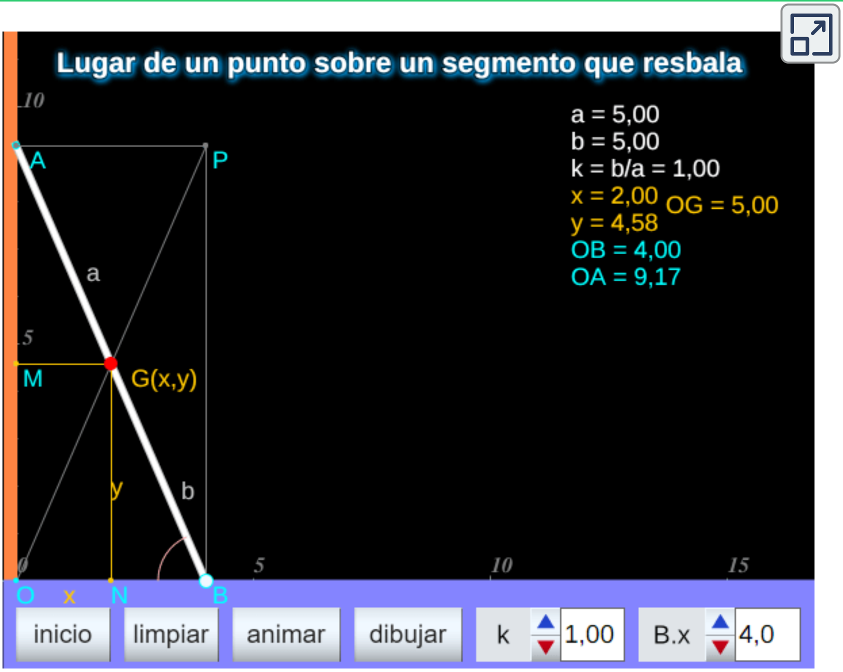


Vista la escena de perfil, un tanto idealizada, tenemos un segmento (la escalera), los apoyos en la pared A y en el suelo B y la situación del gatito G.

Trata de ver la solución e imagina la sucesión de puntos que ocupa G cuando la escalera se desliza (el punto A baja verticalmente y el punto B se desplaza horizontalmente hacia la derecha) ¿Qué trayectoria recorre G?

¡A ver si has acertado!

EXPERIMENTA CON LA SIGUIENTE ESCENA



- El punto B es un control gráfico que permite hacer desplazamientos horizontales del mismo arrastrándolo con el puntero del ratón o variando la coordenada $B.x$ con el correspondiente pulsador.
- El parámetro k es la razón en que el punto G, objeto del estudio, divide al segmento AB: $k = \frac{BG}{GA}$. En nuestro caso, inicialmente toma valor $k = 1$, puesto que al ser G el punto medio de AB se cumple que $AG = GB$.
- Más adelante cambiando el valor de k, analizaremos otros lugares del punto G cuando el segmento AB desliza.
- El ángulo recto lo hacemos coincidir con el primer cuadrante del plano cartesiano donde $x \geq 0, y \geq 0$
- El segmento AB tiene longitud 10.

REFLEXIONA...

En condiciones iniciales de la escena, desplaza el control B, comprobarás que el lugar del punto G es un cuadrante de circunferencia de radio OG.

1. ¿Cómo podemos explicar esto geométricamente? Intenta dar una explicación observando la escena.
   Finalmente consulta la solución.
2. Observa en la escena anterior que las coordenadas del punto G, $x = ON$ e $y = OM$, son respectivamente la mitad de las distancias del origen O a los puntos de apoyo B y A, es decir $x = OB/2$ e $y = OA/2$. Intenta dar una explicación. Y finalmente consulta la solución.

Modifiquemos las condiciones iniciales del problema de la escalera y supongamos que el gatito no está sentado en medio de la escalera. Desde el punto de vista geométrico diremos que, ahora, la razón $k = \frac{BG}{GA}$ no es 1, por ejemplo que $BG = \frac{GA}{2}$, es decir $k = 0.5$.

ENUNCIADO

Un enunciado más general del problema es siguiente:

> Sea un ángulo recto. Hallar el lugar del punto G de un segmento AB que lo divide en dos partes desiguales, cuyos extremos se hallan sobre los lados del ángulo dado.

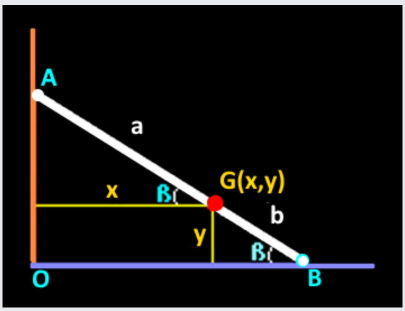
- Volver a la escena anterior y pulsar $inicio$
- Cambiar $k = 0,5$. Situar el punto de apoyo B próximo a la pared, p.e $B.x = 0,3$.
- Pulsar $animar$ para simular que la escalera resbala y ver el lugar del punto G. Pulsar $dibujar$.

Observemos los cambios:

1. El lugar del punto G cuando el segmento AB resbala no es una trayectoria circular.
2. La distancia OG no se mantiene constante a lo largo de la trayectoria.
3. Las coordenadas del punto G no valen la mitad de OB y OA respectivamente (x distinto de $\frac{OB}{2}$ e y distinto de $\frac{OA}{2}$)
4. El punto G no es el corte de las diagonales del rectángulo $AOBP$.

¡Habrás observado la forma elíptica del lugar de puntos G!

Demostremos esta afirmación:



Si el segmento AB está inclinado un ángulo β respecto al eje OB, entonces

$$\frac{y}{b} = sen(\beta) \qquad (1)$$

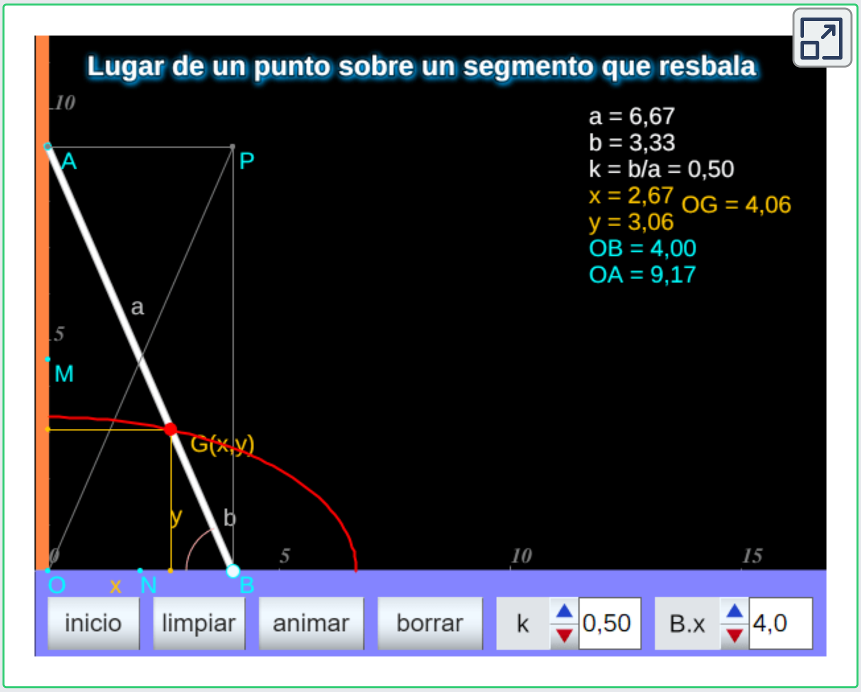
$$\frac{x}{a} = cos(\beta) \qquad (2)$$

elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro (1) y (2)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = sen^2(\beta) + cos^2(\beta)$$

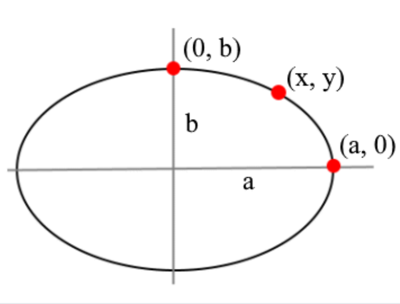
y consecuentemente la ecuación de la trayectoria resulta ser la elipse, centrada en el origen, de semiejes a y b.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



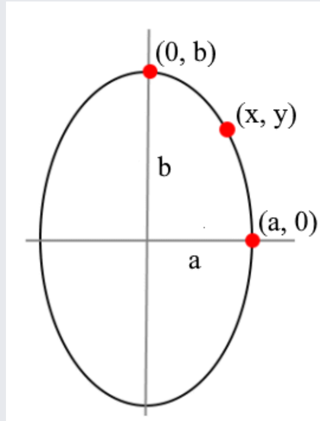
- Deslizando hacia la izquierda el punto B, lleva el segmento AB a la posición vertical, observa la posición que ocupa el punto G. Este punto $(0, b)$ está en el eje de ordenadas a la altura más alta posible.
- Desliza hacia la derecha el punto B, lleva el segmento AB a la posición horizontal, observa la posición que ocupa el punto G. Este punto $(a, 0)$ está en el eje de abscisas y ocupa la posición horizontal más alejada posible.

Observa esta circunstancia en la figura adjunta, donde se representa una elipse centrada en el origen de semiejes a y b.



- Volver a la escena anterior.
- Cambiar $K = 2$. Observar la nueva trayectoria.

Comprueba que el lugar geométrico es una elipse pero ahora el semieje a es menor que el semieje b

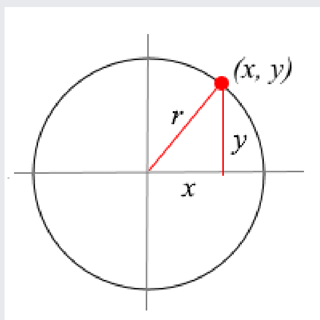


Se seguirá cumpliendo que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Para concluir proponemos las siguientes
CUESTIONES:

3. En realidad la ecuación de la elipse es válida incluso cuando los semiejes sean iguales $a=b$. Cuando esto ocurre hemos visto que el lugar es una circunferencia, centrada en el origen, de radio $r=a=b$.
   Demuestra que la ecuación de la circunferencia es
   $$x^2+y^2=r^2$$

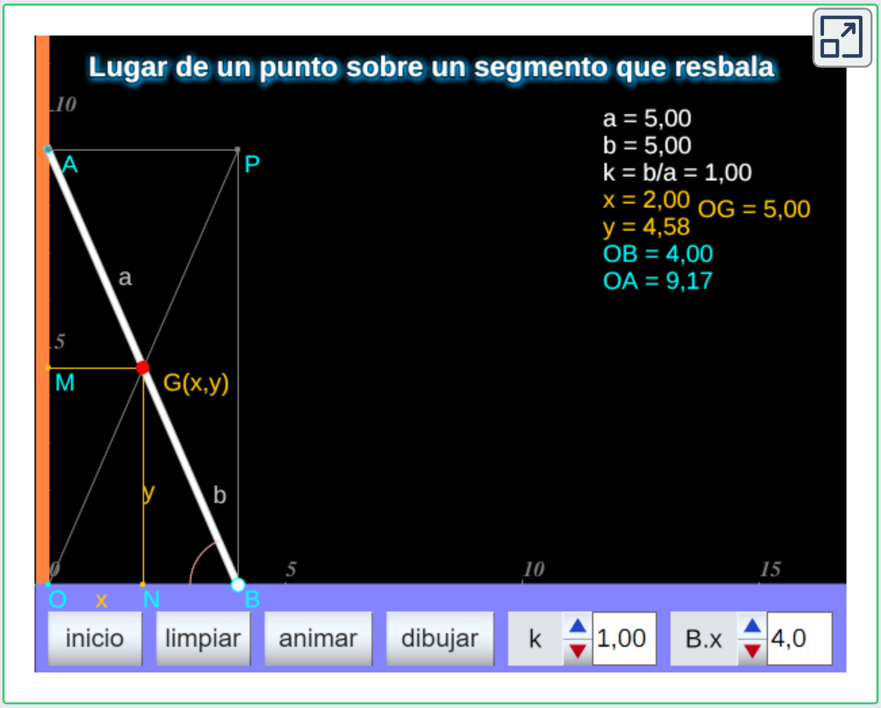
> A este resultado se llega observando la relación que existe entre las coordenadas de un punto cualquiera de la circunferencia y el radio de la misma.
>
> 
>

4. Una tablón de longitud 10 metros está apoyado sobre una pared y un suelo liso y perpendicular a la pared. El punto de apoyo en el suelo dista de la pared 9 metro.
Una persona sube por el tablón. Calcula la altura a la que se encuentra dicha persona cuando:

   a. Ha andado $3\ metros$

   b. Ha andado $5\ metros$

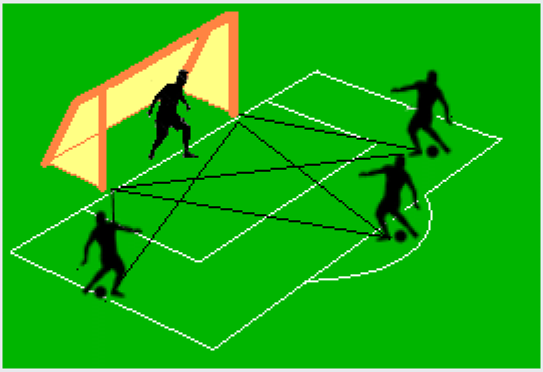
   c. Ha recorrido todo el tablón



Observa la escena, al ser la longitud del segmento $AB = 10$, éste puede asimilarse al tablón del problema. Toma nota del resultado y trata de resolver el problema en tu cuaderno aplicando los conocimientos matemáticos

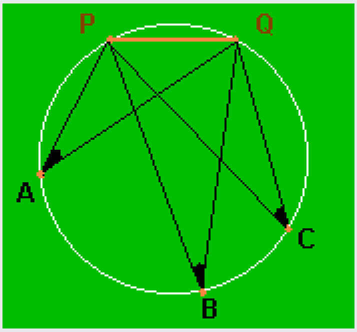
2.2 Arco capaz

2.2.1 ¡Un lugar geométrico interesante!



En la figura vemos a unos futbolistas en posición de lanzar el balón contra la portería. El ángulo de tiro es el formado por el píe del jugador (vértice) y las trayectorias a los postes (lados).

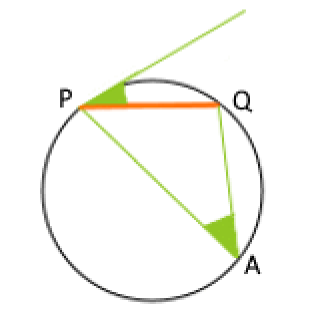
¿Qué posiciones deberán ocupar los jugadores para que todos tengan el mismo ángulo de tiro?



El problema consiste en averiguar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales se ve el ancho de la portería con el mismo ángulo.

> Este problema está relacionado con la propiedad de los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco PQ (misma cuerda).
> Sabemos que estos ángulos miden todos lo mismo: la mitad del ángulo central correspondiente.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA:

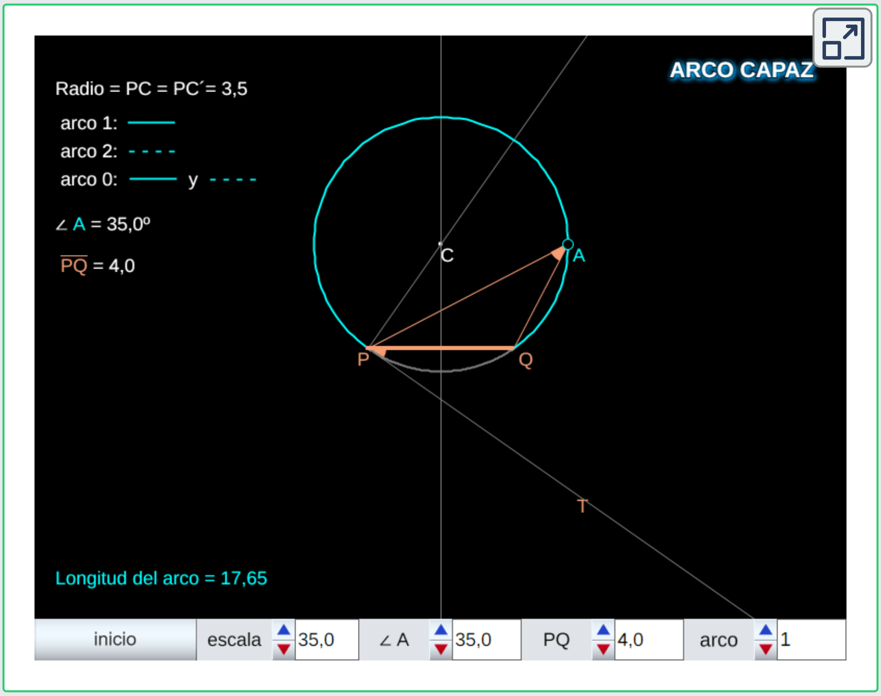


Supongamos que el ángulo de tiro es de 35^{o} y que la portería se interpreta como un segmento PQ. Vamos a construir el arco de circunferencia.

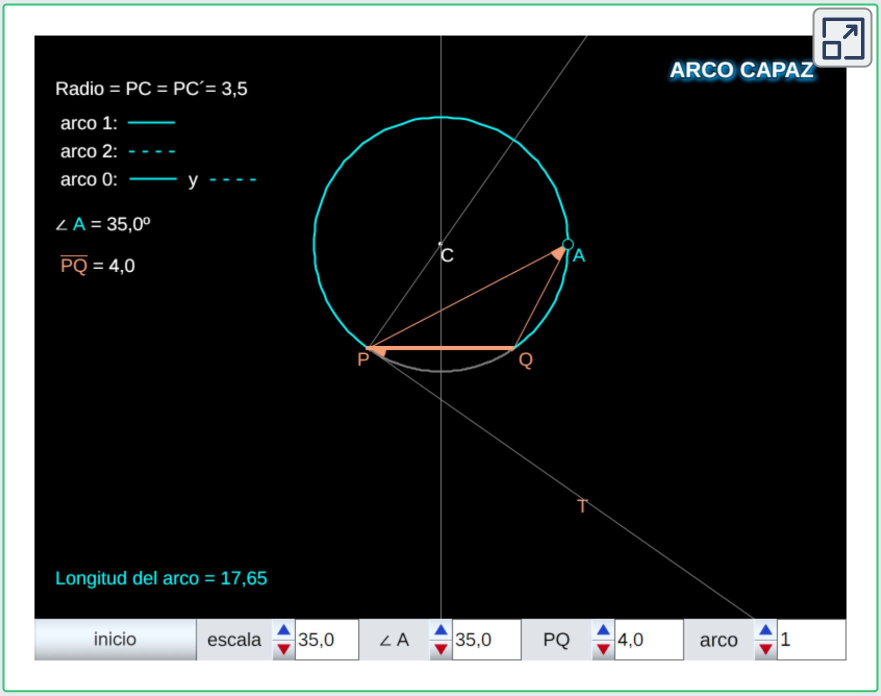
> Debemos de saber que tanto los ángulos inscritos como el ángulo semiinscrito que abarcan la misma cuerda PQ miden lo mismo.

En la figura anterior el ángulo semiinscrito es el que tiene el vértice en la circunferencia, punto P, un lado es tangente en P y el otro lado es secante en Q.

OBSERVEMOS LA ESCENA SIGUIENTE:



1. Muestra $arco = 1$. Se dan el segmento $PQ = 4$ y el ángulo en A de $35º$.
2. Por el extremo P se traza el ángulo semiinscrito $QPT = 35º$.
3. Por ser PQ una cuerda, el centro de la circunferencia está en la mediatriz de PQ. Por eso se ha trazado dicha mediatriz.
4. Por ser PT tangente a la circunferencia con centro en C, el centro está en la perpendicular a PT trazada por P. Por ello se ha trazado dicha perpendicular.
5. El centro de la circunferencia es la intersección C de estas rectas.



6. Con radio PC se traza la circunferencia.

7. El lugar geométrico es el arco mayor, llamado arco capaz.

8. Mostrar $arco = 0$. Obsérvese que la circunferencia simétrica de centro C' también contiene otro arco capaz desde el que se ve el segmento PQ bajo un ángulo de 35^{o}.

9. Con $arco = 0$, desplazar el punto A por todo el lugar geométrico que representan los dos arcos mayores en las circunferencias simétricas.

EXPERIMENTEMOS CON LA ESCENA...

El punto A, es un control que puedes desplazar pinchando y arrastrando con el puntero del ratón. Éste se desplaza por el arco capaz de cada una de las dos circunferencias simétricas. Comprobar como el ángulo con vértice en A no cambia de valor a lo largo del recorrido.

- Si cambiamos los parámetros, $ángulo\ \angle A$ ó $cuerda\ PQ$, el lugar geométrico cambia también.
- La escena te permite conocer:

  - El Centro C de la circunferencia, referido al origen $(0,0)$ situado en el centro de la cuerda PQ. El centro C' de la otra circunferencia es simétrico respecto de PQ (ver con $arco = 0$ o $arco = 2$)

  - El radio de las circunferencias $PC = PC'$

  - La longitud de cada uno de los arcos capaces.

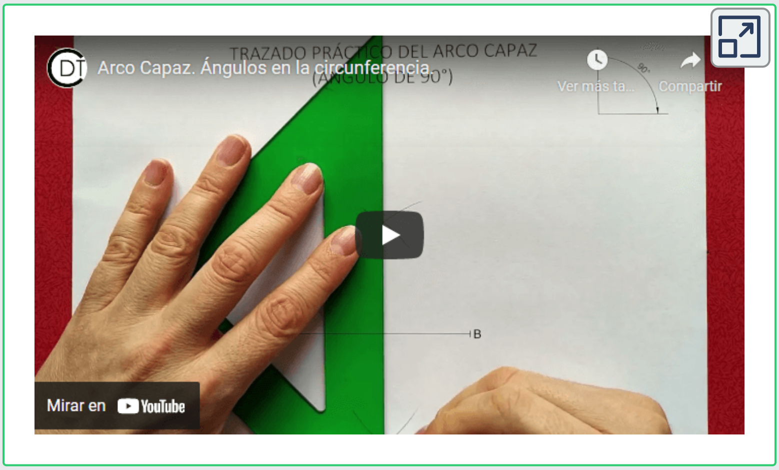
Tener en cuenta esta información para resolver los siguientes

PROBLEMAS

1. Determinar el arco capaz desde el cual se ve el segmento $PQ = 6$ bajo un ángulo de $50,5$º.
2. Dibuja en tu cuaderno, la solución del problema anterior y comprueba el resultado consultando la posición del centro y el radio de la circunferencia.
3. Calcula la longitud del arco capaz del problema anterior y comprueba el resultado obtenido en la escena.
4. Si mantenemos constante el segmento PQ, y aumentamos el ángulo ¿El radio de la circunferencia, aumenta o disminuye?
5. Utilizando la construcción del arco capaz, dibuja en tu cuaderno, un triángulo, conocidos el lado $BC = 6cm$, el ángulo opuesto, $A = 45$º y la mediana $ma = 5cm$

2.2.2 Definición de arco capaz. Ángulos en la circunferencia

El arco capaz resulta muy útil para resolver numerosos problemas de geometría plana. En el siguiente **vídeo** se define arco capaz, se observa su construcción y se justifica demostrando la relación que existe con el ángulo inscrito y semiinstcrito en una circunferencia.



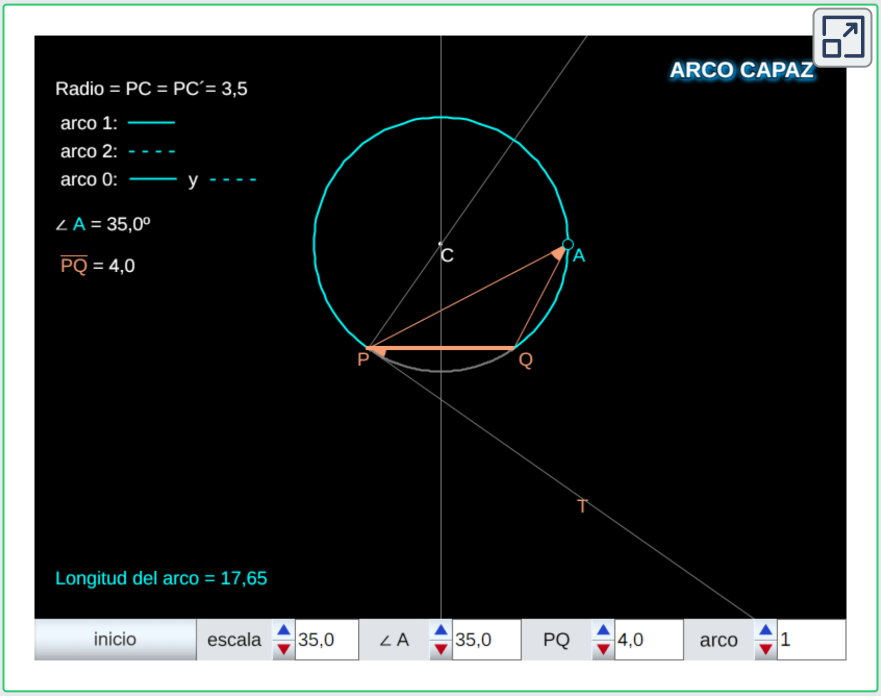
ARCO CAPAZ MAYOR, IGUAL O MENOR QUE UN SEMICÍRCULO

Consultar la escena de la página siguiente, mostrar $arco = 1$, aumentar de escala, si fuera el caso, para ver mejor y verificar que para cualquier segmento PQ:

- El arco capaz desde el que se ve el segmento PQ con un ángulo de 90° es una semicírcunferencia.

El arco capaz desde el que se ve el segmento PQ con un ángulo menor de 90^{o} es mayor que una semicírcunferencia. Por ejemplo $\angle A = 45^{\text{o}}$

El arco capaz desde el que se ve el segmento PQ con un ángulo mayor de 90^{o} es menor que una semicírcunferencia. Por ejemplo $\angle A = 120^{\text{o}}$



Cuando el $\angle A$ es 90^{o} los centros de los dos arcos coinciden en el punto medio del segmento PQ y éste ahora es el diámetro de la circunferencia que forman los dos arcos.

El centro del $arco1$ queda por encima del segmento PQ cuando $\angle A$ es menor de 90^{o} y por debajo cuando es mayor de 90^{o}

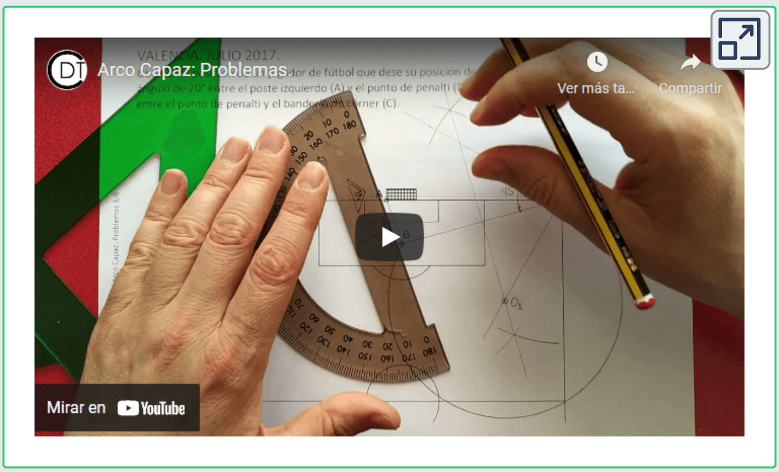
2.2.3 Resolución de problemas con el arco capaz

Vamos a enunciar seis problemas que se van a poder resolver aplicando el arco capaz.

Para cada enunciado se podrá ver la solución en su correspondiente vídeo. No obstante sería muy conveniente que el estudiante intentara previamente resolverlo utilizando las herramientas de dibujo necesarias o al menos haciendo un esquema, es decir exponiendo la solución en sus líneas generales con papel y lápiz.

PROBLEMA 1.
Problema de Pothenot o de los tres puntos:

Consiste en localizar un punto P desde el que se observan otros tres A, B y C, de posición conocida, bajo los ángulos $\alpha = \angle AB$ y $\beta = \angle BC$.

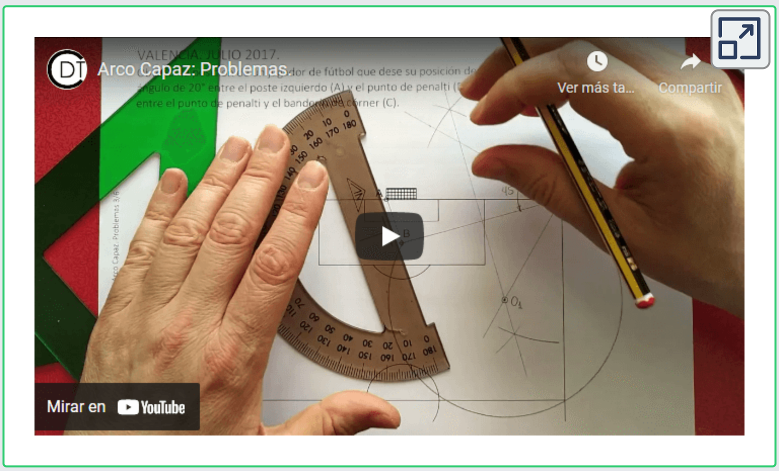


El *problema de Pothenot*, de los tres puntos, también se conoce como el *problema de la carta marítima* por su aplicación en náutica. Un enunciado práctico podría ser este:

El patrón de un barco situado en una bahía observa la costa y ve la torre de la iglesia y el cabo con un ángulo de 45^{o} y dicha torre y la antena de la emisora con otro de 60^{o}[5]*. Hallar la situación del barco en la bahía.*

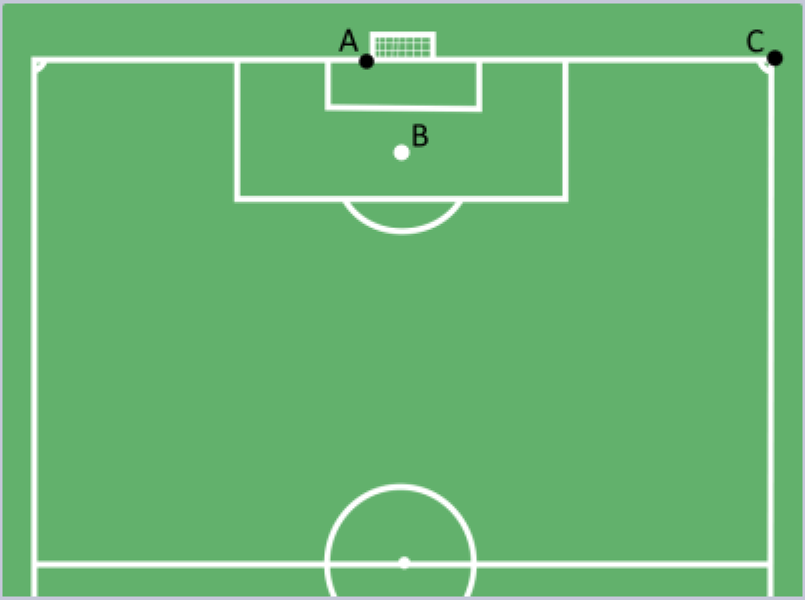
Una vez resuelto, el patrón del barco podrá situar su barco en la carta náutica y conocer su posición geográfica.

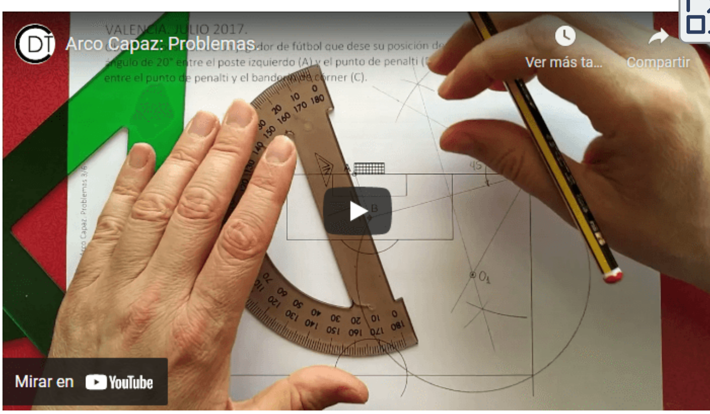
PROBLEMA 2.
Localizar un punto P, interior al triángulo $\triangle ABC$, que equidiste de los lados AB y BC y de forma que el ángulo $\widehat{APB}$ sea 120^{o}.



[5] El teodolito es un instrumento de medición mecánico-óptico que se utiliza para obtener ángulos verticales y horizontales

PROBLEMA 3.
Obtener la posición de un jugador de futbol que desde su posición dentro del campo ve un ángulo de 20° entre el poste izquierdo (A) y el punto de penalti (B) y un ángulo de 45° entre el punto de penalti y el banderín de córner (C).





PROBLEMA 4.
Dada la planta de un cine, en la que se representa la posición de la pantalla AB y de las dos salidas, $S1$ y $S2$, se pide:

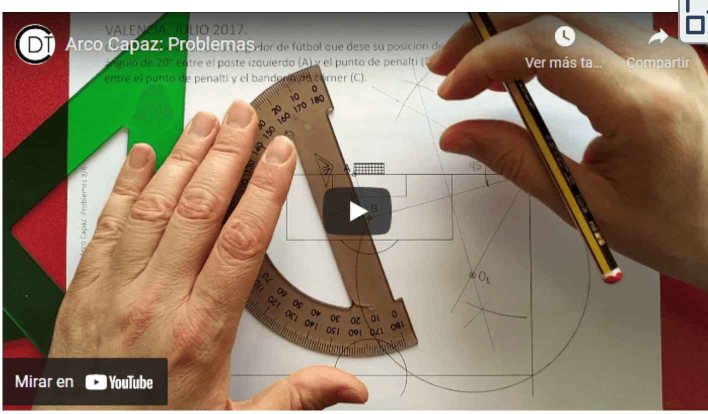
a. Dibujar la posición de los puntos del patio de butacas que cumplen simultáneamente:

- se ve la pantalla AB bajo un ángulo de 30^{o}.
- están situados a la misma distancia de las dos salidas, $S1$ y $S2$.

b. Dibujar la posición de los puntos del patio de butacas que cumplen simultáneamente:

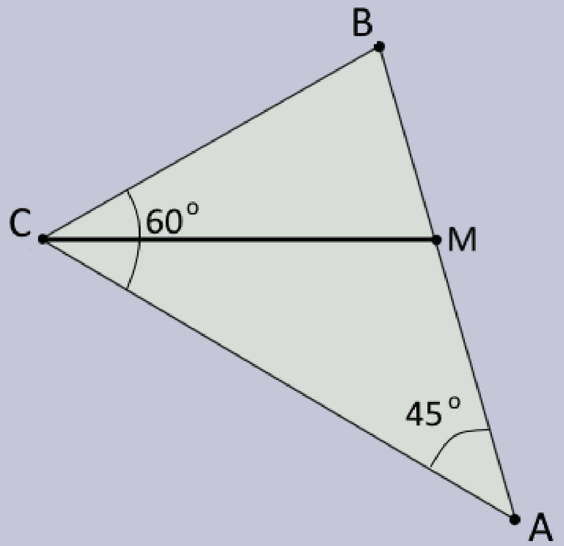
- se ve la pantalla AB bajo un ángulo de 90^{o}.
- están situados lo más cercanos posible de la salida $S1$.

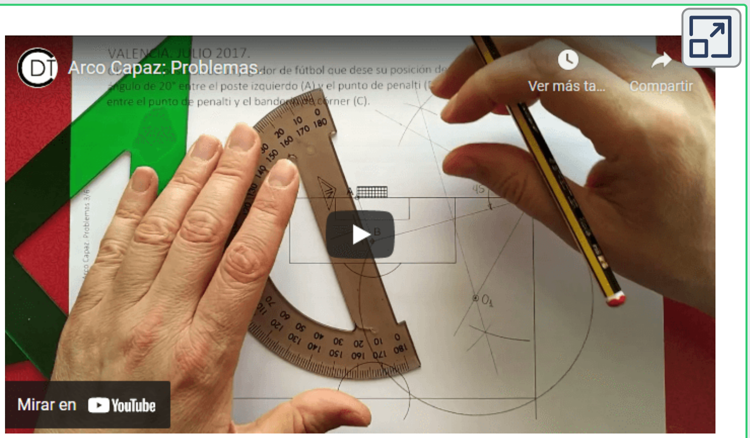
Sitúa el mouse sobre la imagen para ver un esquema de la planta del cine.



PROBLEMA 5.

Dibujar un triángulo $\triangle ABC$ del que se conocen los ángulos $\angle A = 45^{\circ}$ y $\angle C = 60^{\circ}$ y la longitud del segmento bisectriz, CM de ángulo en C :

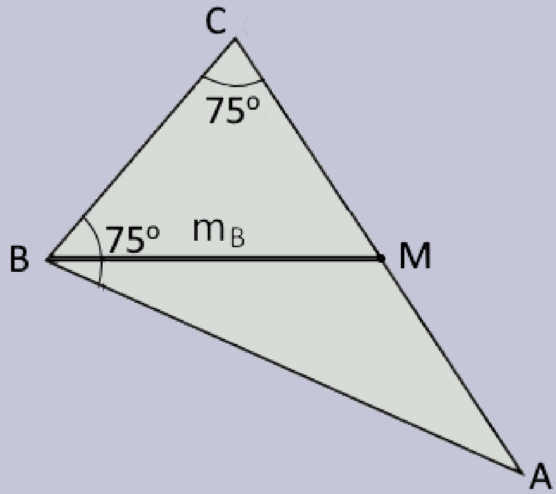


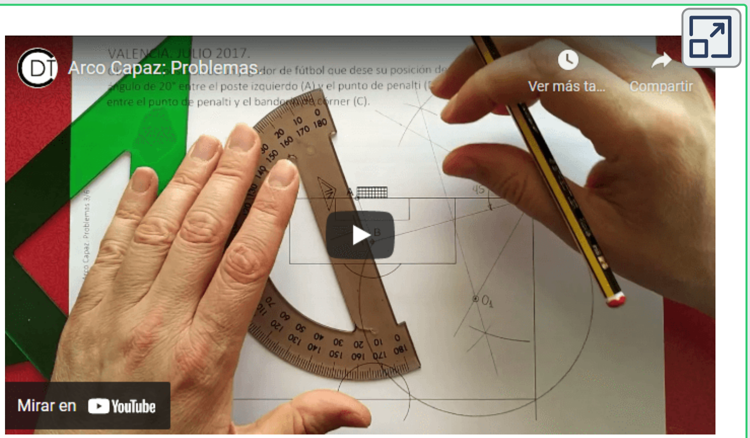


PROBLEMA 6.

Construir un triángulo isósceles $\triangle ABC$, dada su mediana m_B y el valor de sus ángulos $\angle B = \angle C = 75^{\circ}$.

Justifica razonadamente la construcción empleada.





DESCARTES
matemáticas interactivas