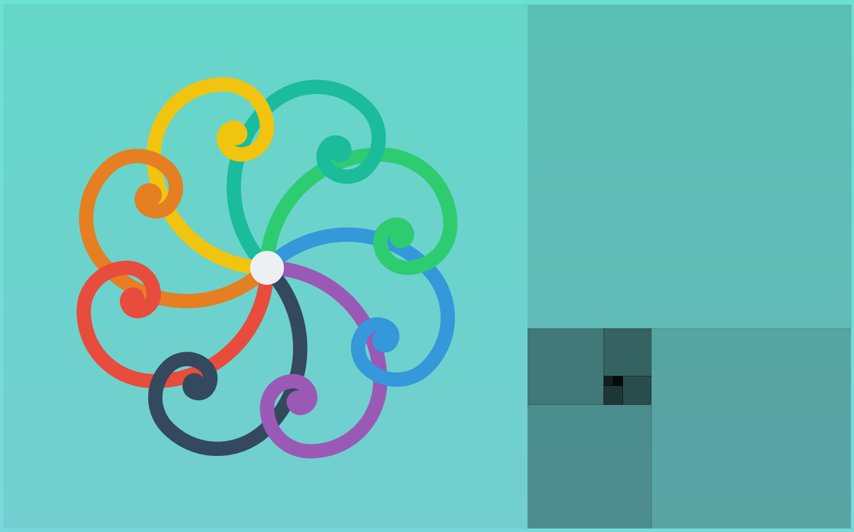
Notas para el curso

Matemáticas para las Ciencias 1



Notas para el curso Matemáticas para las Ciencias 1

Hugo Alexis Hernández Austria
Universidad Nacional Autónoma de México

Título de la obra:
Notas para el curso Matemáticas para las Ciencias 1

Autor:
Hugo Alexis Hernández Austria

Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Fuentes: Nunito y UbuntuMono
Fórmulas matemáticas: $\KaTeX$
Núcleo del libro interactivo: septiembre 2023

Tabla de contenido

Introducción

En este libro se presentan notas para complementar el curso de Matemáticas para las Ciencias Aplicadas 1 con el objetivo de suplementar el material proporcionado por el profesor así como ayudar al alumno a repasar los conceptos vistos en el curso. Junto con una explicación resumida de los temas el libro contiene recursos interactivos para ayudar a reforzar el aprendizaje del alumno permitiéndole interactuar con los conceptos presentados.

El libro forma parte del proyecto iCartesiLibri del repositorio de recursos interactivos Prometeo del Instituto de Matemáticas y puede ser consultado desde el siguiente vínculo.

Capítulo I
Funciones gráficas

1.1 Funciones.

La palabra **“función”** fue introducida en Matemáticas por Leibniz, que utilizaba este término para designar cierto tipo de fórmulas matemáticas. Más tarde se vio que la idea de función de Leibniz tenía un alcance muy reducido, y posteriormente el significado de la palabra función fue experimentando generalizaciones progresivas [1].

Actualmente, la definición de función es la siguiente: Sean X y Y dos conjuntos, una función es una regla de asociación que asigna a cada elemento $x \in X$ un único elemento $y \in Y$, al conjunto X lo llamaremos dominio y al conjunto Y lo llamaremos el contradominio, codominio o rango de la función.

En general a las funciones se les asignan nombres, por ejemplo, la función identidad, o pueden ser denotadas por letras como f, g, h, F o ϕ.

Si tenemos una función f y x es un objeto en su dominio, la notación $f(x)$ se utiliza para designar al objeto que en el codominio corresponde a x y se denomina el valor de la función f en x o la imagen de x por f.

En el Cálculo elemental se tiene interés en considerar primero, aquellas funciones en las que el dominio y el rango son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman funciones de variable real o más brevemente funciones reales y se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano cartesiano. Se representa el dominio X en el eje x, y a partir de cada punto x de X se representa el punto (x, y) donde $y = f(x)$. La totalidad de puntos (x, y) se denomina la gráfica de la función. A continuación veremos ejemplos de funciones reales. [1]

- **Función identidad:** Supongamos que $f(x) = x$ para cualquier elemento $x \in X$. Esta función la denotamos como la función identidad. El dominio de esta función es el conjunto $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto de los números reales.
- **Volumen de un cubo:** Se dice que el volumen de un cubo es función de la longitud de sus aristas. Si las aristas tienen de longitud x, el volumen está dado por la fórmula $V = x^3$. En el siguiente interactivo observa como cambia el valor del volumen del cubo dependiendo de la longitud de sus aristas.

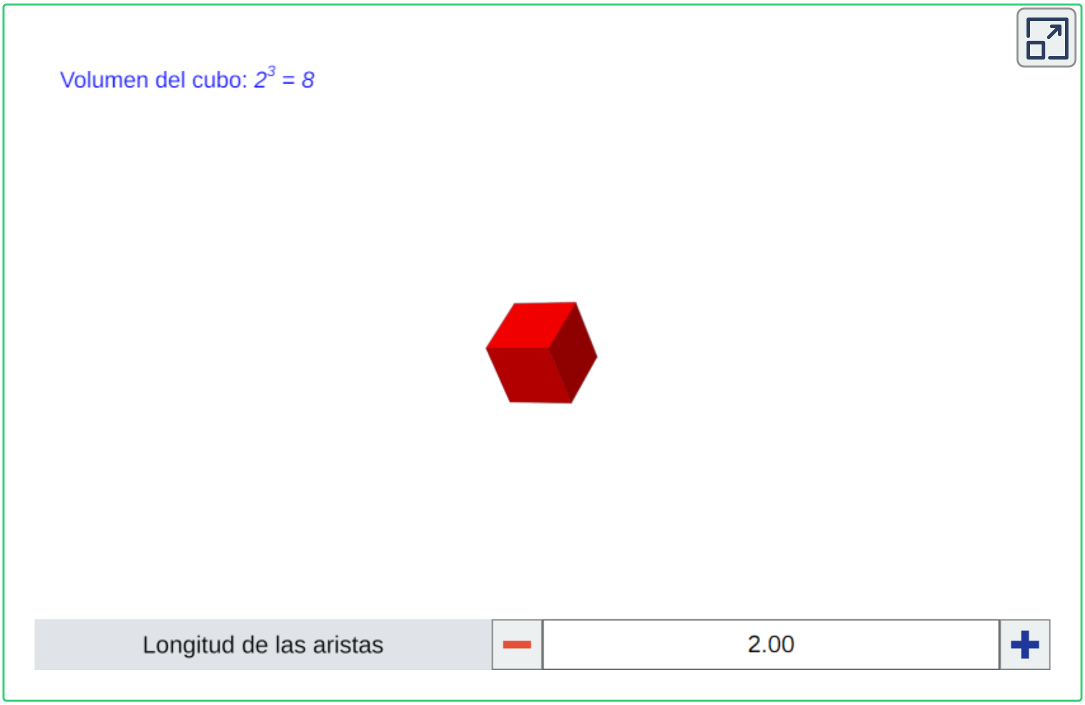


Figura 1.1. Volumen de un cubo

- **Velocidad:** La velocidad es la relación entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en completarla. En el siguiente interactivo observa como se mueve el automóvil dependiendo de su velocidad.

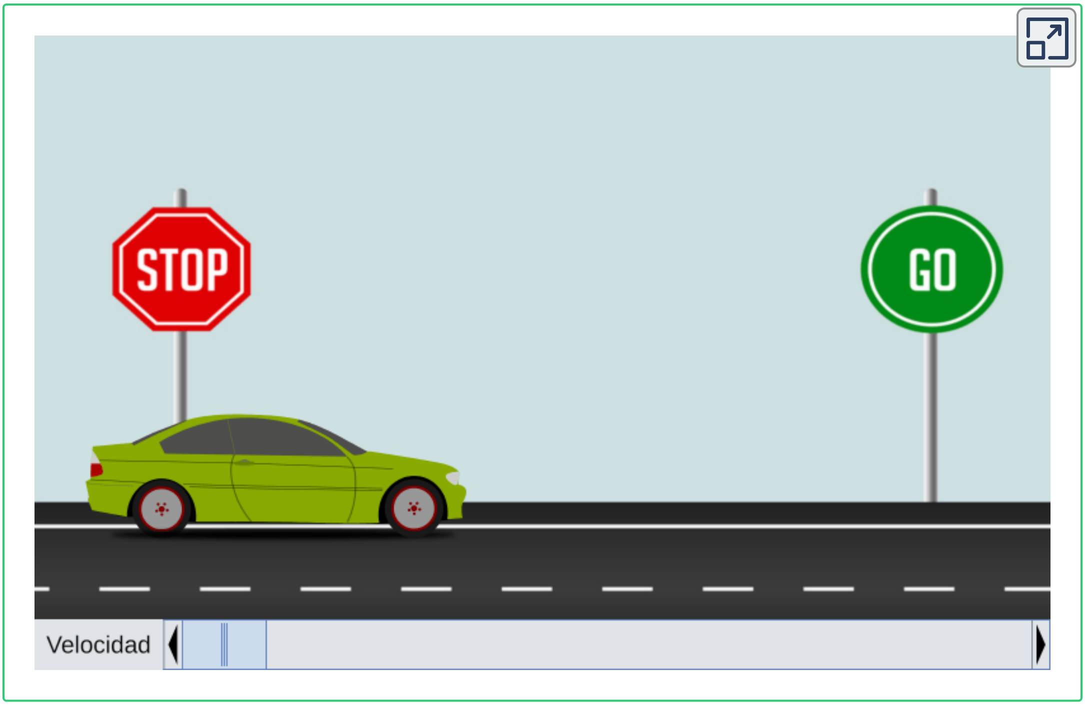


Figura 1.2. Velocidad de un automóvil

- **Presión:** La presión está definida como la fuerza por unidad de área y está dada por la fórmula $p=\frac{F}{A}$ donde F es la fuerza aplicada sobre una superficie A. En el siguiente interactivo se muestra un globo apoyado sobre unos clavos, observa que dependiendo del número de clavos la fuera necesaria para reventar al globo cambiará, si aumentamos el número de clavos estamos incrementando la magnitud del área sobre la que el globo está apoyado por lo que la presión ejercida sobre el globo disminuirá y necesitaremos una fuerza mayor para reventarlo, en cambio si disminuimos el número de clavos el área será menor, aumentando la presión sobre el globo y disminuyendo la fuerza necesaria para reventarlo.

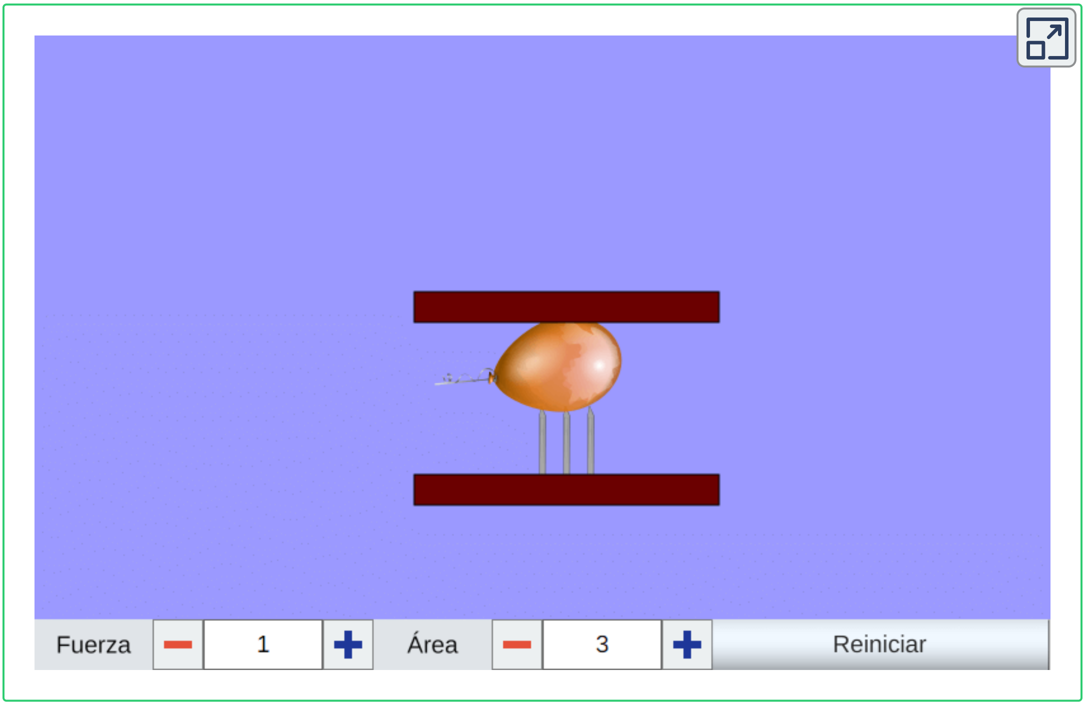


Figura 1.3. Presión sobre un globo

- **Densidad:** La densidad es la cantidad de masa en un determinado volumen de una sustancia o un objeto sólido.

1.2 Coordenadas. Distancia y ángulo.

El plano cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical, de modo que se intersecten en un punto. Las dos rectas se denominan ejes coordenados, su intersección se etiqueta con O y se denomina origen. La recta horizontal se llama eje x o eje de las abscisas y la recta vertical se llama eje y. La mitad positiva del eje x es hacia la derecha, la mitad positiva del eje y es hacia arriba. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que llevan las marcas I, II, III y IV, como se muestra en la figura.

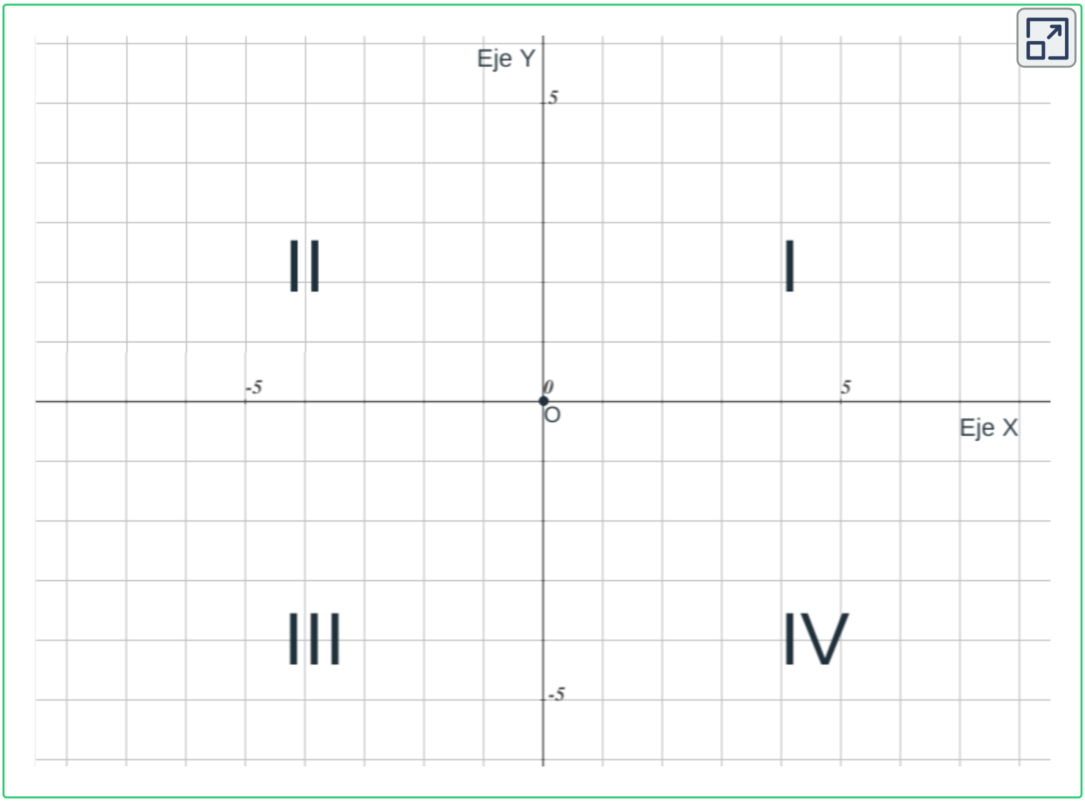


Figura 1.4. Cuadrantes del plano

Ahora, a cada punto P en el plano se le puede asociar una pareja de números, llamados coordenadas cartesianas. Sean (a, b) las coordenadas de un punto, el número a representa la posición en el eje x, entre mayor sea el punto se encontrará más a la derecha, y el número b representa la posición en el eje y, entre mayor sea su valor el punto estará más arriba.

En el siguiente interactivo cambia los valores de las coordenadas del punto (azul) y observa lo que sucede.

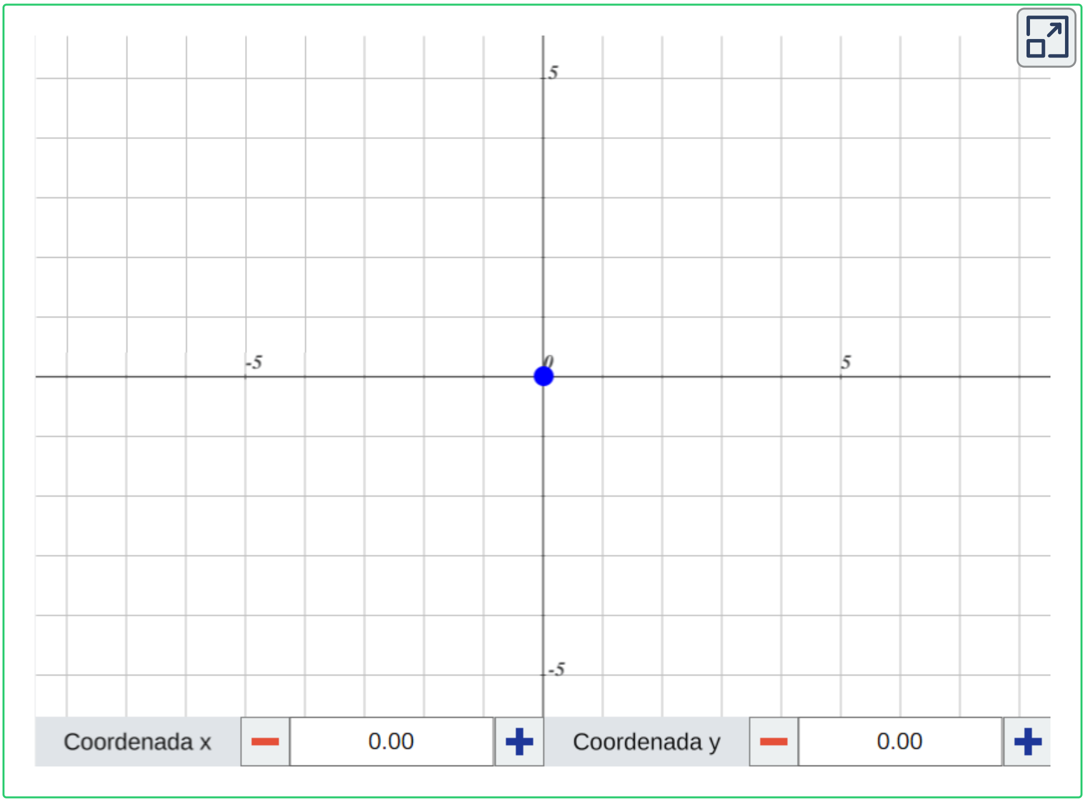


Figura 1.5. Coordenadas de un punto

Sean, P_1 y P_2 dos puntos con coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, la distancia entre ellos está definida como la longitud del segmento que los une. La fórmula para calcular la distancia tiene como base el Teorema de Pitágoras, el cual dice que si a y b son las medidas de los dos catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de su hipotenusa, entonces

$$a^2 + b^2 = c^2$$

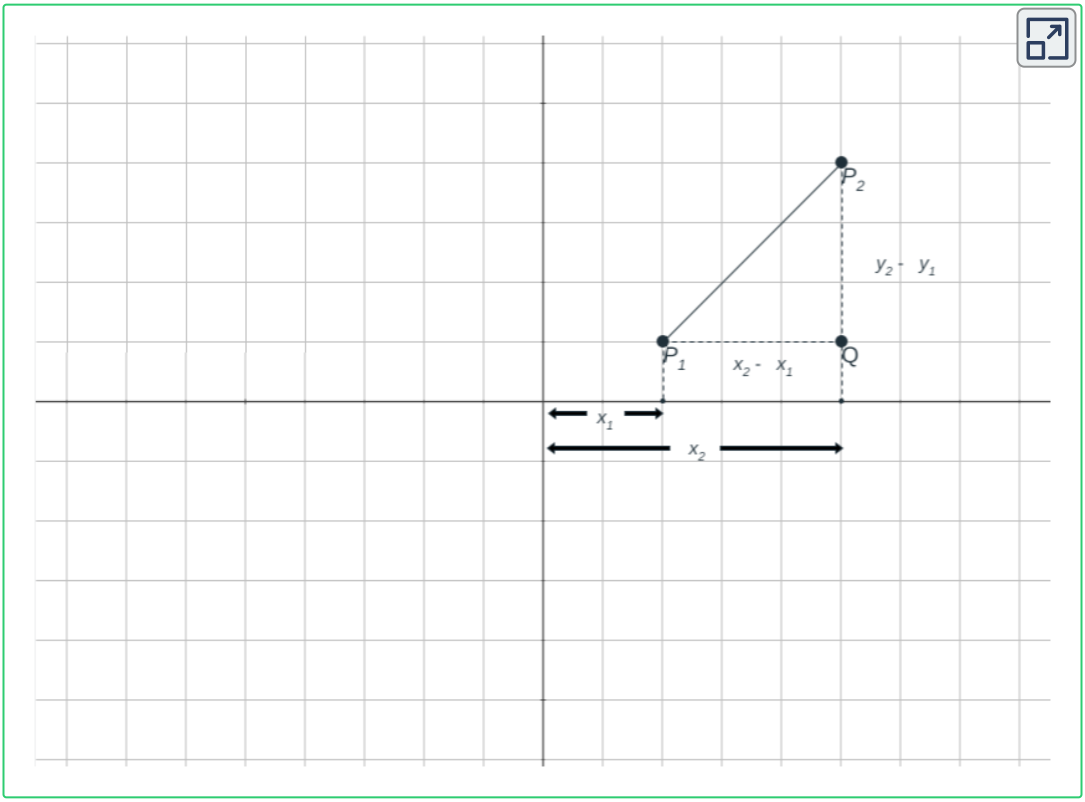


Figura 1.6. Utilizando el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre dos puntos

Como podemos ver en la figura 1.4, al trazar una recta paralela al eje x que pasa por el punto P_1, y una recta paralela al eje y que pasa por el punto P_2 estas se intersectan en el punto Q. Con esto tenemos el triángulo rectángulo P_1QP_2, siendo la hipotenusa la distancia entre P_1 y P_2, a partir de esto obtenemos la fórmula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Mueve los puntos del siguiente interactivo y observa como cambia su distancia dependiendo de sus coordenadas.

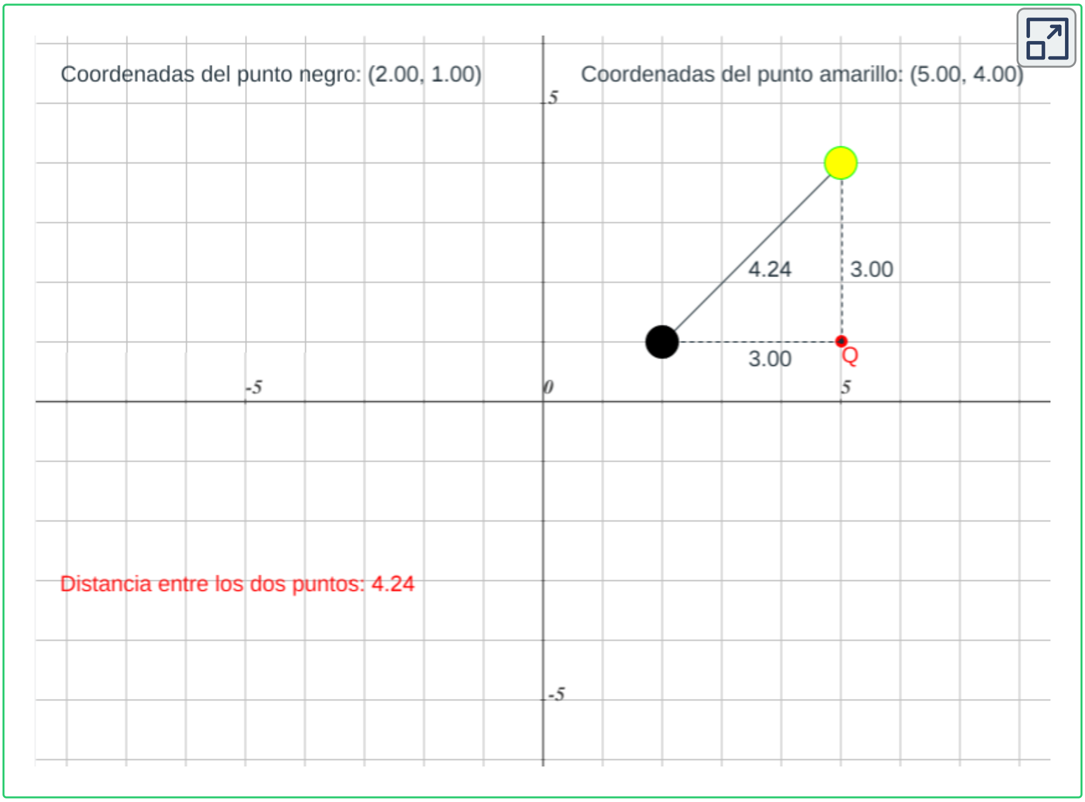


Figura 1.7. Distancia entre dos puntos

Las coordenadas de un punto en el plano también se pueden establecer fijando un punto O, al que llamaremos origen o polo y con una recta que pase por O a la que llamaremos el eje polar. Este nuevo sistema de coordenadas se llama "sistema de coordenadas polares".

A cada punto P en el plano le asignamos un par ordenado (r, θ) llamadas coordenadas polares del punto.

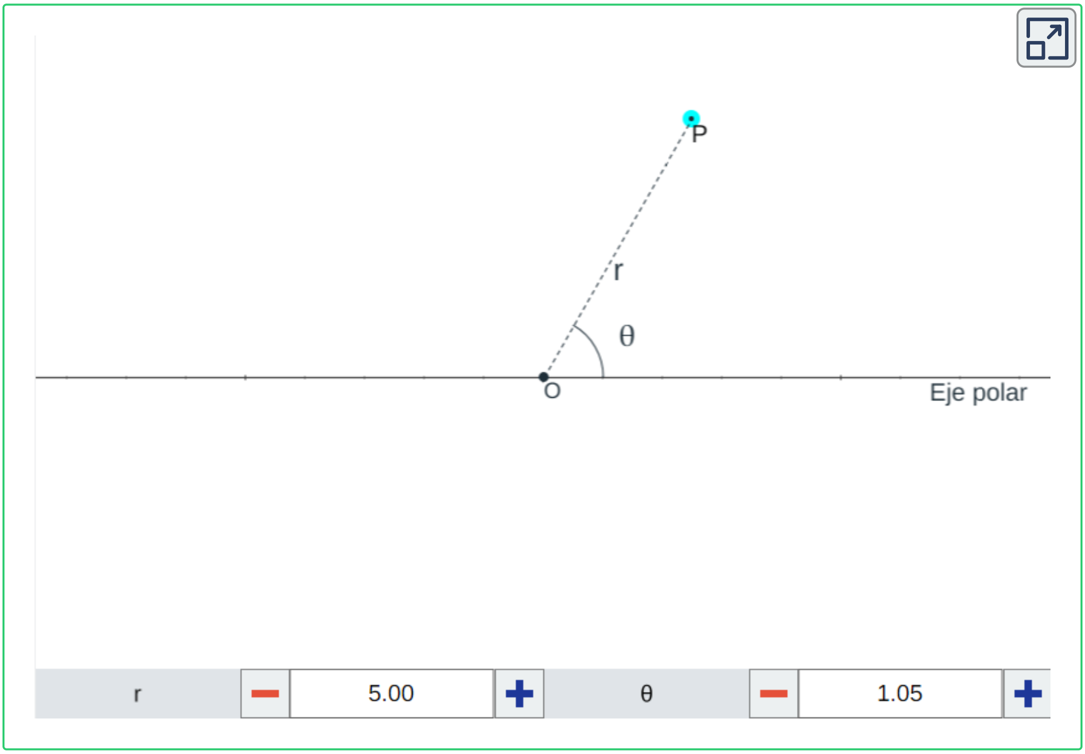


Figura 1.8. Coordenadas polares

- r es la distancia de O al punto P, el signo "–" invierte la dirección.
- θ es el ángulo formado entre el eje polar y el segmento $\overline{OP}$.

A diferencia de las coordenadas rectángulares de un punto, en coordenadas polares la representación no es única: $P(r, \theta)$ también se puede representar como $P(r, \theta \pm 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Representación gráfica de funciones. Ecuación de una recta. Proporcionalidad.

Una función numérica tiene siempre asociada una gráfica, que es una representación que nos permite visualizar el comportamiento de la función.

La gráfica de una función numérica $f(x)$ es un conjunto de puntos en el plano cuyas coordenadas son de la forma $(x, f(x))$ con x perteneciente al dominio de f.

Es decir, la coordenada x de un punto que pertenece a la gráfica de f forma parte del dominio de f y su coordenada y será igual a $f(x)$. Tengamos en cuenta que mientras el dominio de una función es un subconjunto de la recta numérica (formado por todos los números para los cuales la función está definida), la gráfica de la función es un subconjunto del plano.

Observa en el siguiente interactivo los pasos a seguir para graficar una función:

Paso 1: Construimos una tabla con valores de x y su valor f(x), es decir, el valor que toma la función al ser evaluada en x, en el campo de texto puedes cambiar función a graficar

Función x^2

x	x^2
-4.00	16.00
-3.00	9.00
-2.00	4.00
-1.00	1.00
0.00	0.00
1.00	1.00
2.00	4.00
3.00	9.00
4.00	16.00

Anterior Siguiente

Figura 1.9. Pasos para graficar una función

Las funciones de la forma $f(x) = ax + b, a \neq 0$ son llamadas funciones lineales.

Al graficar este tipo de funciones obtenemos una recta. Para graficarlas sólo basta con obtener dos puntos y unirlos con una recta, por ejemplo, para la función $f(x) = 3x + 5$ tenemos los puntos $(0, 5)$ y $(1, 8)$, por lo tanto la gráfica de esta función será la recta que pase por estos dos puntos.

Una función de la forma $f(x) = mx, m \neq 0$ es llamada función de proporcionalidad directa, siendo m la pendiente de la función. Su gráfica es una recta que pasa por el origen. Para obtener la gráfica de una función de proporcionalidad directa solo es necesario un punto distinto del origen por el que pase la función. Siendo x y y las coordenadas de un punto de una función de proporcionalidad directa, la pendiente se calcula de la forma $m = \frac{y}{x}$.

Observa como cambia la gráfica de una función de la forma $f(x) = mx$ al cambiar el valor de m, cuando m es positiva la función es creciente y cuando es negativa la función es decreciente.

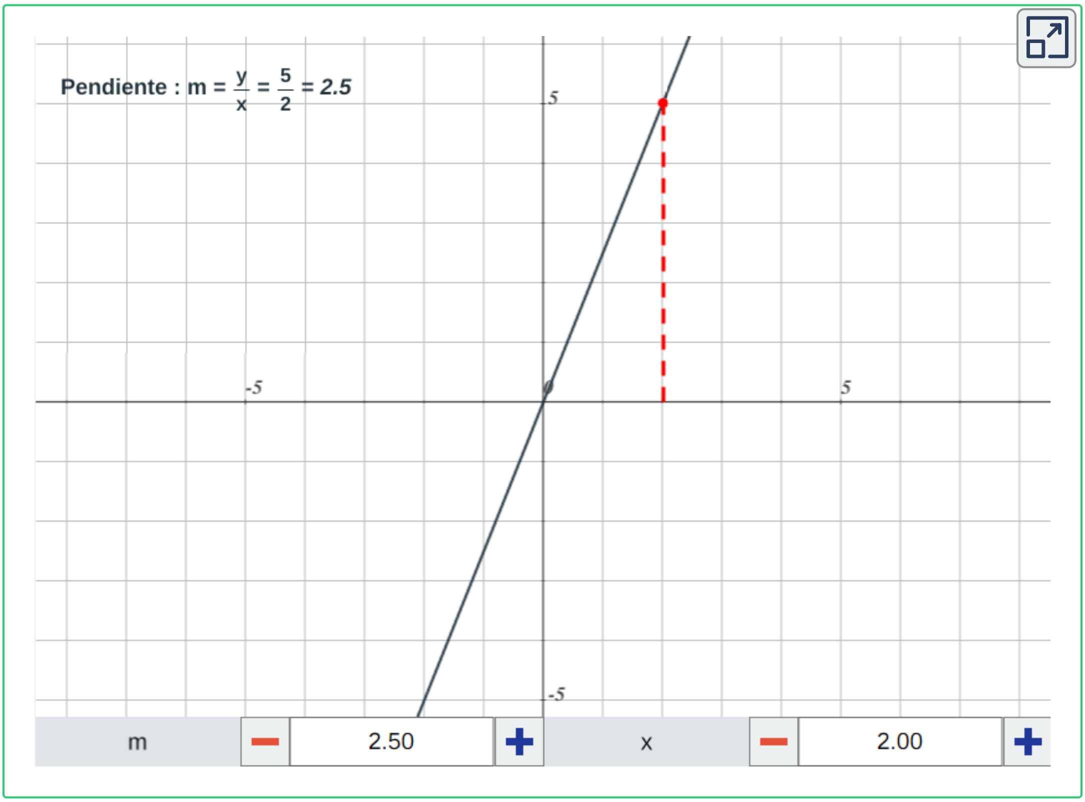


Figura 1.10. Función de proporcionalidad directa

1.4 Cónicas.

Una sección cónica, o sólo cónica, es una curva obtenida a partir de la intersección entre un cono y un plano, existen tres tipos de cónicas: elipse, hipérbola, parábola. El tipo de cónica dependerá del ángulo que se forma entre el plano y el cono.

1.4.1 Parábolas

Una parábola es un conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo llamado foco, es igual a la distancia a una recta llamada directriz. El punto que se ubica entre el foco y la directriz es llamado el vértice de la parábola.

En el siguiente interactivo podemos ver la gráfica de una parábola.

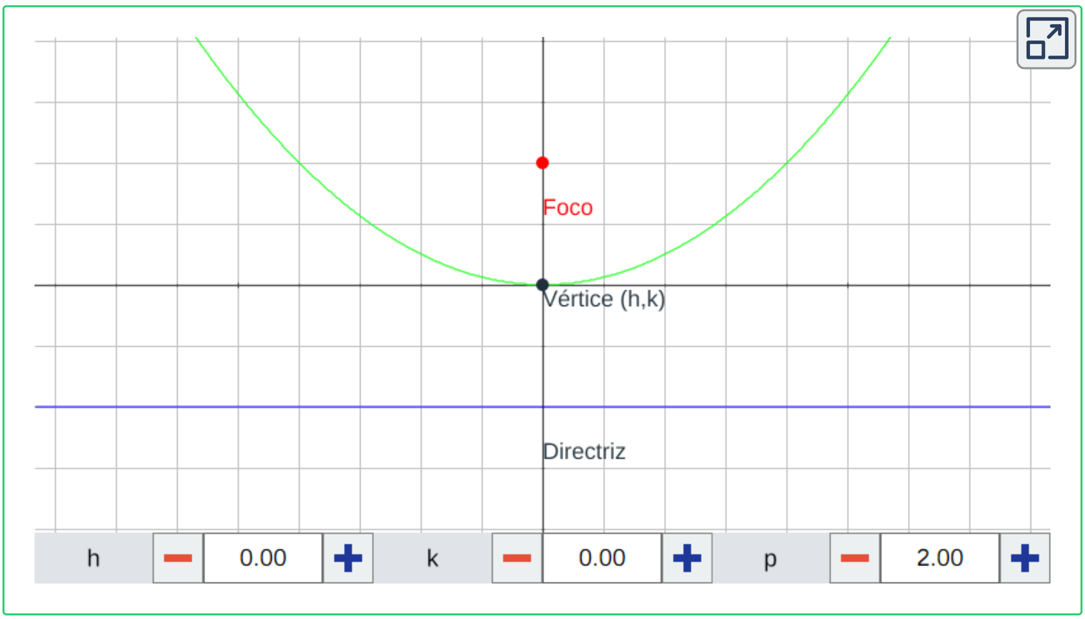


Figura 1.11. Gráfica de una parábola

Para esta parábola, el foco se encuentra directamente arriba del vértice. Entonces, sea una parábola que abre hacia arriba con las coordenadas de su vértice en (h, k) y su foco con coordenadas $(h, k+p)$, tal que p es una constante, la ecuación de la parábola está dada por:

$$y = \frac{1}{4p}(x-h)^2 + k$$

Esta fórmula es la forma estándar de la parábola. En el siguiente interactivo se muestran distintos casos, dependiendo de la dirección en la que se abre la parábola.

Figura 1.12. Ecuaciones de las parábolas, dependiendo de la dirección en la que se abren

1.4.2 Elipses

La elipse es el conjunto de todos los puntos tal que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

En el siguiente interactivo podemos ver la gráfica de una elipse.

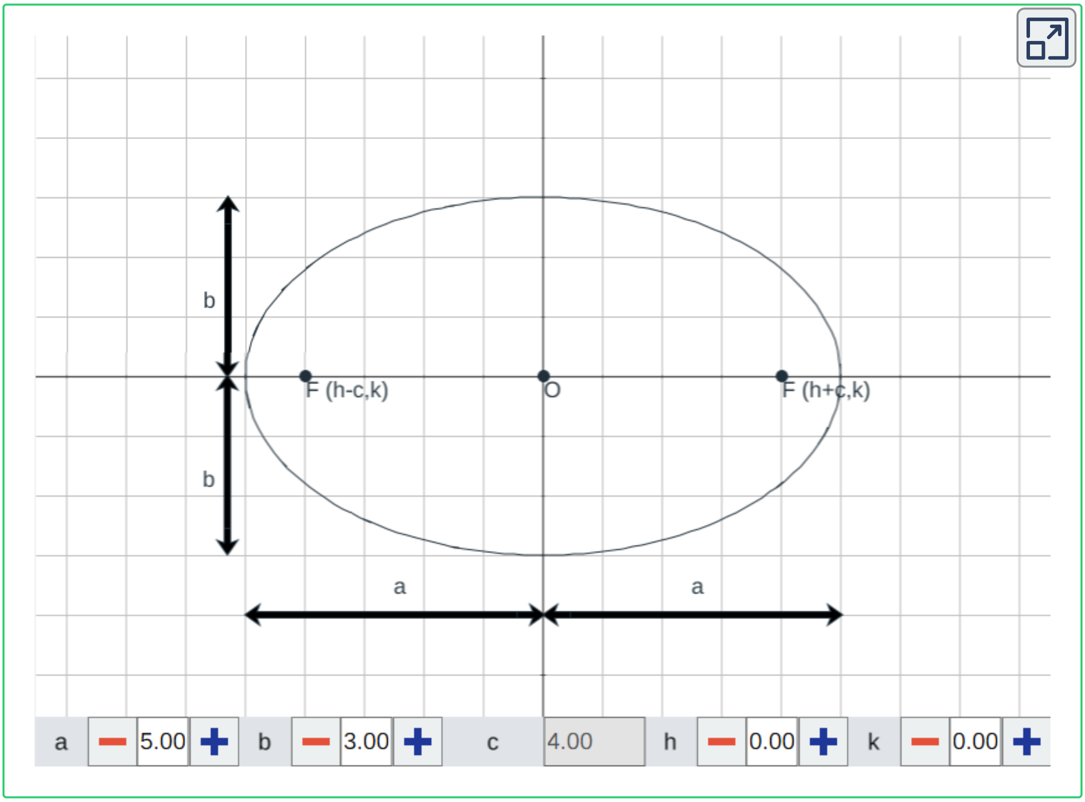


Figura 1.13. Gráfica de una elipse

En la gráfica los focos están marcados con los puntos F, el centro es el punto O con las coordenadas (h, k), el eje horizontal es $2a$ y el eje vertical es $2b$.

El eje mayor es la mayor distancia que atraviesa la elipse y puede ser horizontal o vertical. En este caso la longitud del eje mayor es $2a$. Entonces, sea una elipse con su centro en (h, k), un eje mayor horizontal con longitud $2a$ y un eje menor vertical con longitud $2b$ su ecuación en forma estándar es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sus focos están en $(h \pm c, k)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$. Si el eje mayor es vertical entonces su ecuación se convierte en:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Con sus focos en $(h, k \pm c)$.

1.4.3 Hipérbolas

Una hipérbola es el conjunto de puntos tal que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.
En el siguiente interactivo podemos ver la gráfica de una hipérbola.

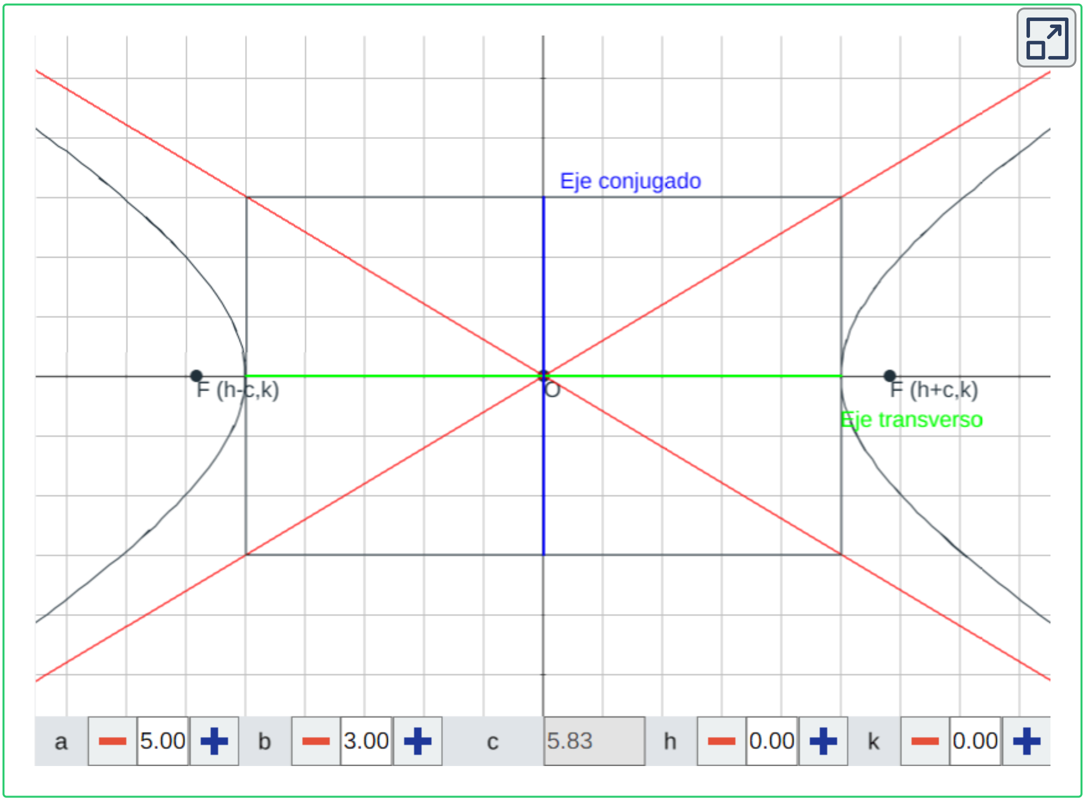


Figura 1.14. Gráfica de una hipérbola

En la gráfica los focos están marcados con los puntos F, el centro es el punto O con las coordenadas (h, k), las asíntotas son rectas tal que su distancia a la curva tiende a cero cuando sus coordenadas tienden a infinito, están marcadas en rojo.

Entonces, sea la hipérbola con centro en (h, k), con su eje transverso mayor que su eje conjugado su ecuación en forma estándar es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

a es la longitud del semieje transverso (horizontal) y b es la longitud del semieje conjugado (vertical). Los focos están en $(h \pm c, k)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. Las ecuaciones de las asíntotas están dadas por $y = k \pm \frac{b}{a}(x - h)$.

Si su eje conjugado es mayor entonces la ecuación de la hipérbola en forma estándar es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Con sus focos en $(h, k \pm c)$. Las ecuaciones de sus asíntotas son: $y = k \pm \frac{a}{b}(x - h)$.

1.5 Polinomios y sus gráficas.

Decimos que una función real $f(x)$ es una función polinomial de grado n, siendo n un número natural, si es de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Con $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}$. Dependiendo del grado de la función polinomial su gráfica cambia, por ejemplo:

- La gráfica de una función polinomial de grado 0
$$f(x) = a_0$$
es una línea horizontal que pasa por $(0, a_0)$.
- Como vimos anteriormente, una función polinomial de grado 1, de la forma
$$f(x) = a_1 x + a_0,\ a_1 \neq 0$$
es una función lineal, su gráfica es una recta.
- La gráfica de una función polinomial de grado 2
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_2 \neq 0$$
es una curva cuadrática, como una parábola.
- La gráfica de una función polinomial de grado 3
$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,\ a_3 \neq 0$$
es una curva cúbica.

- La gráfica de una función polinomial con grado mayor o igual a 2

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0 \text{ y } n \geq 2$$

es una curva continua.

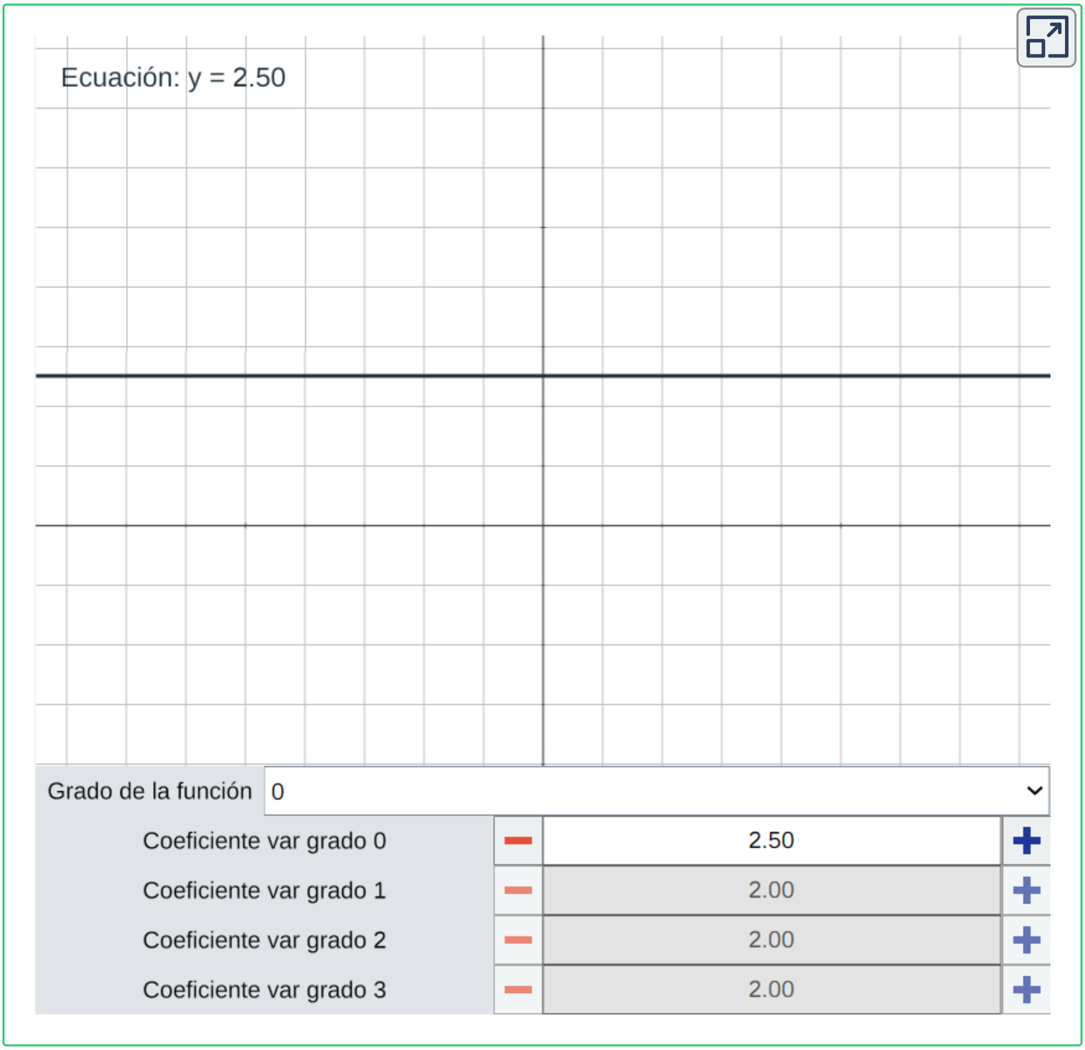


Figura 1.15. Gráficas de funciones polinomiales con distintos grados.

1.6 Función inversa. Gráfica de una función y su inversa.

Sea $f(x)$ una función con dominio D, llamamos imagen al conjunto que está formado por todos los valores que alcanza la función, se puede denotar como Im(f) o $f(D)$.

Entonces, sea $f(x)$ una función con dominio D e imagen $f(D)$ su función inversa es la función f^{-1} con dominio $f(D)$ e imagen D tal que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Para una función f y su inversa f^{-1}, $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en D y $f(f^{-1}(y)) = y$ para toda y en $f(D)$. Decimos que la función inversa "deshace" lo que hizo la función original.

No todas las funciones tienen inversa, las funciones que la tienen se llaman funciones invertibles. Para que una función tenga inversa debe cumplir la propiedad de que cada elemento del dominio tenga un valor distinto al ser evaluado en f y a cada elemento de la imagen le corresponda un sólo elemento del dominio.

Una manera de determinar si una función tiene inversa es observando su gráfica, si trazamos una línea horizontal en el plano no puede intersectar a la gráfica más de una vez, como se muestra en la siguiente figura.

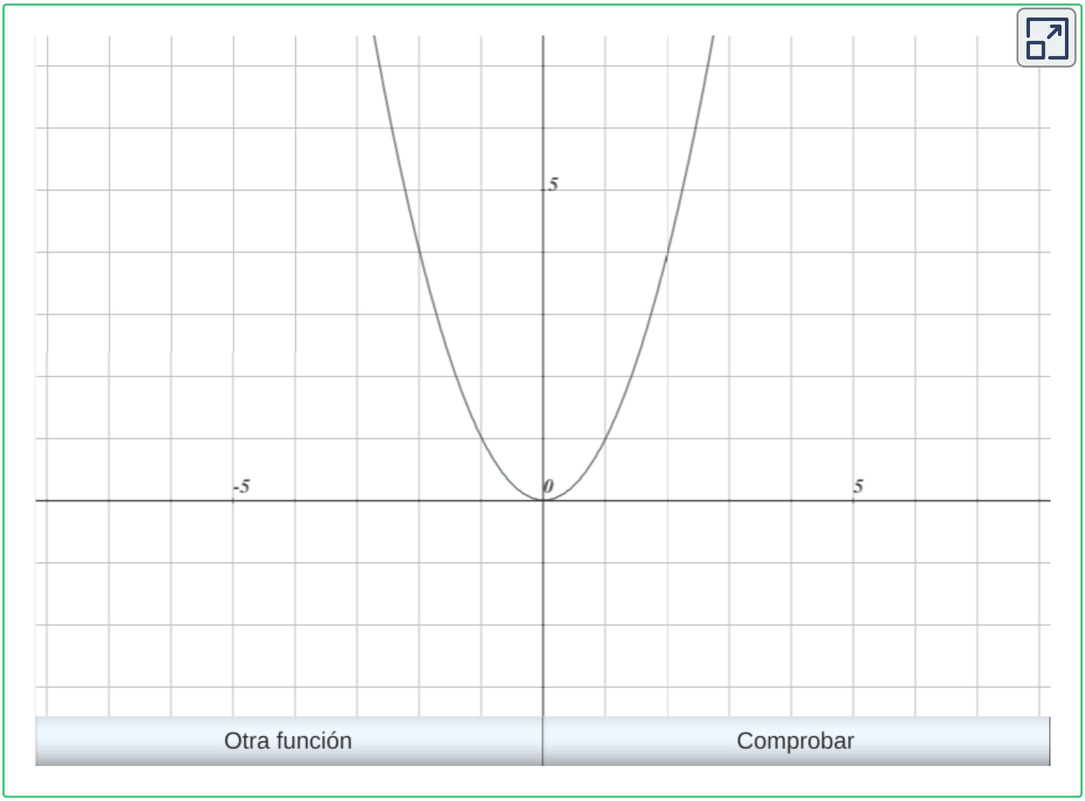


Figura 1.16. Regla de la línea horizontal.

Las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1} son simétricas respecto a la recta $y=x$, un punto (u,v) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (v,u) está en la gráfica de f^{-1} en la siguiente figura se muestran gráficas de funciones con su función inversa correspondiente.

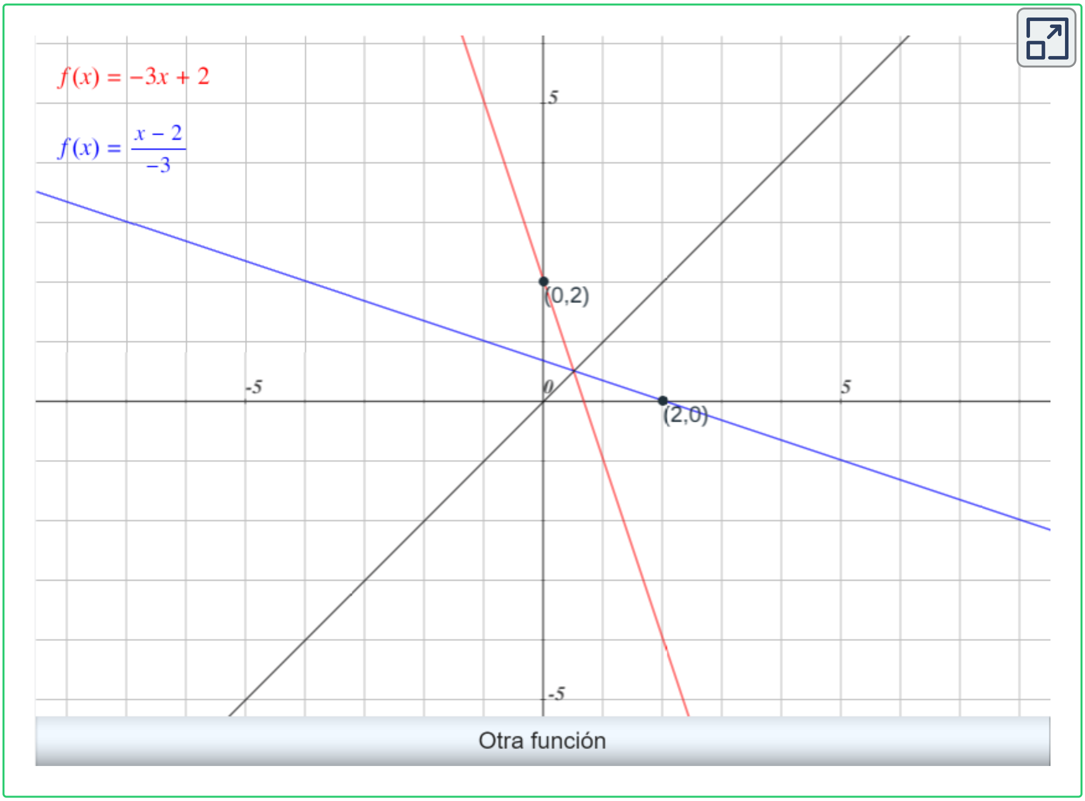


Figura 1.17. Gráfica de una función y su inversa.

Para encontrar la inversa f^{-1} de una función invertible f resolvemos la ecuación $y = f(x)$ para x, con esto obtenemos la ecuación $x = f^{-1}(y)$, intercambiando las variables nos queda $y = f^{-1}(x)$, por ejemplo, para encontrar la inversa de la función $f(x) = \frac{10x+5}{2}$ seguimos los siguientes pasos:

- Sea $f(x) = y, \ y = \frac{10x+5}{2}$
- $2y = 10x + 5$
- $2y - 5 = 10x$
- $x = \frac{2y-5}{10}$

- Como $x = f^{-1}(y)$ tenemos que, $f^{-1}(y) = \frac{2y-5}{10}$
- Reescribimos la función como $f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{10}$

Recordemos que el dominio de f^{-1} es la imagen de f y la imagen de f^{-1} es el dominio de f. En este caso, como el dominio e imagen de f es el intervalo $(-\infty, \infty)$ el dominio e imagen de f^{-1} es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

1.7 Composición de funciones. Transformación de gráficas de funciones.

Sean dos funciones f y g definimos la composición de dos funciones como la función obtenida por la aplicación sucesiva de f y g sobre un mismo elemento x. A esta función la denotamos como $g \circ f$ y se lee como f compuesta con g.

El dominio de $g \circ f$ depende de los dominios de f y g. Notemos que primero aplicamos f al elemento x, por lo tanto x tiene que estar en el dominio de f, y luego aplicamos g sobre $f(x)$, entonces $f(x)$ debe estar en el dominio de g, para que un elemento esté en el dominio de $g \circ f$ debe cumplir las dos condiciones anteriores.

La composición de funciones tiene las siguientes propiedades:

- Es no conmutativa, $f \circ g \neq g \circ f$.
- Es asociativa, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- El elemento neutro es la función identidad, $f \circ I = I \circ f = f$.

Por ejemplo, sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 5x + 2$. f compuesta con g sería igual a

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x^3) = 5x^3 + 2$$

Mientras que g compuesta con f sería

$$f \circ g = f(g(x)) = f(5x + 2) = (5x + 2)^3$$

Notemos que al cambiar el orden de las funciones obtenemos un resultado diferente ya que la composición de funciones no es conmutativa.

Podemos aplicar operaciones a una función $f(x)$ para cambiar su gráfica, a esto le llamamos transformaciones de una función. La transformación dependerá de la función aplicada, los tipos de transformaciones son traslación, reflexión, expansión y contracción.

1.7.1 Traslación

La traslación es un tipo de transformación que cambia la posición de la gráfica de una función, podemos moverla horizontal o verticalmente. Para mover la gráfica verticalmente le sumamos una constante a la coordenada y de la función, la gráfica se moverá hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si la constante es negativa. Para mover horizontalmente la gráfica de una función le sumamos una constante a la coordenada x de la función, si la constante es positiva la gráfica se moverá a la izquierda y si es negativa la gráfica se moverá a la derecha.

Por ejemplo, la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2$ es la gráfica de la función $f(x) = x^2$ desplazada dos unidades hacia arriba, y la gráfica de la función $f(x) = (x+2)^2$ es la gráfica de la función $f(x) = x^2$ desplazada dos unidades hacia la izquierda.

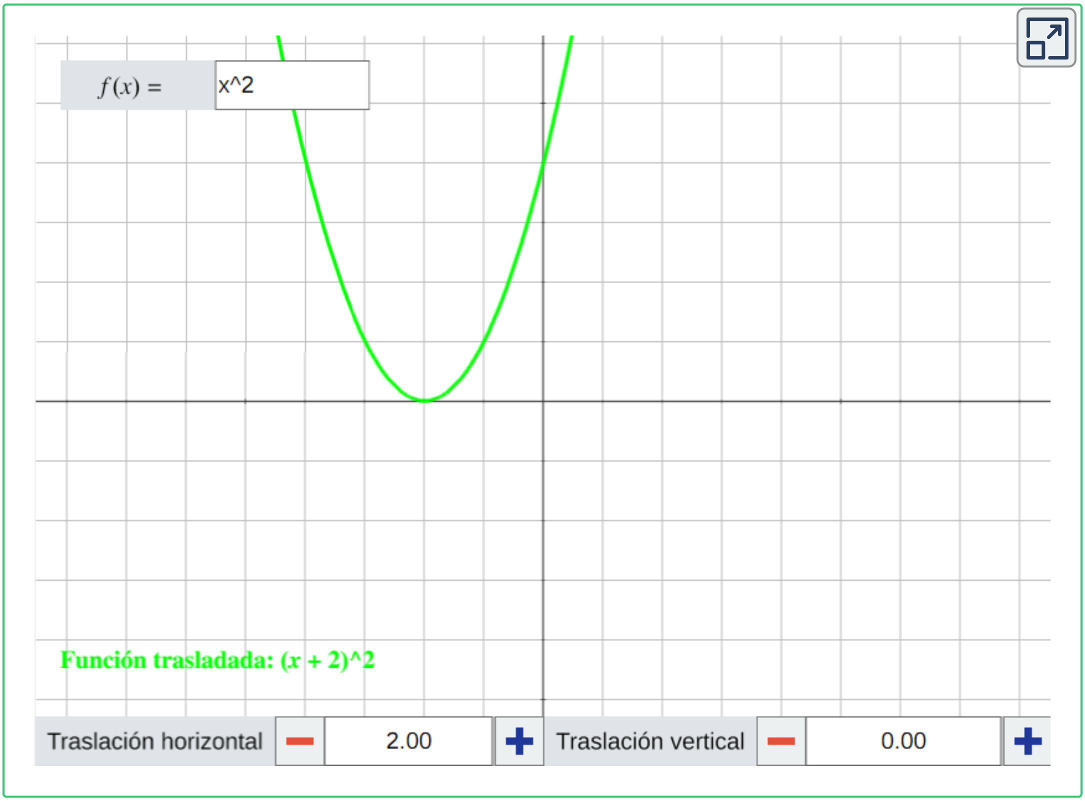


Figura 1.18. Traslación de la gráfica de una función.

1.7.2 Reflexión

La reflexión es una transformación para obtener la imagen espejo de la gráfica de una función, existen dos tipos de reflexión: horizontal y vertical. Para obtener la reflexión vertical de la gráfica de una función multiplicamos la coordenada y de la función por -1, el resultado es la función simétrica respecto al eje x. Para obtener la reflexión horizontal multiplicamos la coordenada x de la función por -1, el resultado es la función simétrica respecto al eje y.

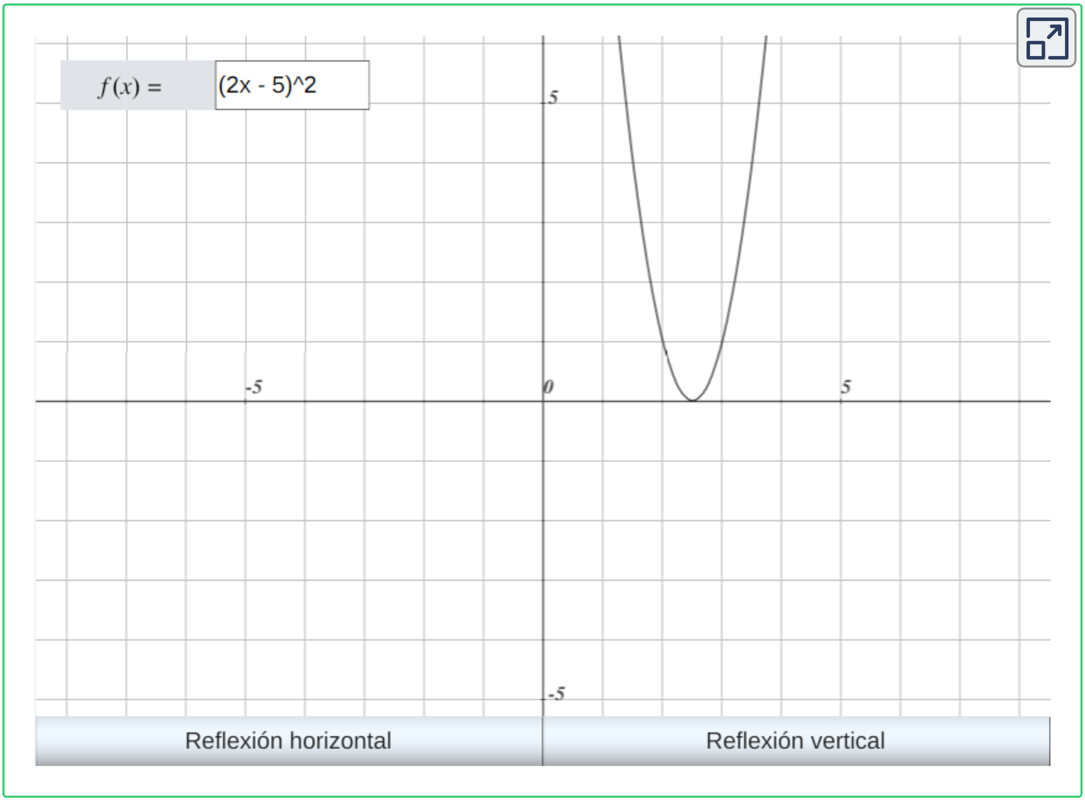


Figura 1.19. Reflexión de la gráfica de una función.

1.7.3 Expansión y contracción

Si multiplicamos una función por una constante c podemos expandir o contraer su gráfica.

- Si $c > 1$ obtenemos una expansión vertical.
- Si $0 < c < 1$ obtenemos una contracción vertical.
- Si $c < 0$ obtenemos una combinación de expansión o contracción con una reflexión vertical.

Si multiplicamos la coordenada x de una función por una constante c obtenemos una expansión o contracción horizontal.

- Si $c > 1$ obtenemos una contracción horizontal.
- Si $0 < c < 1$ obtenemos una expansión horizontal.
- Si $c < 0$ obtenemos una combinación de expansión o contracción horizontal con una reflexión horizontal.

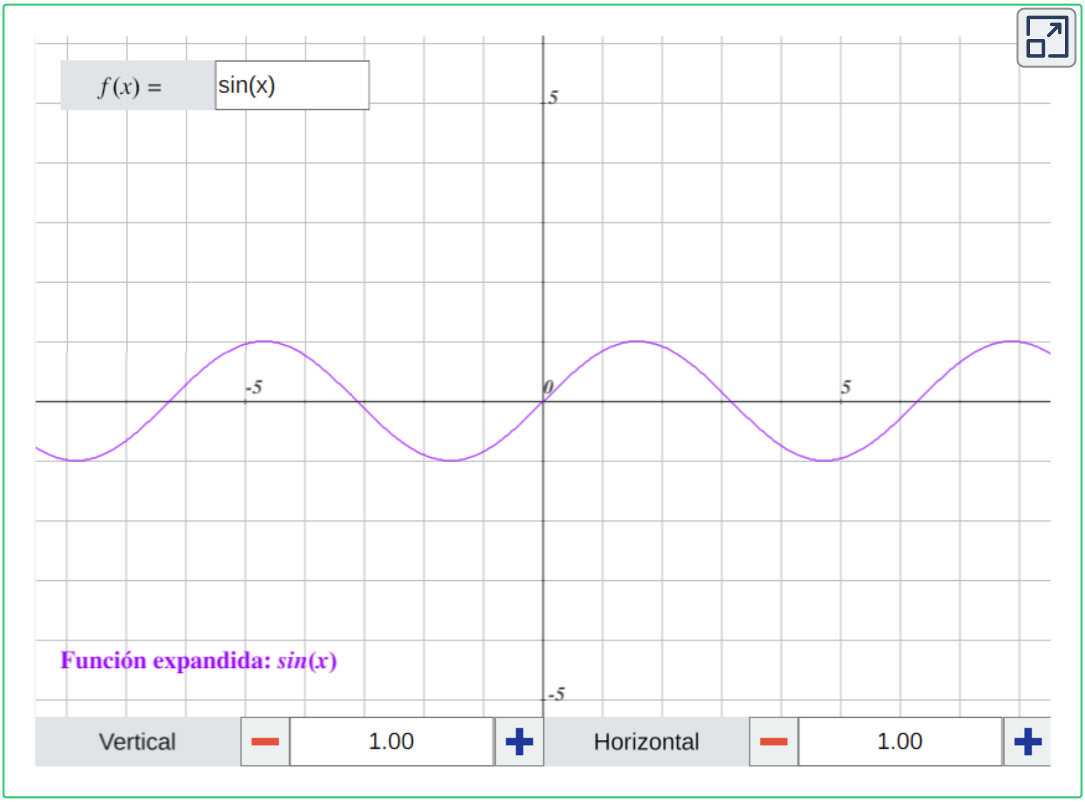


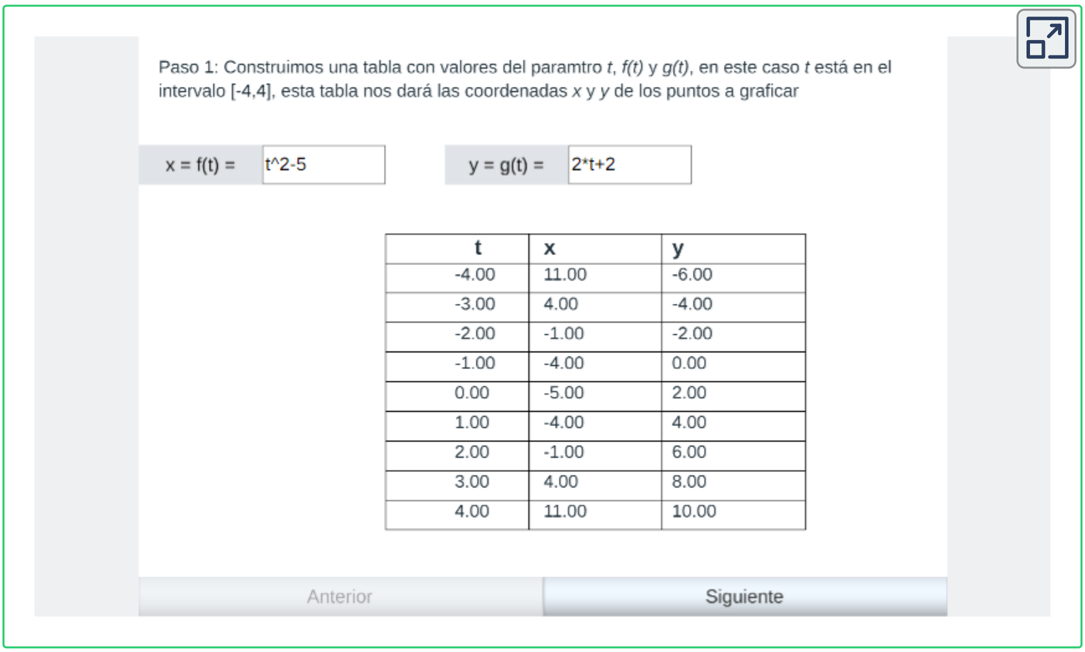
Figura 1.20. Expansión y contracción de la gráfica de una función.

1.8 Curvas y su representación paramétrica.

Existen curvas que no pueden ser definidas con una sola función en términos de x y y, para describir este tipo de curvas son útiles las ecuaciones paramétricas. Las ecuaciones paramétricas de una curva consisten en un par de funciones:

$$x = f(t), \;\; y = g(t)$$

En vez de definir x en términos de y o y en términos de x, x y y dependen de una variable llamada parámetro que usualmente denotamos con la letra t. Cada valor del parámetro t nos da valores de un punto $(x, y) = (f(t), g(t))$. Los puntos obtenidos por todos los valores de t forman la gráfica de la ecuación paramétrica llamada curva paramétrica.



t	x	y
-4.00	11.00	-6.00
-3.00	4.00	-4.00
-2.00	-1.00	-2.00
-1.00	-4.00	0.00
0.00	-5.00	2.00
1.00	-4.00	4.00
2.00	-1.00	6.00
3.00	4.00	8.00
4.00	11.00	10.00

Figura 1.21. Pasos para graficar una curva paramétrica.

Podemos eliminar el parámetro y obtener una sola ecuación a partir de un par de ecuaciones paramétricas. Para eliminar el parámetro seguimos los siguientes pasos.

Supongamos que tenemos las siguientes dos ecuaciones paramétricas:

$$x = f(t) = t^2 - 5, \quad y = g(t) = 2t + 2, \quad 1 \leq t \leq 3$$

Despejamos t en $f(t)$:

$$t = \sqrt{x+5}$$

Sustituimos t en $g(t)$:

$$y = 2(\sqrt{x+5}) + 2$$

Tenemos una restricción en el dominio por los límites en el parámetro t. Cuando $t = 1$, $x = 1^2 - 5 = -4$ y cuando $t = 3$, $x = 3^2 - 5 = 4$.

Al eliminar el parámetro obtenemos una sola ecuación que sólo depende de las variables x y y.

También podemos determinar un par de ecuaciones paramétricas a partir de una sola ecuación, a este proceso le llamamos parametrización de la curva.

Por ejemplo, si tenemos la función

$$f(x) = 5x + 2$$

Podemos definir la primera ecuación como

$$x = f(t) = t$$

Para obtener la segunda ecuación reemplazamos x por t en la función

$$y = g(t) = 5t + 2$$

Notemos que esta parametrización no es única, una curva puede ser representada por 2 o más pares de ecuaciones paramétricas.

Capítulo II
Derivada de funciones reales de una variable real

2.1 Razón de cambio promedio.

La razón de cambio promedio de una función f en el intervalo $[a, b]$ es la medida de cuanto cambio la función por unidad en promedio sobre el intervalo $[a, b]$ y esta dada por la fórmula:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La razón de cambio promedio es la pendiente de la recta que pasa por los puntos extremos del intervalo.

Por ejemplo, podemos calcular el cambio promedio del precio de la gasolina a través de un periodo de tiempo. En la siguiente tabla se muestra el año y el costo de la gasolina en ese año.

Año	Precio
2010	8.66
2011	9.62
2012	10.70
2013	12.01
2014	12.86
2015	13.12
2016	14.81

Vemos que de 2010 a 2016 la gasolina aumentó 6.15 y el cambio promedio fue:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2016) - f(2010)}{2016 - 2010} = \frac{6.15}{6} = 1.025$$

Esto significa que en promedio la gasolina aumentó $\$1.025$ al año.

En el siguiente interactivo observa como aumenta o disminuye la razón de cambio promedio de la función dependiendo del intervalo $[a, b]$.

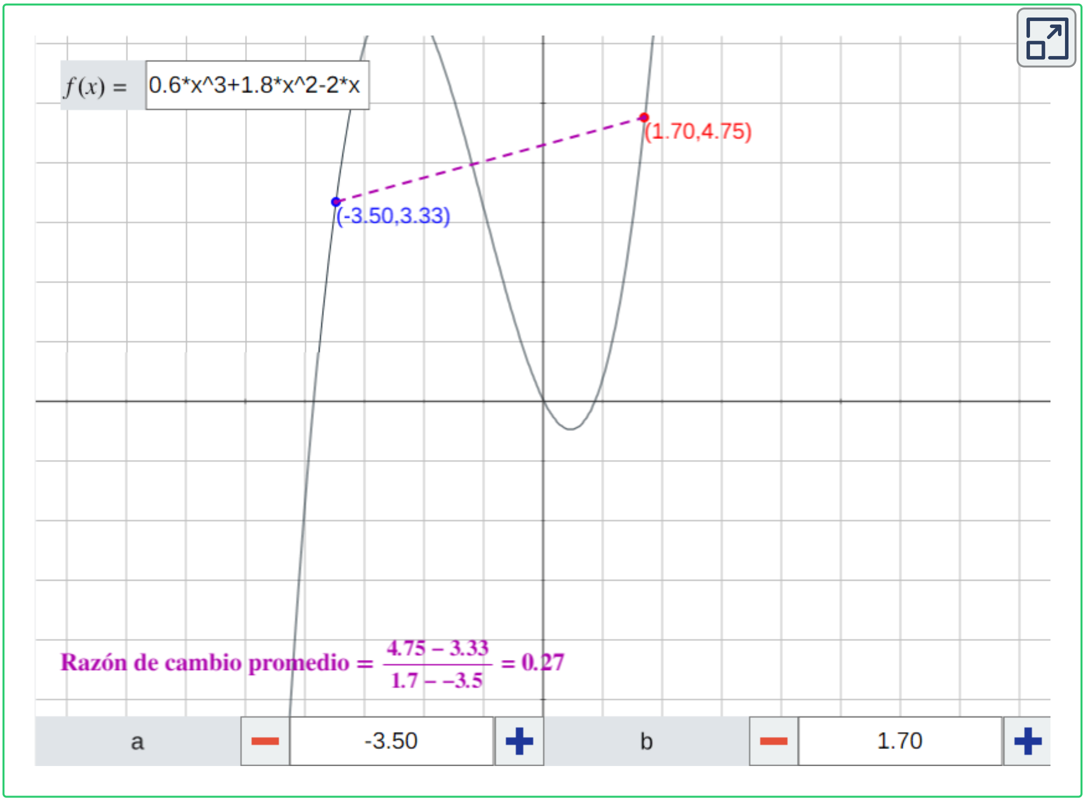


Figura 2.1. Razón de cambio promedio.

2.2 Límites.

Sean $a, L \in \mathbb{R}$, decimos que el límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L si podemos hacer que el valor de $f(x)$ se acerque a L tanto como se desee, tomando un valor de x suficientemente cercano a a (sin ser x igual a a), se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

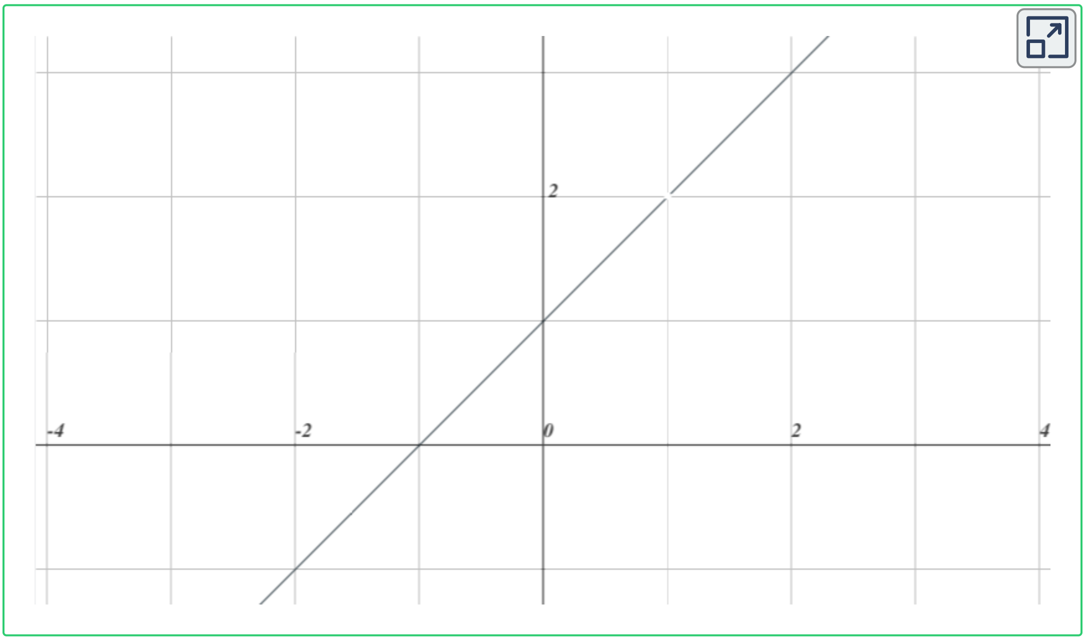


Figura 2.2. Límite de una función.

Vemos que x no puede ser igual a 1 porque estaríamos dividiendo entre 0.

Entre más se acerca x a 1 por la derecha o por la izquierda $f(x)$ se acerca más a 2, lo escribimos como

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Pero, $f(x)$ no está definido para $x = 1$ esto significa que 1 no está en el dominio de la función.

El valor de x se puede acercar a a por la derecha o por la izquierda. En la siguiente tabla vemos los valores que toma $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ al acercarse x a 1.

	Valores que se acercan por la izquierda				Valores que se acercan por la derecha		
x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	Indefinido	2.0009	2.01	2.1

Decimos que un límite es un límite por la izquierda si $x < a$, lo escribimos como

$$\lim_{x^-\to a} f(x) = L$$

Y un límite es un límite por la derecha si $x > a$, lo escribimos como

$$\lim_{x^+\to a} f(x) = L$$

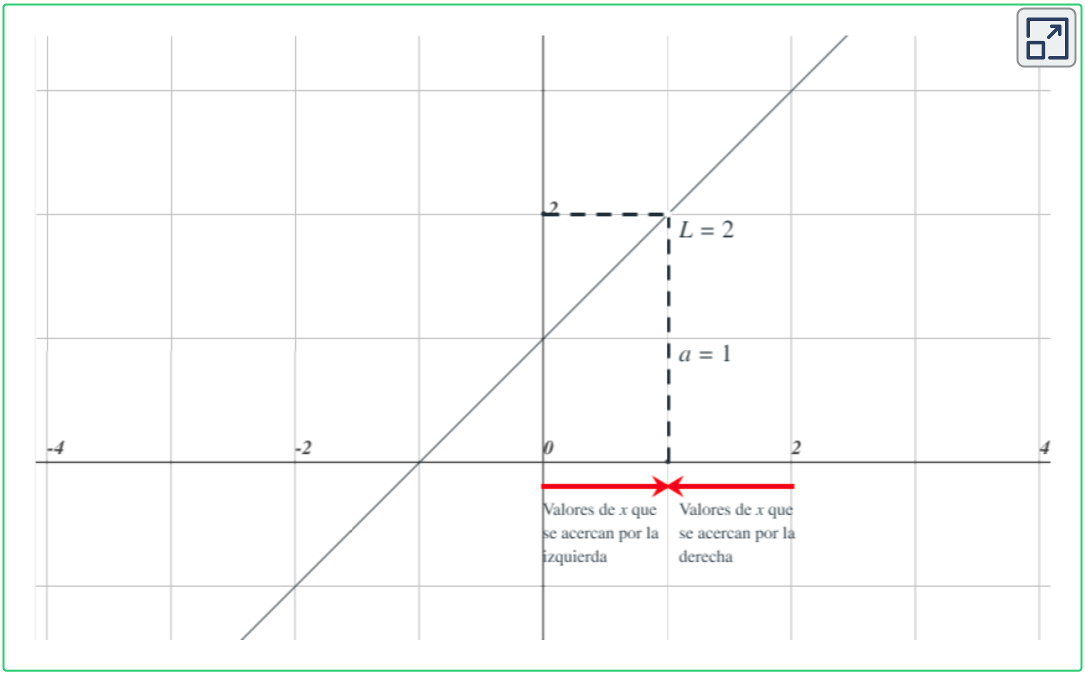


Figura 2.3. Límites por la izquierda y por la derecha.

Si el límite por la izquierda de una función cuando x tiende a a es igual al límite por la derecha, lo llamamos límite por ambos lados, o simplemente límite. Si los límites son distintos o alguno de ellos no existe decimos que no existe el límite.

2.2.1 Límites al infinito

Decimos que una variable x tiende al infinito si toma valores arbitrariamente grandes, es decir $x > r, \forall r \in \mathbb{R}$, y lo denotamos como $x \to \infty$. En cambio, si x toma valores arbitrariamente pequeños, $x < r, \forall r \in \mathbb{R}$, decimos que x tiende a menos infinito y lo denotamos como $x \to -\infty$.

Por ejemplo, consideremos la siguiente tabla de valores para la función $f(x) = \frac{1}{x}$

x	f(x)
10	0.1
100	0.001
1000	0.0001
10000	0.00001
100000	0.000001
1000000	0.0000001

Vemos que, conforme x aumenta su valor, $f(x)$ va disminuyendo y acercándose cada vez más a 0, por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

Decimos que una función $f(x)$ tiende a infinito si su valor aumenta indefinidamente conforme los valores de x se acercan al valor a, lo denotamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Si el valor de $f(x)$ disminuye indefinidamente entonces decimos que tiende a menos infinito y lo denotamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

2.2.2 Propiedades de los límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones y $k \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades

Límite de	Expresión
Una constante	$\lim_{x \to c} k = k$
El producto de una función y una constante	$\lim_{x \to c} k f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
Suma de funciones	$\lim_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
Resta de funciones	$\lim_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
Producto de funciones	$\lim_{x \to c}(f(x) * g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) * \lim_{x \to c} g(x)$
Cociente de funciones	$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}, \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
Una potencia	$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x)^{\lim_{x \to c} g(x)}, f(x) > 0$

2.3 Razón de cambio en la naturaleza.

2.3.1 Velocidad media

La velocidad media de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento durante un intervalo de tiempo.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

El siguiente interactivo muestra la gráfica de la posición de un objeto en relación al tiempo, mueve los puntos azules para cambiar los valores de t_0 y t_1 y observa como cambia el valor de la velocidad promedio dependiendo del intervalo de tiempo.

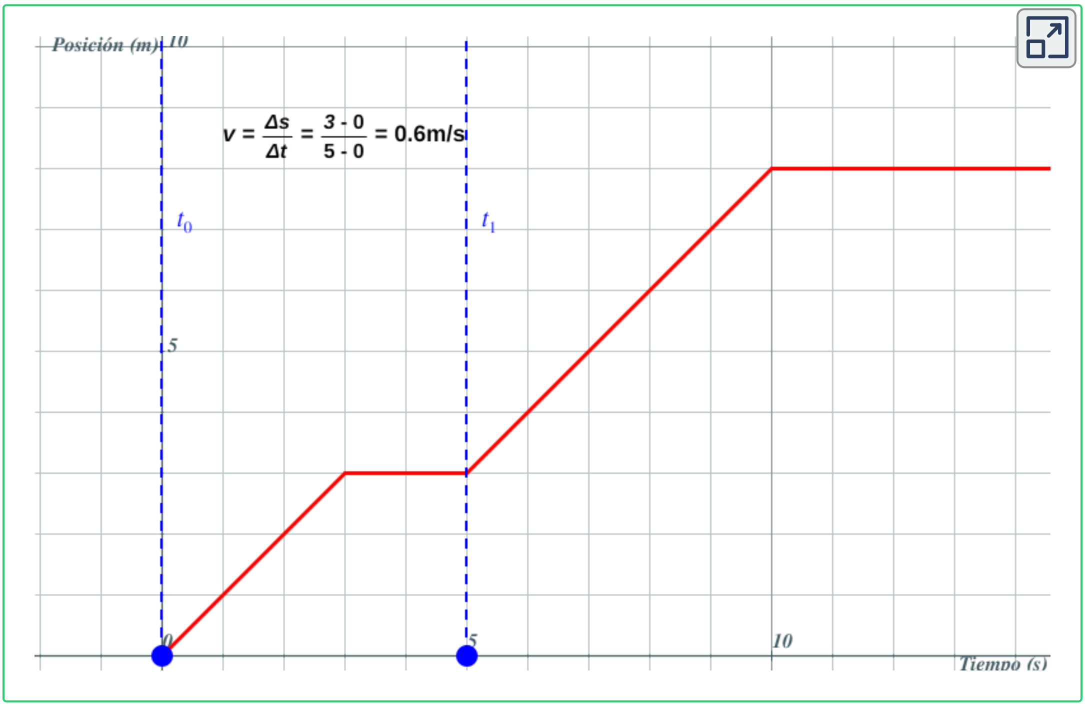


Figura 2.4. Velocidad media

2.3.2 Velocidad de reacción

La velocidad de reacción de una reacción química es la medida del cambio de concentración de los reactantes o el cambio de concentración de los productos por unidad de tiempo.

$$\text{Velocidad de reacción} = \frac{\Delta \text{Concentración}}{\Delta \text{Tiempo}}$$

2.3.3 Capacidad calorífica de un cuerpo

La capacidad calorífica de un cuerpo es la cantidad de calor necesaria para aumentar la temperatura de un cuerpo en una unidad y esta dada por el límite

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

ΔQ es la cantidad de calor aplicada al cuerpo necesaria para aumentar su temperatura en ΔT.

2.3.4 Dilatación de un cuerpo

La dilatación de un cuerpo por calentamiento o dilatación térmica es el aumento de alguna dimensión de un cuerpo debido al aumento de temperatura, existen tres tipos: dilatación lineal, dilatación superficial y dilatación cúbica. La dilatación lineal ocurre cuando la variación predomina en una única dimensión, esta dilatación ocurre en cuerpos como: varillas, vías del tren, alambres, etc. Está dada por la fórmula:

$$L_F = L_0(1 + \lambda * \Delta T)$$

Donde L_F y L_0 son la longitud final e inicial y λ es el coeficiente de dilatación lineal. La dilatación superficial ocurre cuando aumenta la superficie de un cuerpo, es decir, cuando sus dos dimensiones se incrementan en la misma proporción, esta dilatación ocurre en cuerpos como láminas. Está dada por la fórmula:

$$S_F = S_0(1 + \sigma * \Delta T)$$

Donde S_F y S_0 son la superficie final e inicial y σ es el coeficiente de dilatación superficial.

La dilatación cúbica ocurre cuando las tres dimensiones de un cuerpo aumentan en la misma proporción.

Esta dada por la fórmula:

$$V_F = V_0(1 + \gamma * \Delta T)$$

Donde V_F y V_0 son el volumen final e inicial y γ es el coeficiente de dilatación cúbica.

2.3.5 Difusión

La difusión es un proceso que consiste en el movimiento de moléculas dentro de un material de una región de alta concentración a una región de baja concentración. La velocidad en la que las moléculas se difunden por un material está dada por la primera ley de Flick:

$$J = -D\left(\frac{d}{dx}c\right)$$

Donde J es el flujo, D es el coeficiente de difusión y $\frac{d}{dx}c$ es el gradiente de concentración.

2.4 Tangente a una curva. Cónicas.

Como vimos anteriormente, la razón de cambio promedio es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos extremos del intervalo. A esta recta la llamamos la recta secante.

La recta tangente es una línea recta que sólo toca a la curva en un punto. La pendiente de la tangente de una función en un punto a es igual a la derivada de la función en a que es igual a la razón de cambio instantánea de la función en a.

En el siguiente interactivo se muestran los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a+h))$, observa que, al acercarse h a 0 los puntos conectados por la recta secante se acercan uno al otro y la recta secante se convierte en la recta tangente.

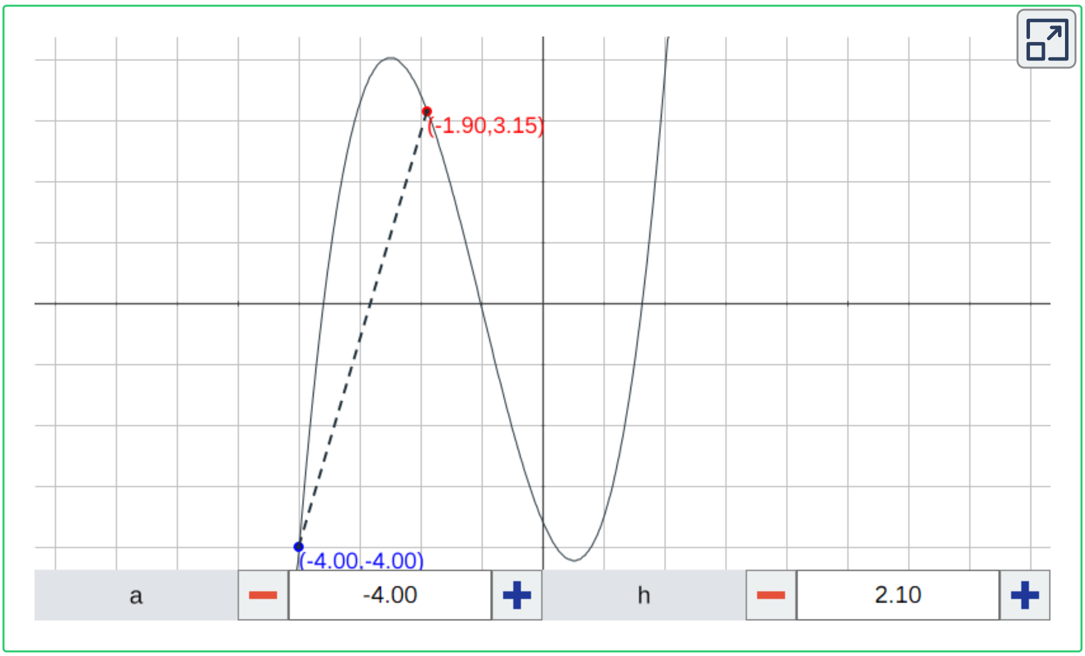


Figura 2.5. Tangente a una curva.

2.4.1 Tangentes a secciones cónicas

Para obtener la ecuación de la tangente de una sección cónica en el punto (x_1, y_1) reemplazamos x^2 en la ecuación de la cónica por xx_1, y^2 por yy_1, $2xy$ por $xy_1 + x_1y$, $2x$ por $x + x_1$ y $2y$ por $y + y_1$. A continuación veremos como obtener la ecuación de la recta tangente a una sección cónica a partir de su ecuación estándar.

2.4.2 Tangente a una parábola

La ecuación de la parábola en su forma estándar es:

$$y = \frac{1}{4p}(x-h)^2 + k$$

Realizamos operaciones para poder hacer la sustitución:

$$2y = \frac{1}{2p}(x-h)^2 + 2k$$

$$2y = \frac{1}{2p}(x^2 - 2xh + h^2) + 2k$$

Al realizar la sustitución tenemos que la ecuación de la tangente es:

$$y + y_1 = \frac{1}{2p}(xx_1 - (x + x_1)h + h^2) + 2k$$

En el siguiente interactivo mueve el punto azul para cambiar las coordenadas (x_1, y_1) de la recta tangente.

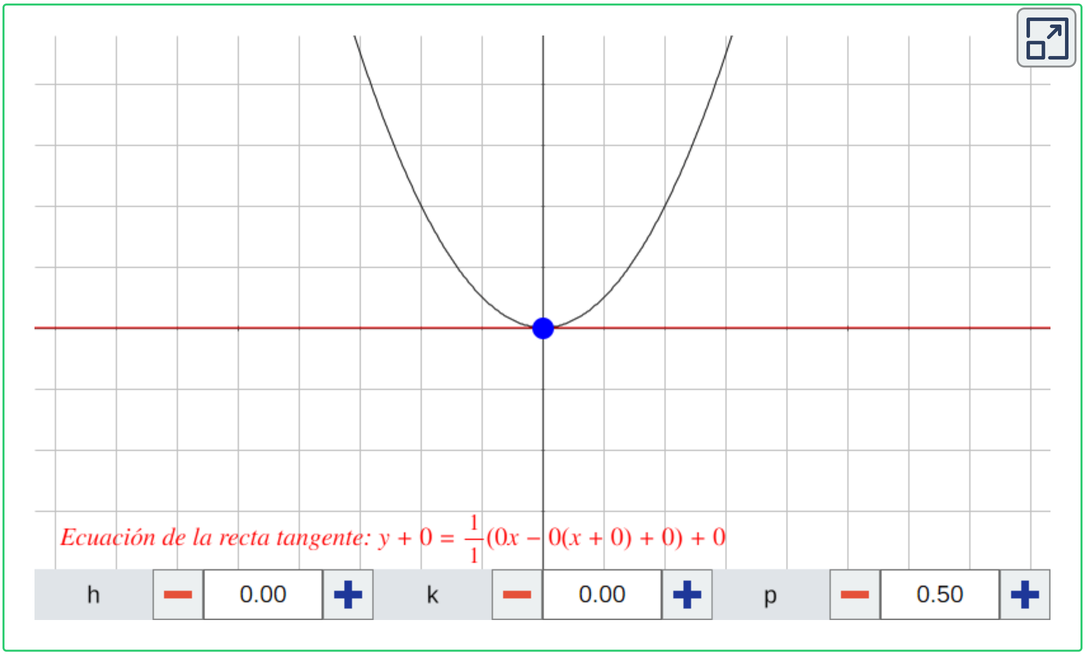


Figura 2.6. Tangente a una parábola.

2.4.3 Tangente a una elipse

La ecuación de la elipse en su forma estándar es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Escribiéndola de otra manera:

$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1$$

Realizando la sustitución nos queda que la ecuación de la recta tangente a una elipse es:

$$\frac{xx_1 - (x + x_1)h + h^2}{a^2} + \frac{yy_1 - (y + y_1)k + k^2}{b^2} = 1$$

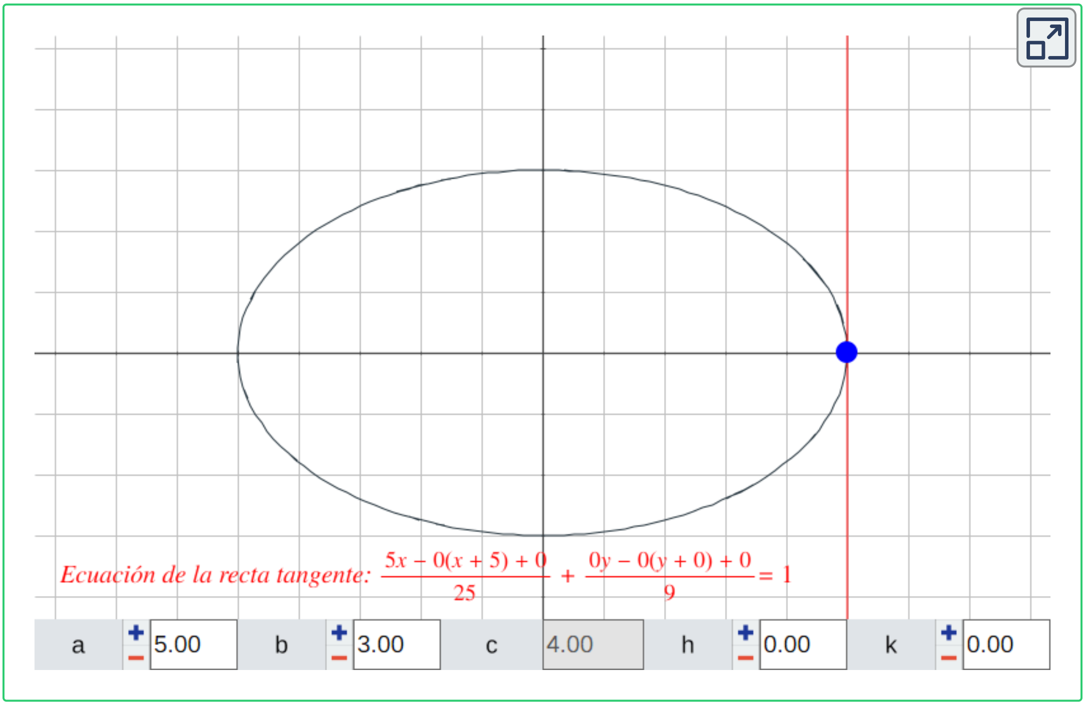


Figura 2.7. Tangente a una elipse.

2.4.4 Tangente a una hipérbola

La ecuación de la hipérbola en su forma estándar es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Escribiéndola de otra manera:

$$\frac{x^2 - 2xh + h^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1$$

Realizando la sustitución nos queda que la ecuación de la recta tangente a una hipérbola es:

$$\frac{xx_1-(x+x_1)h+h^2}{a^2}-\frac{yy_1-(y+y_1)k+k^2}{b^2}=1$$

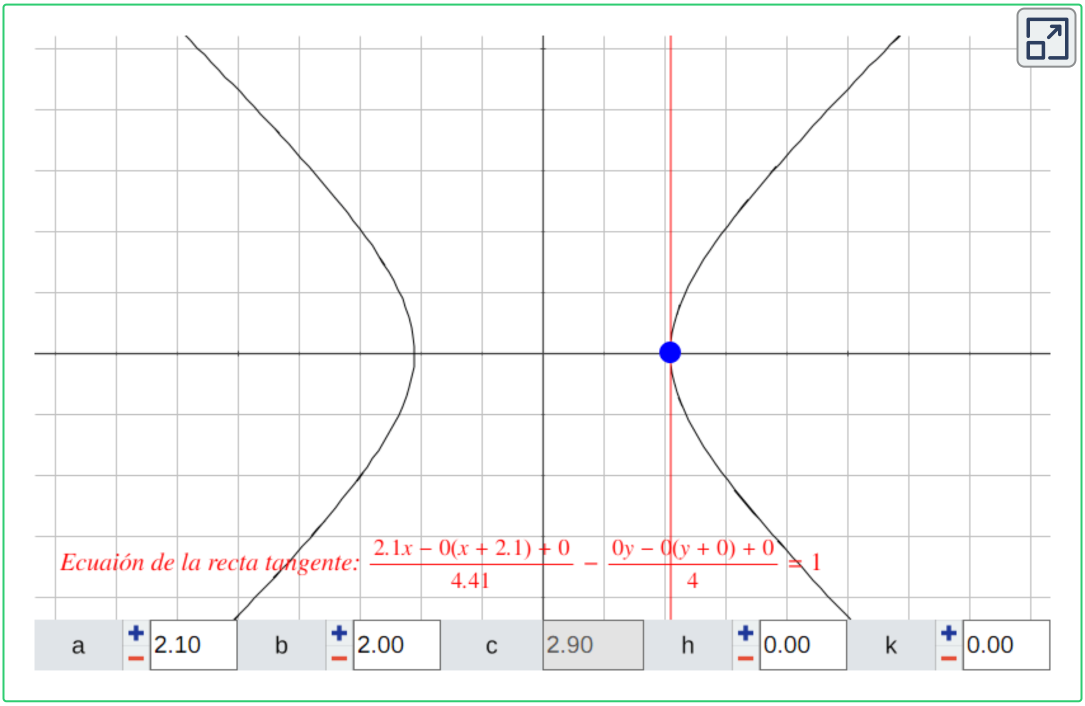


Figura 2.8. Tangente a una hipérbola.

2.5 Derivada. Cálculo de la derivada de algunas funciones simples.

Recordemos que la pendiente de la recta tangente de una función en un punto nos da la razón de cambio instantánea en ese punto, que es igual a la derivada de la función en ese punto. La definición formal de la derivada es la siguiente:

Sea una función f. La derivada de f, denotada por f' es la función cuyo dominio consiste de los valores de x tal que existe el límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Decimos que una función $f(x)$ es diferenciable en a si existe $f'(a)$. Una función es diferenciable en el conjunto S si es diferenciable en todos los puntos de S, y una función diferenciable es una función tal que $f'(x)$ existe en su dominio.

También podemos denotar la derivada de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dx}y$$

A esta notación la llamamos notación de Leibniz y se lee como: "la derivada de y respecto a x". Por ejemplo, otra forma de escribir $y' = 2x$ sería $\frac{d}{dx}y = 2x$.

2.5.1 Derivada de algunas funciones simples

- La derivada de una constante c es igual a 0.

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

- La derivada de la función identidad es igual a 1.

$$\frac{d}{dx}x = 1$$

- Sea $n \in \mathbb{N}$, la derivada de $f(x) = x^n$ es

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- La derivada de la función seno es igual a la función coseno.

$$\frac{d}{dx}sin(x) = cos(x)$$

- La derivada de la función coseno es igual a la función -seno.

$$\frac{d}{dx}cos(x) = -sin(x)$$

- La derivada de la función tangente es igual a la función secante al cuadrado.

$$\frac{d}{dx}tan(x) = sec^2(x)$$

- La derivada de la función exponencial es igual a la función exponencial.

$$\frac{d}{dx}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$$

- La derivada de la función logarítmica es igual a $\frac{1}{x}$.

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

2.6 Propiedades de la derivada.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables, la derivada tiene las siguientes propiedades.

2.6.1 Derivación de suma o resta de funciones

La derivada de la suma o resta de funciones es igual a

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Demostración: Usando la definición de derivada tenemos que

$$(f(x) + g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

Que es igual a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h}$$

Lo separamos en dos fracciones recordando que el límite de una suma es igual a la suma de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Que es igual a la definición de la derivada para $f(x)$ y $g(x)$

$$f'(x) + g'(x)$$

2.6.2 Derivación de multiplicación de funciones

La derivada de la multiplicación de funciones es igual a

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Demostración: Iniciamos con la definición de derivada

$$(fg)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Agregamos el término $f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

Separamos el límite en dos fracciones

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Usando la propiedad de límites de multiplicación de funciones tenemos

$$(\lim_{h\to 0} f(x+h))(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}) + (\lim_{h\to 0} g(x))(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h})$$

Que es igual a

$$(f(x))(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}) + (g(x))(\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h})$$

Los límites son igual a la derivada de $g(x)$ y $f(x)$, por lo tanto

$$(fg)' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

2.6.3 Derivación de cociente de funciones

La derivada del cociente de funciones es igual a

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Demostración: Utilizando la definición de derivada

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

Agregamos el término $f(x)g(x) - f(x)g(x)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}$$

Reescribimos el cociente

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Separamos el cociente y factorizamos

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left((g(x))\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-(f(x))\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

Usando las propiedades de los límites

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left((g(x))\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-(f(x))\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\lim_{h\to 0}\left((g(x))\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-(f(x))\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)}\left(\lim_{h\to 0}(g(x))\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}(f(x))\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$=\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)}\left(\lim_{h\to 0}(g(x))\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}(f(x))\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

Aplicando los límites tenemos que

$$\frac{1}{g(x)g(x)}\left((g(x))\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-(f(x))\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$\frac{1}{g(x)^2}(g(x)f'(x)-f(x)g'(x))$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

2.7 Crecimiento y decrecimiento de una función. Máximos y mínimos.

Sea $f(x)$ una función y $[a,b]$ un intervalo en el dominio de $f(x)$.

Decimos que $f(x)$ es creciente en $[a,b]$ si para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

Decimos que $f(x)$ es decreciente en $[a,b]$ si para cualquier $x_1, x_2 \in [a,b]$ tal que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

En el siguiente ejemplo observemos la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 5x + 3$

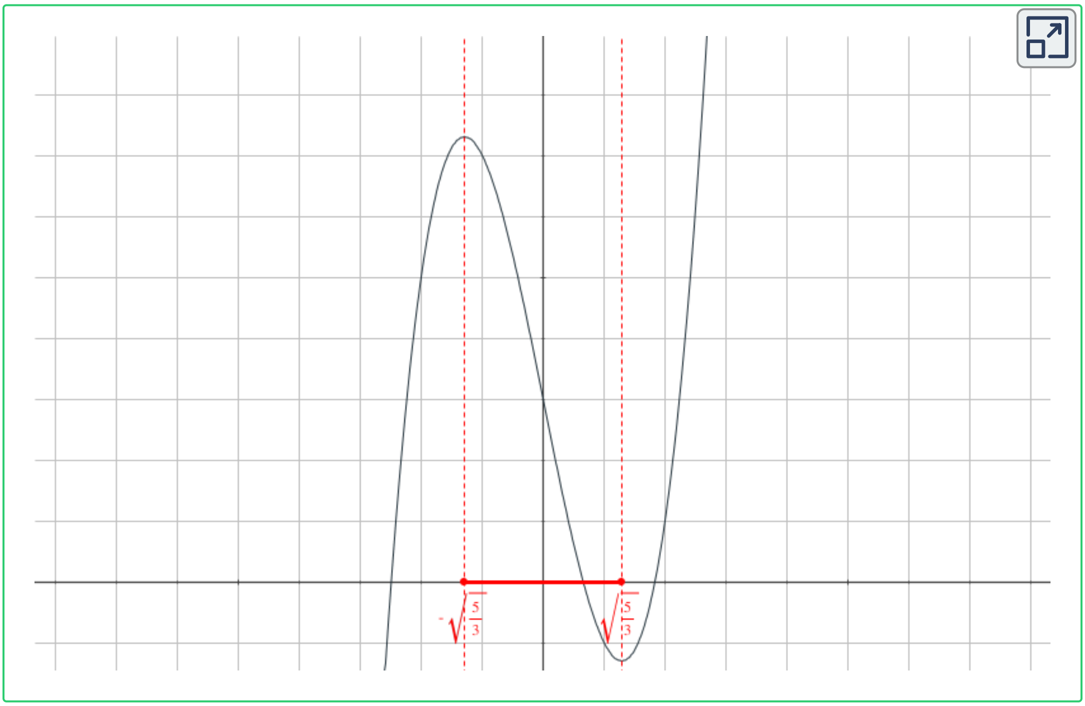


Figura 2.9. Crecimiento y decrecimiento de una función.

La función es creciente en los intervalos $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}]$ y $[\sqrt{\frac{5}{3}}, \infty]$, y es decreciente en el intervalo $[-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}]$.

Podemos saber si una función es creciente o decreciente en un intervalo utilizando su derivada. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b),

- Si $f'(x) > 0$ en (a, b) entonces $f(x)$ es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ en (a, b) entonces $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$.

Utilizando el ejemplo anterior, la derivada de la función $f(x) = x^3 - 5x + 3$ es $f'(x) = 3x^2 - 5$, calculamos las raíces de la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0$$

$$3x^2 = 5$$

$$x^2 = \frac{5}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

Las dos raíces son $x_1 = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}}$, con las raíces obtenemos tres intervalos: $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}})$, $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$, $(\sqrt{\frac{5}{3}}, \infty)$. Para saber si la función es creciente o decreciente en cada uno de los intervalos escogemos un punto que pertenezca a cada uno de los intervalos y calculamos $f'(x)$ en ese punto.

Para el primer intervalo escogemos el valor $x_0 = -2$

$$f'(x_0) = 3(-2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$$

Por lo tanto la función es creciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}})$.

Para el segundo intervalo escogemos el valor $x_0 = -1$

$$f'(x_0) = 3(-1)^2 - 5 = 3 - 5 = -2$$

Por lo tanto la función es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$.

Para el tercer intervalo escogemos el valor $x_0 = 2$

$$f'(x_0) = 3(2)^2 - 5 = 12 - 5 = 7$$

Por lo tanto la función es creciente en el intervalo $(\sqrt{\frac{5}{3}}, \infty)$.

De esta forma podemos calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función sin necesidad de utilizar su gráfica.

2.7.1 Máximos y mínimos

Sea $f(x)$ una función definida sobre el intervalo I y sea $c \in I$, decimos que $f(x)$ alcanza un máximo absoluto en c si $f(c) \geq f(x), \forall x \in I$. Decimos que $f(x)$ alcanza un mínimo absoluto en c si $f(c) \leq f(x), \forall x \in I$. En cualquiera de los dos casos decimos que $f(x)$ alcanza un extremo absoluto en c.

En el siguiente interactivo se muestran distintas gráficas de funciones definidas sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ con sus extremos absolutos si es que tienen.

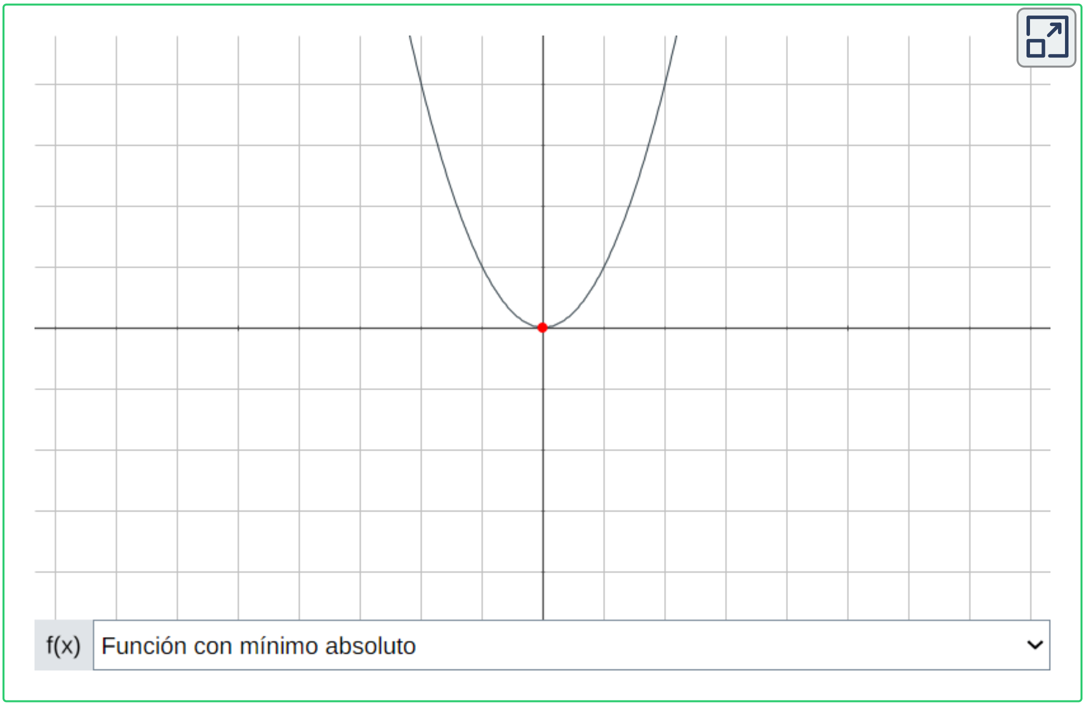


Figura 2.10. Extremos absolutos de una función.

Como se ve en el ejemplo una función puede tener un máximo y un mínimo absoluto, sólo un extremo absoluto o ninguno. El teorema de los valores extremos garantiza que una función continua $f(x)$ sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ tiene una máximo y mínimo absoluto.

> ***Teorema 2.1***. Sea $f(x)$ una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un punto en $[a, b]$ en el que $f(x)$ alcanza un máximo absoluto y un punto en $[a, b]$ en el que $f(x)$ alcanza un mínimo absoluto.

Una función $f(x)$ alcanza un máximo local en c si existe un intervalo abierto I, tal que $c \in I$, contenido en el dominio de $f(c)$ y $f(c) \geq f(x), \forall x \in I$. Decimos que $f(x)$ alcanza un mínimo local en c si existe un intervalo abierto I, tal que $c \in I$, contenido en el dominio de $f(c)$ y $f(c) \leq f(x), \forall x \in I$. Decimos que una función $f(x)$ alcanza un extremo local en c si $f(x)$ alcanza un máximo o mínimo local en c.

Por ejemplo, a continuación se muestra la gráfica de la función $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ definida sobre el intervalo $[-\infty, \infty]$.

Figura 2.11. Extremos locales de una función.

La función alcanza sus extremos locales en $x = 0$ y $x = \frac{8}{9}$, marcados con rojo en la gráfica.

Aunque $f(0)$ no es el valor máximo de $f(x)$, el valor $f(0)$ es mayor que el valor de $f(x)$ para valores de x cercanos a 0. De la misma manera, $f(\frac{8}{9})$ no es el valor mínimo de $f(x)$, pero el valor de $f(\frac{8}{9})$ es menor que los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a $\frac{8}{9}$.

Notemos que si $f(x)$ alcanza un extremo absoluto en c y $f(x)$ esta definida sobre un intervalo que contiene a c entonces $f(c)$ también es un extremo.

Nos interesa saber los valores de x en los que $f(x)$ alcanza sus extremos locales, al igual que con los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizaremos la derivada de la función.

Regresando al ejemplo anterior, la derivada de $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ es

$$f'(x) = 9x^2 - 8x$$

Sabemos que $f(x)$ alcanza sus extremos locales en $x = 0$ y $x = \frac{8}{9}$, el valor de la derivada en esos puntos es igual a 0

$$f'(0) = 0$$

$$f'\left(\frac{8}{9}\right) = 0$$

Si una función $f(x)$ alcanza un extremo local en $x = c$ la derivada $f'(c)$ debe satisfacer una de las siguientes condiciones: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. Si alguna de las dos condiciones se cumple decimos que c es un punto crítico.

En el siguiente interactivo mueve el punto azul para cambiar el valor de c y observa que al acercarse c a los valores donde $f(x)$ alcanza sus extremos locales el valor de la derivada se acerca a 0.

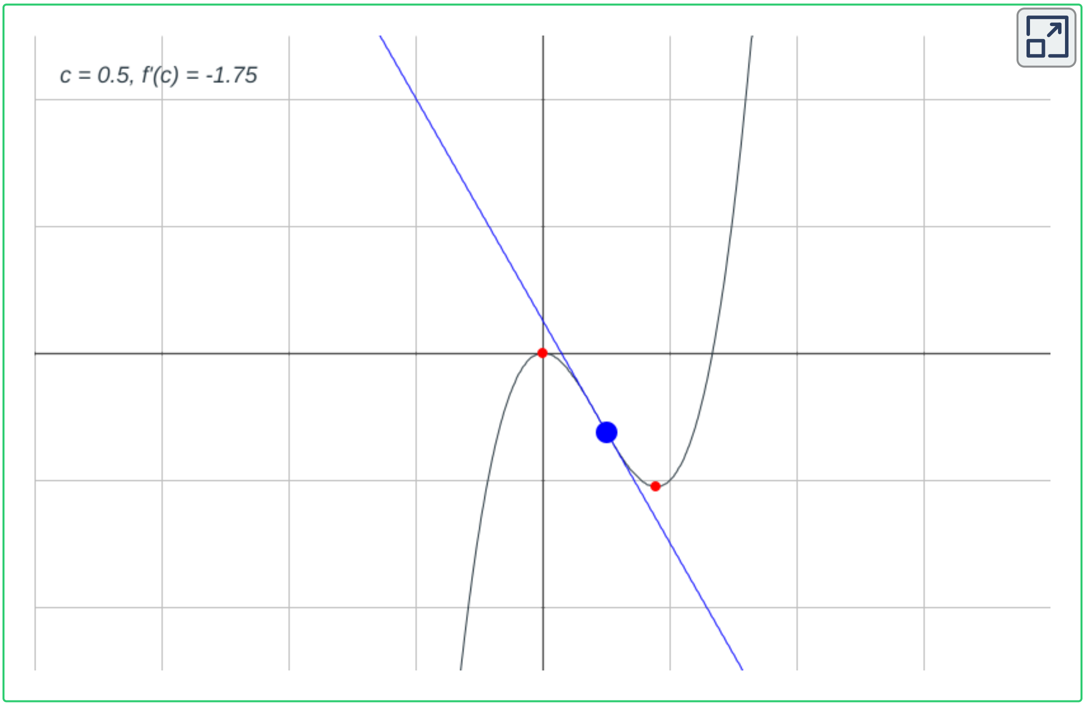


Figura 2.12. Teorema de Fermat.

> ***Teorema 2.2***. Sea $f(x)$ una función, si $f(x)$ alcanza un extremo local en c y es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.

Del teorema podemos concluir que los extremos locales son puntos críticos, pero, no todos los puntos críticos son extremos locales, por ejemplo, veamos la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

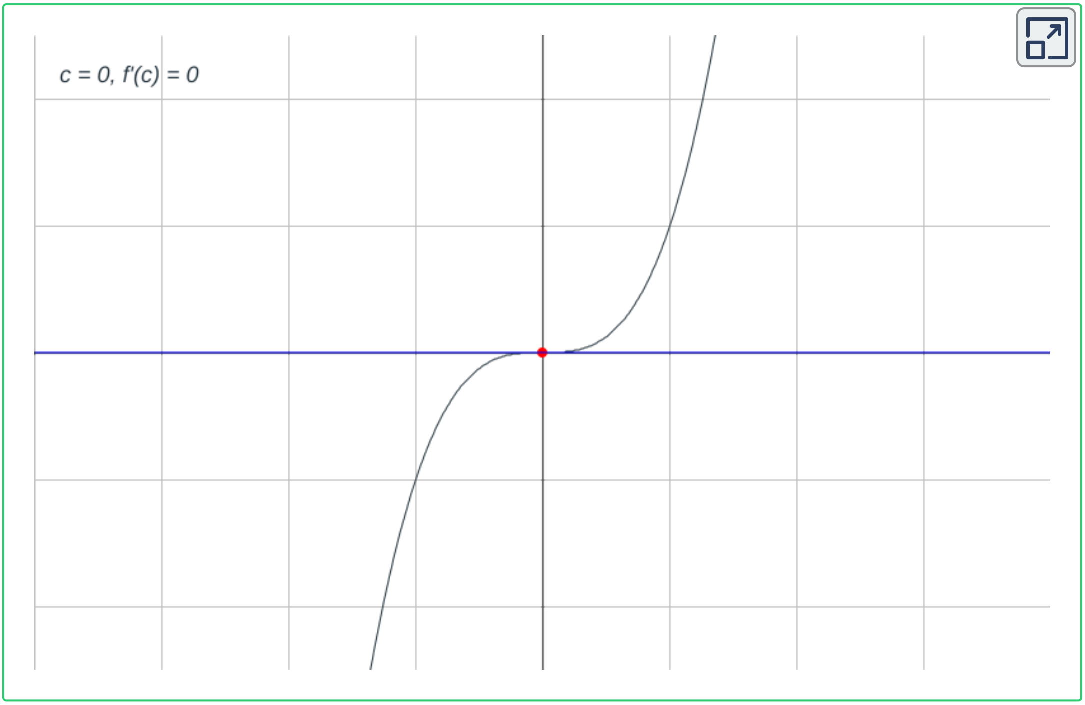


Figura 2.13. Puntos críticos de la función $f(x) = x^3$.

La función tiene un punto crítico en $x = 0$ ya que $f'(0) = 0$, pero, la función es creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, por lo tanto, no es un extremo local.

Ahora, veamos como encontrar los extremos absolutos de una función. Recordemos que el teorema de los valores extremos garantiza que una función definida sobre un intervalo cerrado tendrá un máximo absoluto y un mínimo absoluto. Una función puede alcanzar un extremo absoluto en los puntos extremos del intervalo o en los puntos críticos. Los pasos para encontrar los extremos absolutos de una función son los siguientes:

- Evaluar $f(x)$ en los extremos del intervalo $[a, b]$.

- Encontrar los puntos críticos de la función y evaluarla en sus puntos críticos.
- Comparar los valores obtenidos, el mayor es el máximo absoluto de $f(x)$ y el menor es el mínimo absoluto de $f(x)$

Por ejemplo, sea la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ definida sobre el intervalo $[-2, 1]$.

Primero evaluamos $f(x)$ en los extremos del intervalo, $x = -2$ y $x = 1$

$$f(-2) = 0$$

$$f(1) = 6$$

Ahora, encontramos los puntos de inflexión, para esto derivamos $f(x)$ y resolvemos $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 6x + 5$$

$$6x + 5 = 0$$

$$6x = -5$$

$$x = -\frac{5}{6}$$

La función sólo tiene un punto crítico $x = -\frac{5}{6}$, evaluamos $f(x)$ en ese punto

$$f\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{49}{12}$$

Finalmente, comparamos los valores obtenidos, el valor mayor es $f(1) = 6$ y el valor menor es $f(-\frac{5}{6}) = -\frac{49}{12}$, por lo tanto, la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$ definida sobre el intervalo $[-2, 1]$ alcanza sus extremos absolutos en $x = 1$ y $x = -\frac{5}{6}$, su gráfica se muestra en la siguiente figura

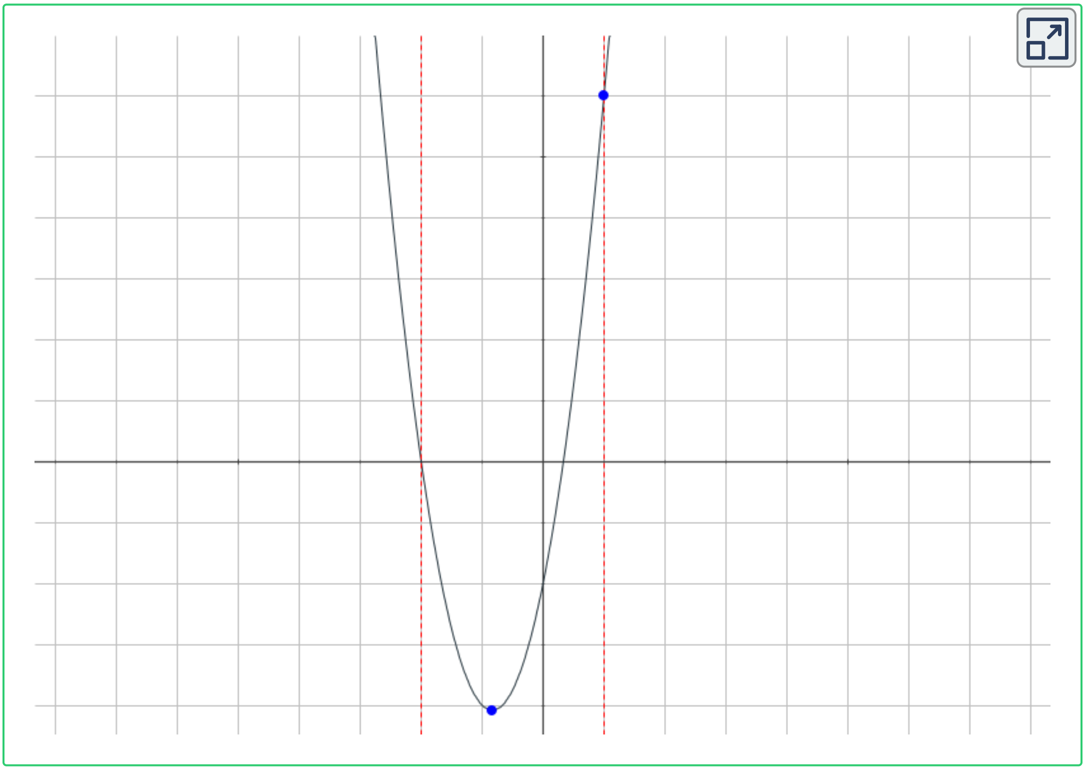


Figura 2.14. Extremos absolutos de la función $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$.

2.8 Derivadas de orden superior. Aceleración. Convexidad y concavidad de una curva. Puntos de inflexión.

Al derivar la función $f(x)$ obtenemos la función $f'(x)$, esta función la podemos volver a derivar a esta nueva derivada la llamamos segunda derivada y la denotamos como $f''(x)$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$. La segunda derivada es un ejemplo de derivada de orden superior, podemos seguir derivando para obtener derivadas de orden de cualquier entero positivo, por ejemplo, al derivar la segunda derivada obtenemos la tercera derivada y así sucesivamente, y las denotamos de la siguiente manera:

- Primera derivada: $y',\ f'(x),\ \frac{d}{dx}y$
- Segunda derivada: $y'',\ f''(x),\ \frac{d^2}{dx^2}y$
- Tercera derivada: $y''',\ f'''(x),\ \frac{d^3}{dx^3}y$
- Cuarta derivada: $y^{(4)},\ f^{(4)}(x),\ \frac{d^4}{dx^4}y$

  $\vdots$

- n-ésima derivada: $y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n}{dx^n}y$

Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x,$ su primera derivada es igual a

$$f'(x) = 9x^2 - 10x + 4$$

Su segunda derivada es igual a
$$f''(x) = 18x - 10$$

Su tercera derivada es igual a
$$f'''(x) = 18$$

Su cuarta derivada es igual a
$$f^{(4)}(x) = 0$$

Notemos que al continuar este proceso todas las derivadas de orden mayor a 4 serán igual a 0.

Sea $f(x)$ un polinomio de grado n, entonces
$$f^{(k)}(x) = n, \; \forall k \geq n + 1$$

2.8.1 Aceleración

Sea $s = f(t)$ la función posición de un objeto, la velocidad instantánea del objeto en el instante t está dada por
$$v(t) = \frac{d}{dt}s = f'(t)$$

La velocidad puede ser negativa o positiva dependiendo de la dirección en la que el objeto se está desplazando, si la velocidad es igual a 0 significa que el objeto está detenido.

Al derivar la función velocidad obtenemos la función aceleración, es decir, la función aceleración es la segunda derivada de la función posición y se denota como

$$a(t) = \frac{d}{dt}v = f''(t)$$

2.8.2 Convexidad y concavidad de una curva

Anteriormente vimos como encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función utilizando su derivada, ahora veremos la información que nos proporciona la segunda derivada sobre la gráfica de una función con otro concepto importante llamado concavidad. Observemos las siguientes gráficas:

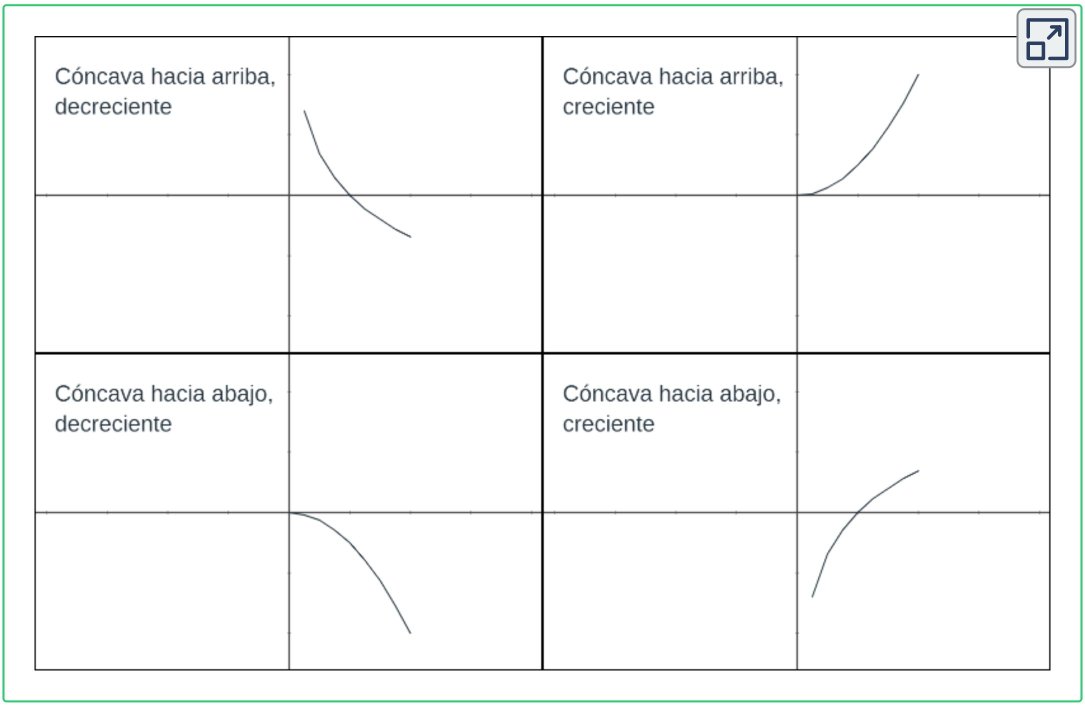


Figura 2.15. Concavidad.

Decimos que una función es cóncava hacia arriba o convexa si su gráfica “abre” hacia arriba, y una función es cóncava hacia abajo o simplemente cóncava si su gráfica “abre” hacia abajo. Notemos que una función puede ser cóncava hacia arriba o hacia abajo independientemente de si la función es creciente o decreciente. Para dar una definición más concreta de concavidad, analicemos las rectas tangentes a las curvas (mueve los puntos azules para mover las rectas tangentes a las curvas):

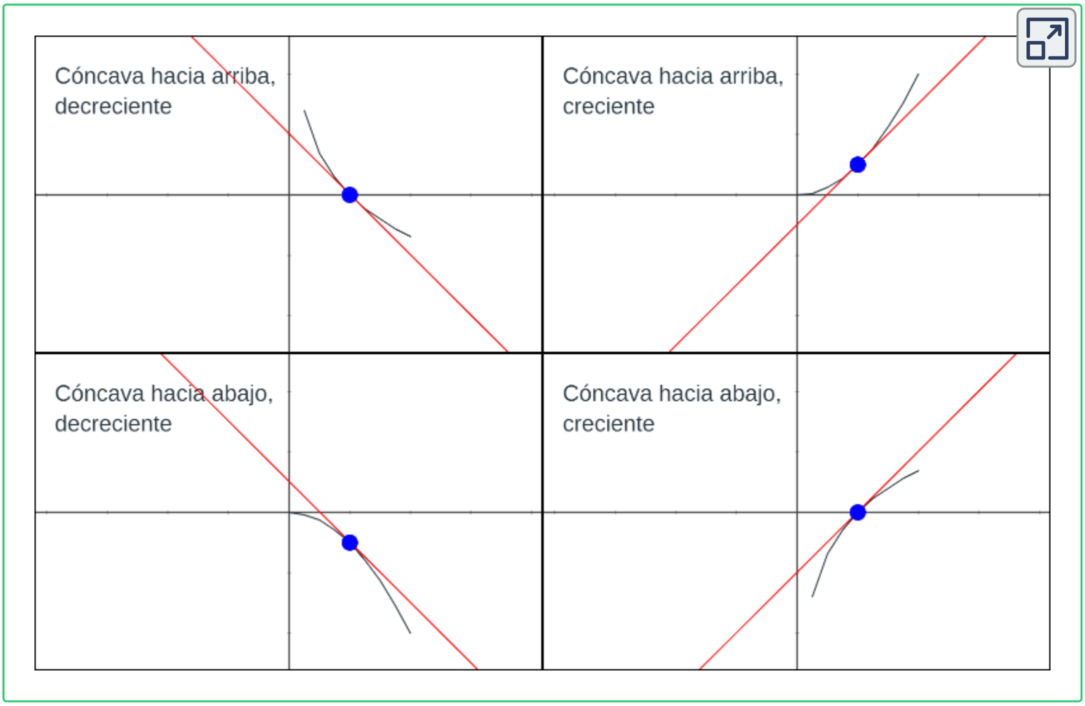


Figura 2.16. Recta tangente, concavidad.

Podemos ver que cuando la gráfica es cóncava hacia arriba la gráfica de la tangente queda por debajo de la gráfica y cuando la gráfica es cóncava hacia abajo la tangente queda por arriba de la gráfica.

También podemos observar que cuando la gráfica es cóncava hacia arriba la pendiente de la recta tangente va aumentando, mientras que cuando la gráfica es cóncava hacia abajo la pendiente va disminuyendo. Esto quiere decir que la concavidad esta relacionada con el sentido de crecimiento de la derivada, recordemos que para saber si una función es creciente o decreciente en un intervalo utilizamos su derivada, por lo tanto, para determinar la concavidad de una función utilizaremos su segunda derivada:

- Si para toda x en un intervalo $[a, b]$ se cumple que $f''(x) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $[a, b]$.
- Si para toda x en un intervalo $[a, b]$ se cumple que $f''(x) < 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $[a, b]$.

2.8.3 Puntos de inflexión

Un punto $x = c$ es un punto de inflexión si la función es continua en ese punto y la concavidad de la gráfica cambia en ese punto. Como la concavidad de una gráfica depende del signo de la segunda derivada los puntos de inflexión ocurren en todos los puntos donde la segunda derivada cambia de signo. Los puntos en los que una función cambia de signo ocurren cuando $f(x) = 0$ o en los que la función no esta definida, esto nos dice que los puntos en los que la segunda derivada es 0 o es indefinida son posibles puntos de inflexión.

Notemos que no sólo porque la segunda derivada sea 0 o indefinida en un punto será un punto de inflexión. Para saber si ese punto es realmente un punto de inflexión tenemos que determinar si la concavidad de la gráfica es distinta de ambos lados del punto.

Veamos un ejemplo, sea $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2$ encontraremos sus puntos de inflexión. Primero, calculamos la primera y segunda derivada de $f(x)$

$$f'(x) = 8x^3 + 6x^2 - 12x$$

$$f''(x) = 24x^2 + 12x - 12$$

Luego, igualamos $f''(x)$ a 0 y resolvemos

$$24x^2 + 12x - 12 = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(x+1)(2x-1) = 0$$

Tenemos dos soluciones $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$, ahora verificamos que realmente sean puntos de inflexión escogiendo un punto en cada uno de los intervalos.

Para el intervalo $(-\infty, -1)$ escogemos $x = -2$, $f''(-2) = 60$, por lo tanto la gráfica es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$

Para el intervalo $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ escogemos $x = 0$, $f''(0) = -12$, por lo tanto la gráfica es cóncava hacia abajo en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Para el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ escogemos $x = 1$, $f''(1) = 24$, por lo tanto la gráfica es cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

La gráfica es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, lo que significa que $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$ sí son puntos de inflexión.

Finalmente evaluamos $f(x)$ en $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$ para obtener la coordenada y de los puntos de inflexión

$$f(-1) = -6$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{8}$$

Por lo tanto, los dos puntos de inflexión de $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 6x^2$ son $(-1, -6)$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{8})$, su gráfica se muestra en la siguiente figura

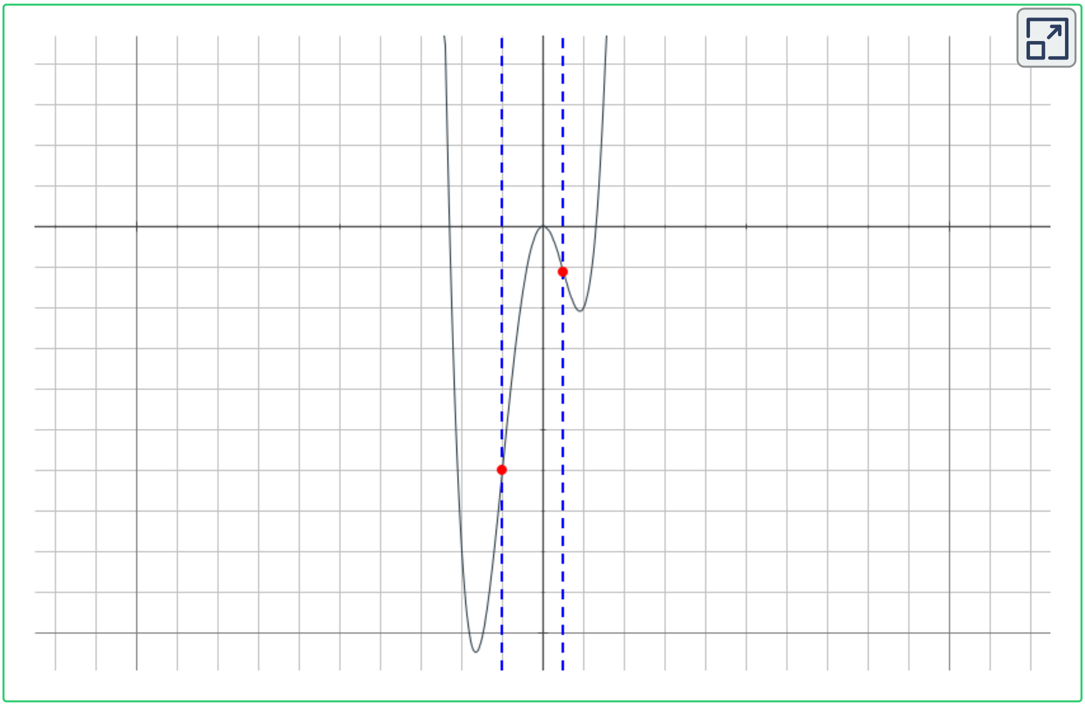


Figura 2.17. Ejemplo puntos de inflexión.

Capítulo III

Integral de funciones reales de una variable real

3.1 Distancia recorrida a partir de la velocidad instantánea. Área de la región limitada por una curva.

Supongamos que una partícula se mueve con velocidad variable $v(t)$ durante un intervalo de tiempo y queremos calcular la distancia recorrida durante ese intervalo, como la velocidad de la partícula no es constante durante todo el intervalo lo que podemos hacer es dividir este intervalo en intervalos más pequeños, durante los cuales la velocidad no va a variar mucho.

Entonces, suponiendo que queremos calcular la distancia recorrida por la partícula en el intervalo $[a, b]$ primero lo dividimos en n intervalos más cortos de duración Δt (siendo Δt igual a $\frac{b-a}{n}$), trataremos la velocidad de la partícula dentro de cada uno de los intervalos como si se mantuviera constante. La distancia recorrida dentro del intervalo que inicia en el instante t_i es aproximadamente

$$\Delta x_i \approx v(t_i)\Delta t$$

Para obtener la distancia total recorrida sumamos las distancias recorridas durante cada uno de los intervalos

$$\Delta x = \Delta x_0 + \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} v(t_i)\Delta t$$

A esta suma la llamamos suma de Riemann. Gráficamente se vería de la siguiente manera:

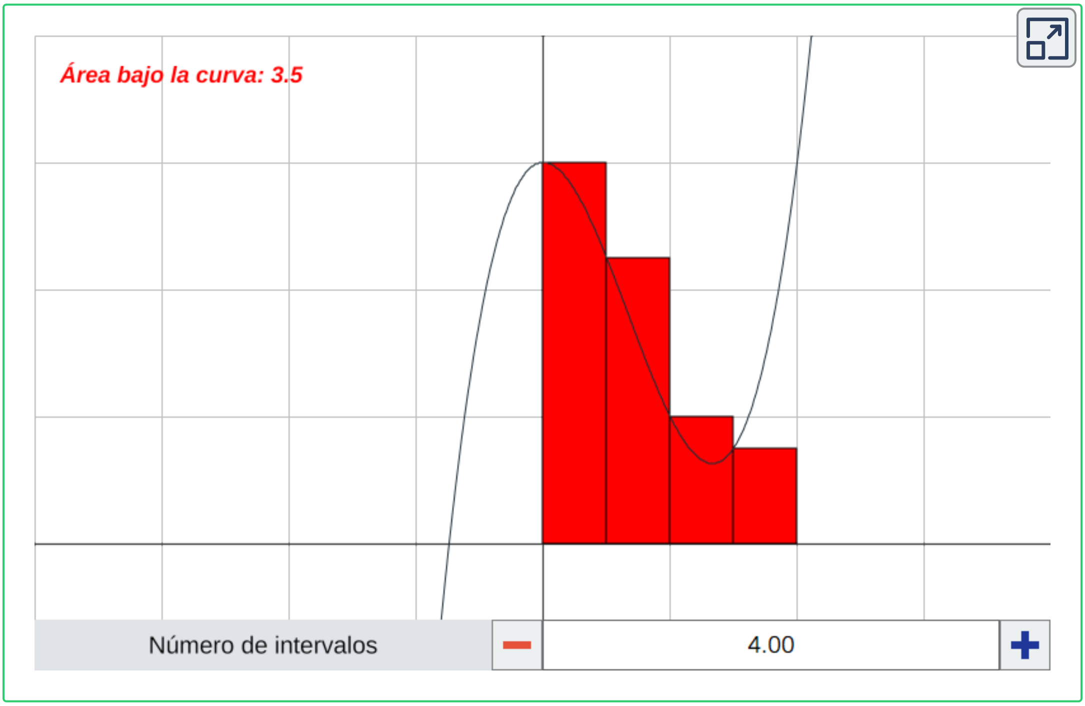


Figura 3.1. Área bajo la curva de la función $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3$ en el intervalo $[0, 2]$.

La suma de Riemann es una aproximación del área total bajo la gráfica de una función $f(x)$. Notemos que al aumentar el número de intervalos obtenemos una mejor aproximación y el ancho Δt de los intervalos disminuye.

A este método lo llamamos suma de Riemann por la izquierda ya que la altura de los rectángulos es igual a la función f evaluada en el extremo izquierdo de los subintervalos. Existen otros métodos dependiendo de que punto de los subintervalos se utilicen para la altura, si utilizamos el extremo derecho de los subintervalos lo llamaremos suma de Riemann por la derecha y si utilizamos el punto medio de los subintervalos lo llamaremos suma de Riemann de punto medio, tengamos en cuenta que los tres métodos de suma de Riemann convergerán al mismo valor.

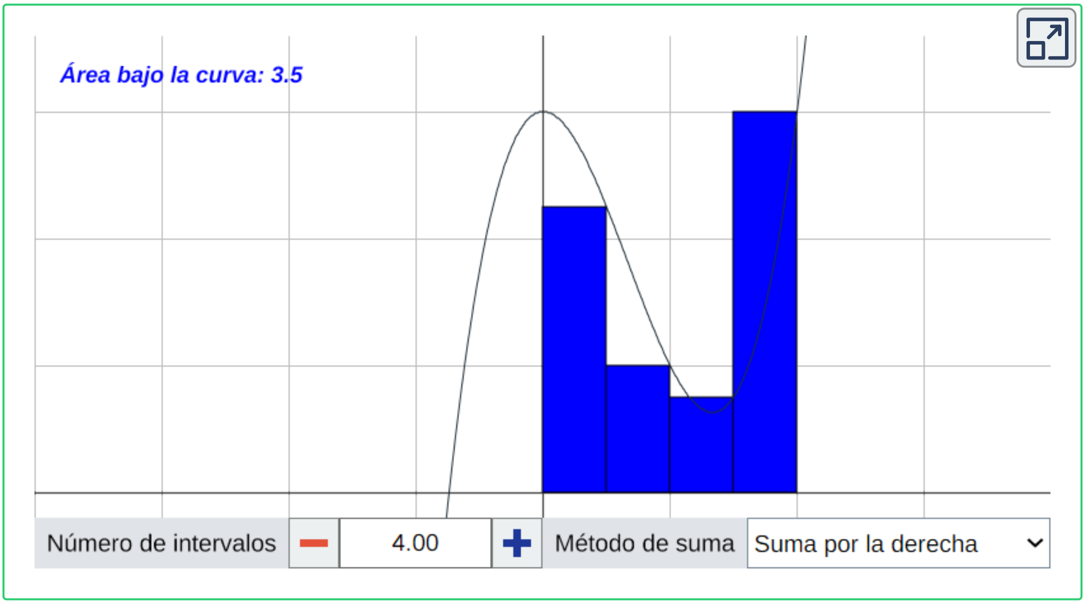


Figura 3.2. Sumas de Riemann por la izquierda, por la derecha y por punto medio.

Sea $f(x)$ una función continua no negativa sobre un intervalo $[a,b]$ y sea $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ una suma de Riemann para $f(x)$. El área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ está dada por

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

3.2 Integral definida.

La integral definida de una función continua $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$ denotada por

$$\int_a^b f(x)dx$$

es el número real dado por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 0, \ldots, n$, y x_i^* satisface $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$ para $i = 1, \ldots, n$, es decir, estamos tomando cualquier punto dentro de cada subintervalo en lugar de restringirlo al extremo derecho o izquierdo.

Al símbolo $\int$ lo llamamos signo de integración, los valores a y b son los límites de integración, la función $f(x)$ es el integrando, y el símbolo dx, llamado el diferencial de la variable x, indica la variable de integración.

El valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$ es igual al área acotada por la función $f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a, b]$.

Veamos los pasos para resolver la integral $\int_1^3 3x^2 + 1dx$ utilizando la definición.

Utilizaremos el extremo derecho de los subintervalos para x_i^*. La longitud de cada subintervalo será igual a

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

Los subintervalos serán

$$\left[1, \frac{n+2}{n}\right], \left[\frac{n+2}{n}, \frac{n+4}{n}\right], \left[\frac{n+4}{n}, \frac{n+6}{n}\right], \ldots, \left[\frac{3n-2}{n}, 3\right]$$

El extremo derecho del i-ésimo subintervalo será igual a

$$x_i^* = \frac{n+2i}{n}$$

Utilizando la definición tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{n+2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(3\left(\frac{n+2i}{n}\right)^2 + 1\right)\frac{2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{8n^2 + 24in + 24i^2}{n^3}$$

Evaluando la suma obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{8n^2}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{24in}{n^3} + \sum_{i=1}^{n} \frac{24i^2}{n^3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n} + \frac{24}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{24}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= 8 + \frac{12n + 12}{n} + \frac{8n^2 + 12n + 4}{n^2}$$

$$= \frac{28n^2 + 24n + 4}{n^2}$$

Evaluando la integral tenemos que

$$\int_1^3 3x^2 + 1dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \frac{28n^2 + 24n + 4}{n^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{28n^2}{n^2} + \lim_{n \to \infty} \frac{24n}{n^2} + \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^2}$$

$$= 28 + \lim_{n \to \infty} \frac{24}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{4}{n^2}$$

$$= \int_1^3 3x^2 + 1dx = 28$$

De esta manera podemos evaluar la integral definida de una función simple utilizando la definición de la integral, más adelante veremos una manera más simple de hacerlo.

En la siguiente figura se muestra la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 1$ con el área bajo la gráfica en el intervalo $[1, 3]$ marcada en rojo.

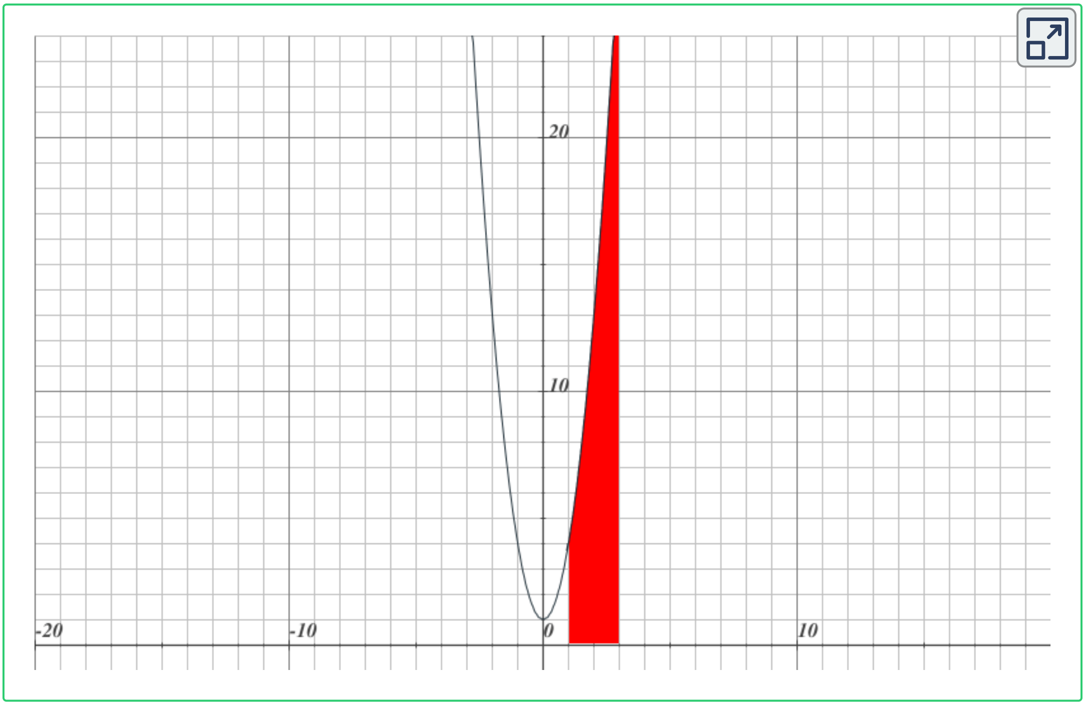


Figura 3.3. Área bajo la gráfica de la función $f(x) = 3x^2 + 1$.

3.3 Relación entre la integral y la derivada. Teorema fundamental del cálculo.

El teorema fundamental del cálculo establece la relación entre la derivada y la integral de una función.

> ***Teorema 3.1***. **Teorema fundamental del cálculo:** Sea $f(x)$ una función continua sobre un intervalo $[a, b]$, y sea la función $F(x)$ definida de la siguiente manera:
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
>
> entonces $F'(x) = f(x)$ en $[a, b]$.

Lo que el teorema nos dice es que la integración y la derivación son operaciones mutuamente inversas. Por ejemplo, sea

$$g(x) = \int_2^x \sqrt{\frac{5t^3}{2}}dt$$

Por el teorema fundamental del cálculo la derivada de la función es igual a

$$g'(x) = \sqrt{\frac{5x^3}{2}}$$

3.3.1 Interpretación geométrica del teorema fundamental del cálculo

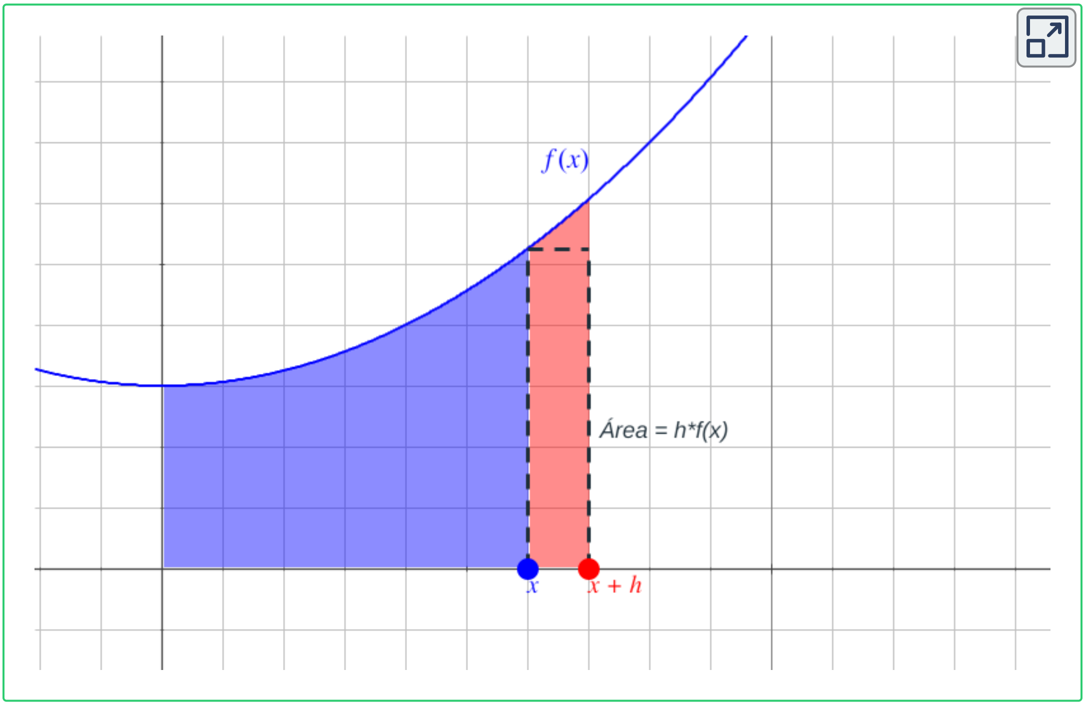


Figura 3.4. Interpretación geométrica del teorema fundamental del cálculo.

En el interactivo anterior se muestra la gráfica de una función continua $f(x)$, si queremos calcular el área bajo la curva en el intervalo $[x, x+h]$ podemos realizar la substracción $A(x-h) - A(x)$, siendo $A(x)$ el área bajo la función $f(x)$ entre 0 y x. Otra forma de aproximar el valor del área en ese intervalo sería calculando el área marcada por las líneas punteadas que sería igual a $hf(x)$, es decir:

$$A(x-h) - A(x) \approx hf(x)$$

Notemos que al mover el punto rojo para disminuir el valor de h esta aproximación mejora y cuando h se acerca a 0 esta aproximación se convierte en una igualdad. Ahora, dividiendo ambos lados entre h tenemos que $f(x) \approx \frac{A(x-h)-A(x)}{h}$, cuando h tiende a 0 tenemos que:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x-h) - A(x)}{h}$$

En el lado derecho de la ecuación se encuentra la fórmula de la derivada de la función $A(x)$, esto es, $f(x) = A'(x)$. Lo que quiere decir que la derivada de la función del área bajo la curva $A(x)$ es igual a la función $f(x)$, por lo tanto, la integración y la derivación son operaciones inversas.

3.3.2 Segundo teorema fundamental del cálculo

El segundo teorema fundamental del cálculo nos permite evaluar integrales definidas sin la necesidad de utilizar sumas de Riemann.

> ***Teorema 3.2***. **Segundo teorema fundamental del cálculo:** Sea $f(x)$ una función continua sobre un intervalo $[a, b]$, y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$ entonces
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La antiderivada de una función f es una función diferenciable F cuya derivada es igual a la función original f. El segundo teorema fundamental del cálculo nos dice que si podemos encontrar una antiderivada para el integrando entonces podemos evaluar la integral definida evaluando la antiderivada en los límites de integración y restando los dos valores.

Por ejemplo, para evaluar la integral del ejemplo anterior

$$\int_1^3 3x^2 + 1dx$$

Como

$$\frac{d}{dx}x^3 + x = 3x^2 + 1$$

El segundo teorema fundamental del cálculo nos dice que

$$\int_1^3 3x^2 + 1dx = x^3 + x\Big|_1^3$$

$$x^3 + x\Big|_1^3 = (3^3 + 3) - (1^3 + 1) = 28$$

$$\int_1^3 3x^2 + 1dx = 28$$

Como podemos ver, de esta manera es más fácil evaluar integrales definidas que utilizando la definición, aunque no siempre será sencillo encontrar una antiderivada para una función.

3.4 Integral indefinida.

Como vimos anteriormente, decimos que una función $F(x)$ es una antiderivada o primitiva de $g(x)$ si satisface la ecuación

$$\frac{d}{dx}F(x) = g(x)$$

Notemos que si $F(x)$ es una antiderivada de la función $g(x)$ entonces la función

$$H(x) = F(x) + C,\, C \in \mathbb{R}$$

también lo es, ya que

$$H'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = g(x)$$

Sea $g(x)$ una función definida sobre un intervalo I y $F(x)$ una antiderivada de $g(x)$, llamamos integral indefinida a la antiderivada más general de $f(x)$ y la denotamos como

$$\int g(x)dx = F(x) + C,\, C \in \mathbb{R}$$

C es cualquier constante y la llamamos constante de integración. Para una función $f(x)$ y antiderivada $F(x)$, a las funciones de la forma $F(x) + C$ las llamamos la familia de antiderivadas de $f(x)$. Al proceso de encontrar la integral indefinida de una función lo llamamos integración, si necesitamos especificar la variable de integración decimos que integramos $f(x)$ con respecto a x.

En la siguiente tabla se muestran las integrales indefinidas para algunas funciones comunes

Integral indefinida	
$\int a dx = ax + C$	$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \csc^2 x = -\cot x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} \lvert x \rvert + C$
$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3.5 Propiedades de la integral.

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$, la integral cumple las siguientes propiedades:

- Sea $k \in \mathbb{R}$, podemos mover la constante afuera de la integral
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

  Demostración: Usando la definición de integral tenemos que:
$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i^*)\Delta x$$

  Usando propiedades de la suma sacamos la constante de la suma
$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

  Usando la propiedad de los límites sacamos la constante del límite
$$\int_a^b kf(x)dx = k\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

  Por lo tanto
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

- La integral de una suma o resta de funciones es igual a la suma o resta de las integrales
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

Demostración: Usando la definición de la integral tenemos que:
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i^*) \pm g(x_i^*))\Delta x$$

Al separar la suma obtenemos
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \pm g(x_i^*)\Delta x$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x \right)$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

- Si el límite superior de una integral definida es igual a su límite inferior entonces la integral es igual a 0

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Demostración: Usando la definición tenemos que:

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Donde Δx es igual a

$$\Delta x = \frac{a-a}{n} = 0$$

Por lo tanto

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)0$$

$$\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} 0$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

- Al cambiar el signo de la integral intercambiamos los límites superior e inferior

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Demostración: Usando la definición tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \frac{b-a}{n}$$

Y que

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \frac{a-b}{n}$$

Entonces, reordenando la resta en Δx tenemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \frac{-(a-b)}{n}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \left(-\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \frac{(a-b)}{n} \right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \frac{(a-b)}{n}$$

Por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Sea c un punto en el intervalo $[a, b]$, entonces la integral definida sobre el intervalo $[a, b]$ es igual a la suma de las integrales sobre $[a, c]$ y $[c, b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Demostración: Usando el segundo teorema fundamental del cálculo tenemos que:

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$$

$$\int_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores tenemos que

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Por el segundo teorema fundamental del cálculo

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Por lo tanto

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

- Si $f(x) \geq 0$, entonces su integral definida será positiva para $a \leq x \leq b$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0, \text{si } f(x) \geq 0 \text{ en } [a, b]$$

Demostración: Usando la definición tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Como $f(x) \geq 0$ y $\Delta x > 0$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \geq 0$$

Aplicando el límite en ambos lados de la desigualdad tenemos que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \geq \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

Por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x \geq 0$$

3.6 Ejemplos y aplicaciones. Trabajo. Distribuciones de Probabilidad.

3.6.1 Área entre dos curvas

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, supongamos que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, queremos calcular el área entre las dos curvas como se muestra en la siguiente figura:

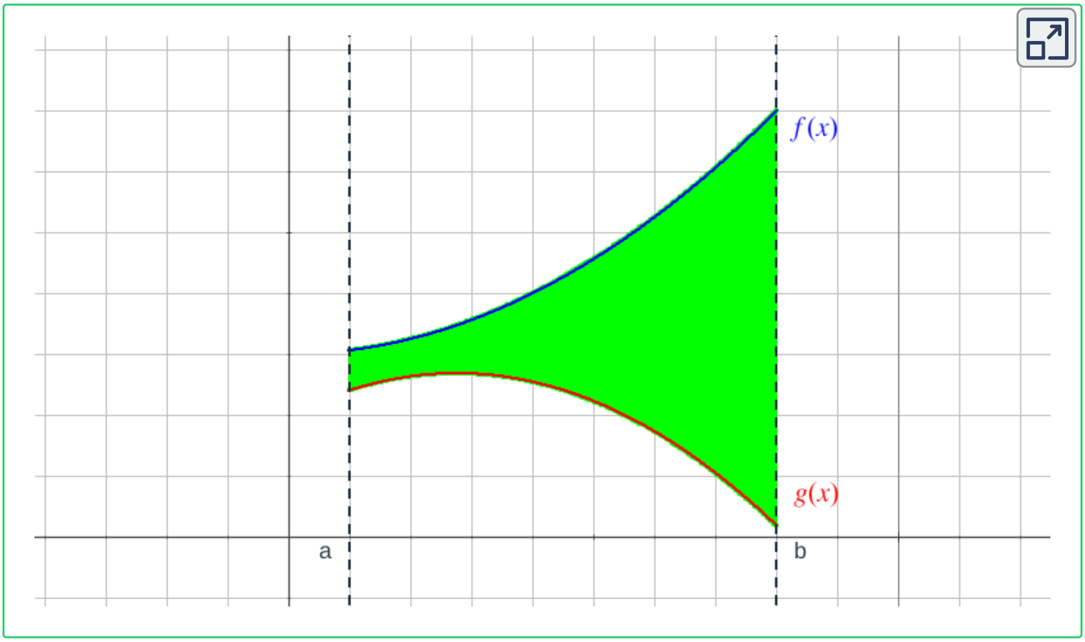


Figura 3.5. Área entre dos curvas.

Para calcular el área, primero dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con ancho Δx y de altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$, siendo x_i cualquier punto en el subintervalo i.

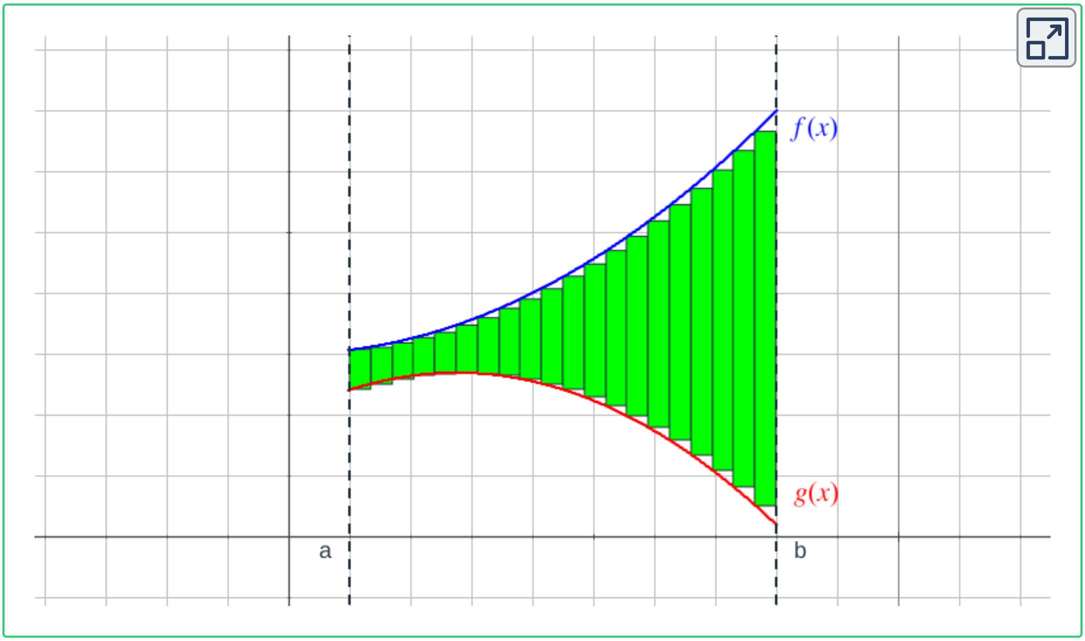


Figura 3.6. División en subintervalos.

El área de cada subintervalo será igual a

$$\Delta A_i = [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

Para obtener el área total sumamos el área de los n subintervalos y tomamos el límite cuando $n \to \infty$

$$\Delta A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$$

$$\Delta A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\Delta x$$

Que es igual a la integral

$$\Delta A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\Delta x$$

3.6.2 Trabajo

Decimos que una fuerza realiza un trabajo cuando desplaza un objeto. Si la fuerza que realiza el trabajo es constante su definición es la siguiente:

> ***Definición 3.1***. **Trabajo realizado por una fuerza constante:** El trabajo W realizado por una fuerza F que desplaza a un objeto una distancia D es igual al producto
> $$W = FD$$

Si la fuerza es variable, es decir, la cantidad de fuerza cambia conforme a la posición del objeto, entonces utilizaremos un método similar al utilizado para calcular la distancia recorrida a partir de la velocidad instantánea. En este caso, el objeto se mueve en una recta, desde x_0 hasta x_n, y dividiremos la recta en n subintervalos de tamaño Δx, suponemos que la fuerza dentro de cada intervalo será constante, entonces, sea c_i un punto dentro del i-ésimo subintervalo, el trabajo realizado en el i-ésimo subintervalo será igual a

$$\Delta W_i = F(c_i)\Delta x$$

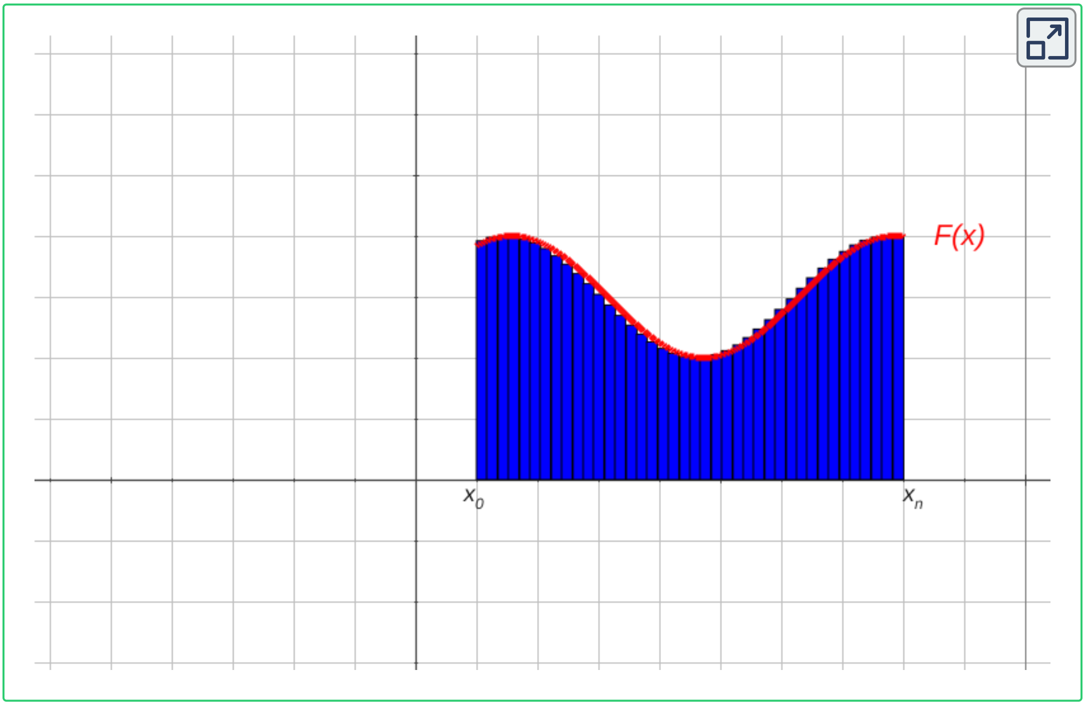


Figura 3.7. Cálculo del trabajo realizado por una fuerza variable.

El trabajo total será igual a la suma del trabajo realizado en cada subintervalo

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x$$

Recordemos que al aumentar el número de subintervalos Δx se acercará a 0 y obtendremos una mejor aproximación, por lo tanto

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x$$

Que es igual a la integral

$$W = \int_a^b F(x)dx$$

3.6.3 Valor medio de una función

El valor medio de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ esta dado por la fórmula

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Viéndolo gráficamente, el valor medio de una función es igual a la altura del rectángulo cuyo ancho es igual a la longitud del intervalo y cuya área es igual al área bajo la función en ese mismo intervalo.

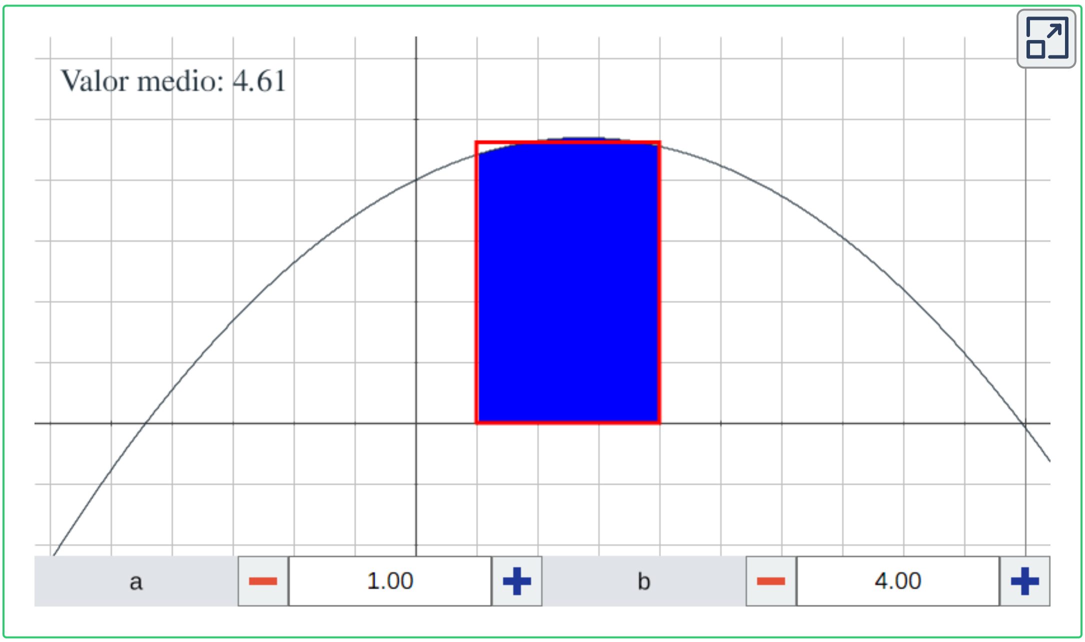


Figura 3.8. Valor medio de la función $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{11} + 4$ en el intervalo $[a, b]$.

3.6.4 Distribuciones de probabilidad

Decimos que X es una variable aleatoria continua si X puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo I, por ejemplo, cantidades como distancia, altura, presión, temperatura, etc., son variables aleatorias continuas.

Las variables aleatorias continuas tienen una función de densidad de probabilidad (FDP) $f(x)$ que nos dice la probabilidad de que la variable aleatoria este dentro de un rango particular de valores. La FDP cumple las siguientes propiedades:

- $f(x) \geq 0$, para toda x
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La probabilidad de que una variable aleatoria continua X tome un valor en el intervalo $[a, b]$ es igual a:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Que es igual al área bajo la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. A continuación veremos algunos ejemplos de funciones de densidad de probabilidad.

3.6.5 Distribución uniforme continua

Decimos que una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme continua en el intervalo $[a, b]$ si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\text{ , para }a \leq x \leq b$$

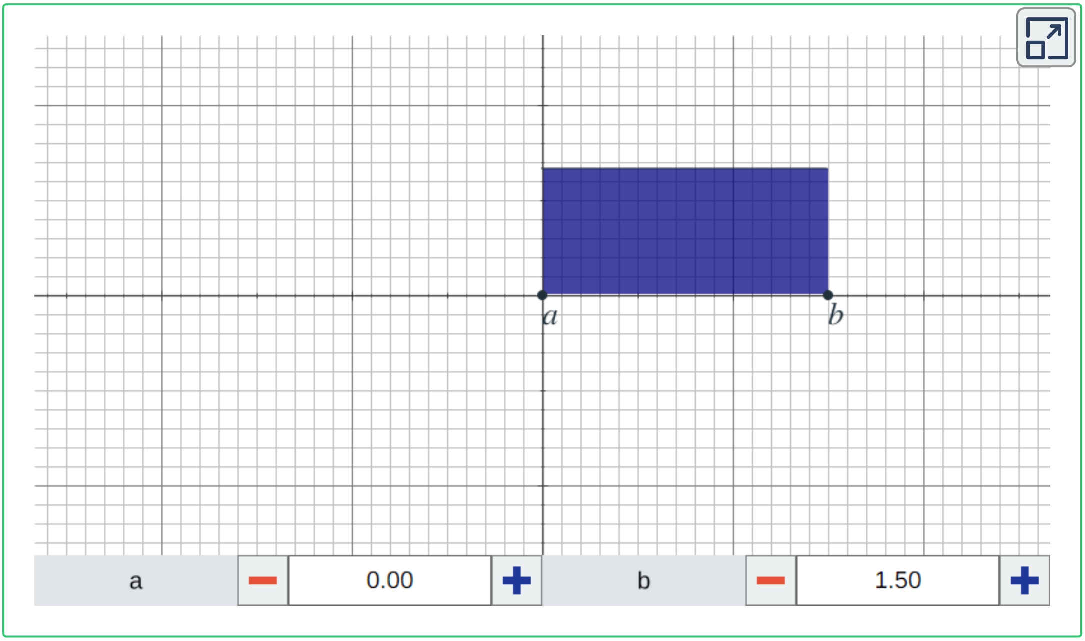


Figura 3.9. Gráfica general de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución uniforme continua.

Esta distribución se utiliza para variables aleatorias que toman valores continuos dentro de un intervalo.

3.6.6 Distribución exponencial

Esta distribución es utilizada para modelar tiempos de espera para la ocurrencia de un evento específico, por ejemplo, la cantidad de tiempo antes de que ocurra un terremoto tiene una distribución exponencial. Su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\text{ , para }x > 0$$

Donde λ representa la cantidad de ocurrencia de eventos en promedio por unidad de tiempo.

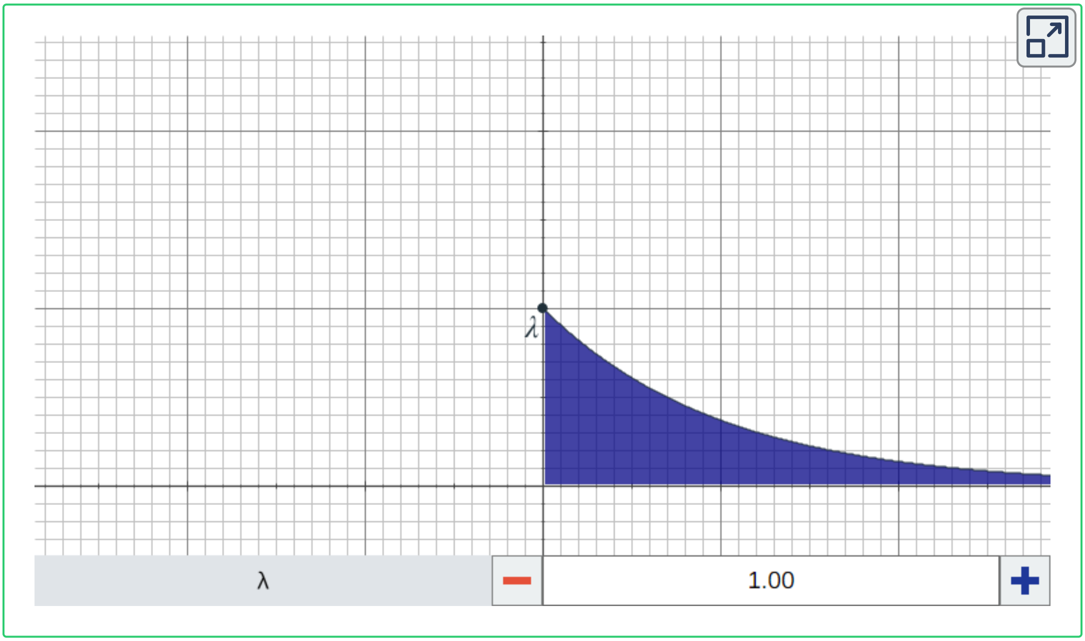


Figura 3.10. Gráfica general de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución exponencial.

3.6.7 Distribución normal

La distribución normal o gaussiana es una de las distribuciones más importantes ya que puede ser utilizada para modelar varios fenómenos como la presión de sangre, la altura de un grupo de personas, errores de medición, etc. Su función de densidad está dada por la expresión

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

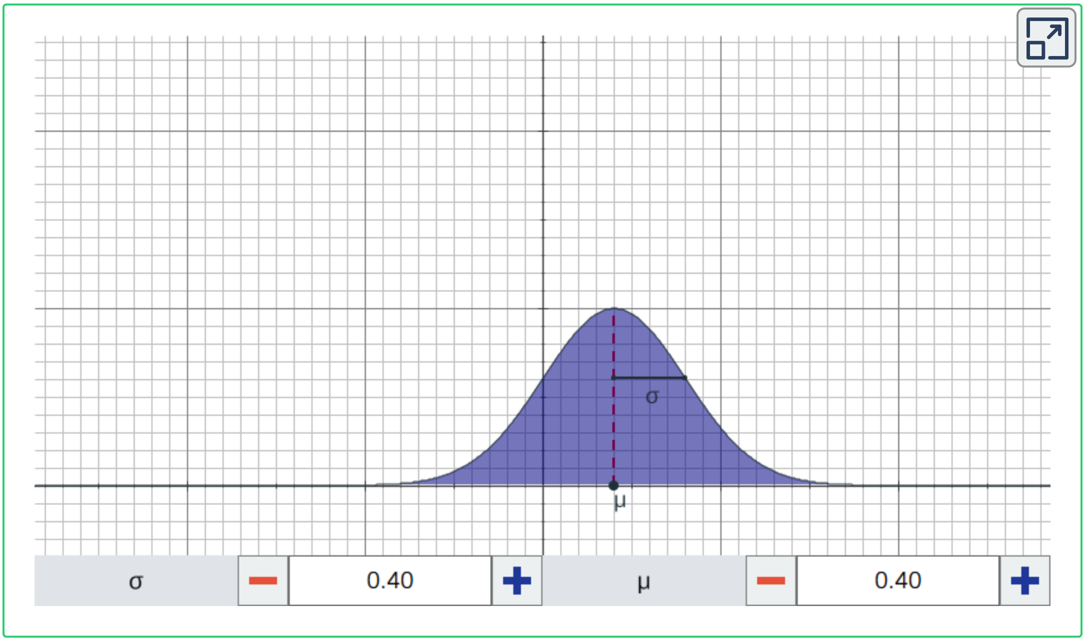


Figura 3.11. Gráfica general de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal.

La gráfica de la función tiene forma de campana, donde μ es el centro de la campana y σ es la distancia del centro a cualquiera de los dos puntos de inflexión de la curva.

Capítulo IV
Cálculo de las derivadas

4.1 Diferencial, aproximación por medio de la derivada. Cero de funciones. Método de Newton.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable, los diferenciales dx y dy están dados por la relación

$$dy = f'(x)dx$$

Donde dx es cualquier número real distinto de 0.

Si Δx es el cambio en x, entonces $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es el cambio en y correspondiente al cambio en x. Si Δx es suficientemente pequeño podemos utilizar dy como una aproximación del cambio en y, es decir

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

Por ejemplo, sea $y = x^3 + 3x^2$ comparemos los valores de dy y Δy cuando x cambia de $x = 1$ a $x = 1.01$.

Primero calculemos el cambio en y, Δy.

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = 4.090601 - 4 = 0.090601$

Ahora, calculemos dy.

$$dy = f'(x)dx = f'(1)(0.01) = 0.09$$

Como podemos ver para valores de Δx suficientemente pequeños se cumple que $\Delta y \approx dy$.

En el siguiente interactivo se muestra la interpretación geométrica del diferencial, la línea punteada negra representa Δy mientras que la línea punteada roja representa dy, observa que al disminuir Δx los valores de dy y Δy se acercan el uno al otro.

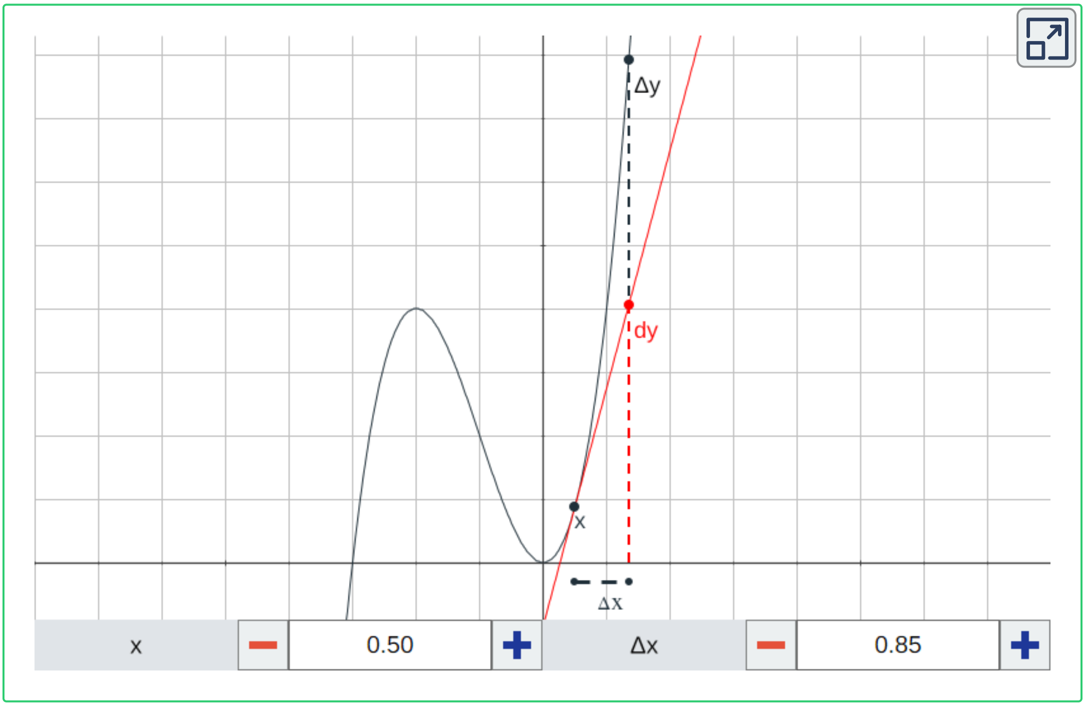


Figura 4.1. Interpretación geométrica del diferencial.

4.1.1 Aproximación por medio de la derivada

Sea $f(x)$ una función diferenciable en el punto $x = a$, la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto a está dada por la ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Por ejemplo, usando la función del ejemplo anterior: $f(x) = x^3 + 3x^2$, la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $a = 1$ es igual a

$$y = 4 + 9(x - 1)$$

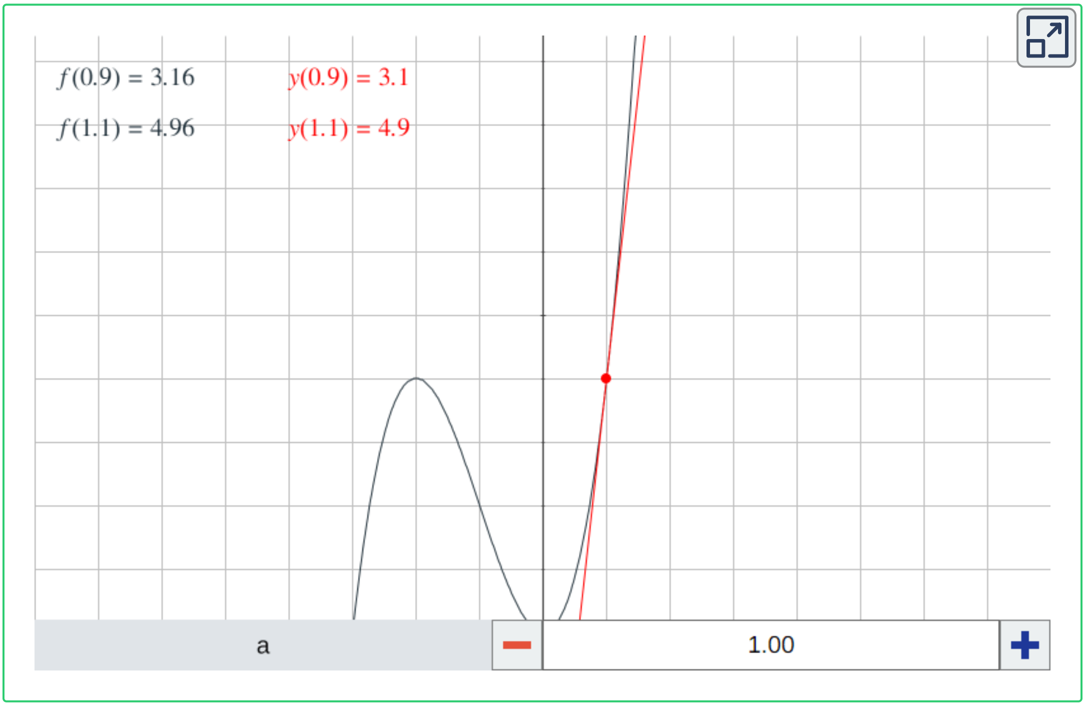


Figura 4.2. Recta tangente a la función $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Notemos que para valores cercanos a a la gráfica de la tangente se acerca a la gráfica de $f(x)$, por lo tanto podemos usar la ecuación de la tangente para aproximar los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a a.

Por ejemplo, sea $x = 1.1$ utilizando la ecuación de la recta tangente tenemos que

$$y = 9 * 0.1 + 4 = 4.9$$

Y $f(1.1)$ es igual a

$$f(1.1) = 4.961$$

Obtuvimos una buena aproximación utilizando la ecuación de la recta tangente, pero si utilizamos valores mas alejados a a la aproximación será peor, por ejemplo, sea $x = 10$, utilizando la ecuación de la recta tangente tenemos que

$$y = 9 * 9 + 4 = 85$$

Mientras que $f(10)$ es igual a

$$f(10) = 1300$$

Por lo tanto

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \text{ para valores de } x \text{ cercanos a } a$$

4.1.2 Cero de funciones

Llamamos cero de una función $f(x)$ a toda x que cumpla

$$f(x) = 0$$

Visto gráficamente, los ceros de una función son todos los puntos donde su gráfica intersecta el eje x.

Consideremos el problema de encontrar los ceros de una función, si la función es un polinomio de primer grado de la forma $f(x) = ax + b$ podemos simplemente despejar la función para encontrar x, si la función es un polinomio de segundo grado de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ podemos utilizar la fórmula general. Pero si la función es un polinomio de grado mayor a 2 o si no es una función polinomial el problema se complica, para esto veremos un método que nos permitirá aproximar los ceros de una función.

4.1.3 Método de Newton

El método de Newton nos permite aproximar soluciones a $f(x) = 0$. Primero trazamos la gráfica de $f(x)$ y encontramos una aproximación inicial a la solución de $f(x) = 0$ a esta aproximación inicial la llamaremos x_0. Esta aproximación probablemente no será muy buena, entonces, para encontrar una mejor aproximación trazaremos la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La recta tangente va a intersectar al eje x en el punto $(x_1, 0)$. El punto x_1 estará más cerca a la solución que x_0, para encontrarlo simplemente despejamos en la ecuación de la tangente

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Podemos repetir este proceso para seguir mejorando la aproximación. La siguiente aproximación, x_2, será el punto donde la tangente a $f(x)$ en x_1 intersecte al eje x, x_2 estará dado por la fórmula

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Si continuamos este proceso obtendremos números que se acercarán cada vez más a la solución actual, a este proceso lo llamamos método de Newton.

> **Algoritmo 4.1**. **Método de Newton:** Si x_n es una aproximación a la solución de $f(x) = 0$ y $f'(x) \neq 0$ la siguiente aproximación está dada por
>
> $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Veamos un ejemplo, utilizaremos el método de Newton para calcular $\sqrt{5}$. Primero, recordemos que la función debe ser de la forma $f(x) = 0$, entonces la función a calcular será:

$$x = \sqrt{5}$$

$$x^2 = 5$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 5$$

El siguiente paso será escoger una aproximación inicial x_0, en este caso $x_0 = 3$. Después utilizaremos la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Hasta que encontremos una aproximación suficientemente buena. En el siguiente interactivo se muestran las iteraciones realizadas del método de Newton.

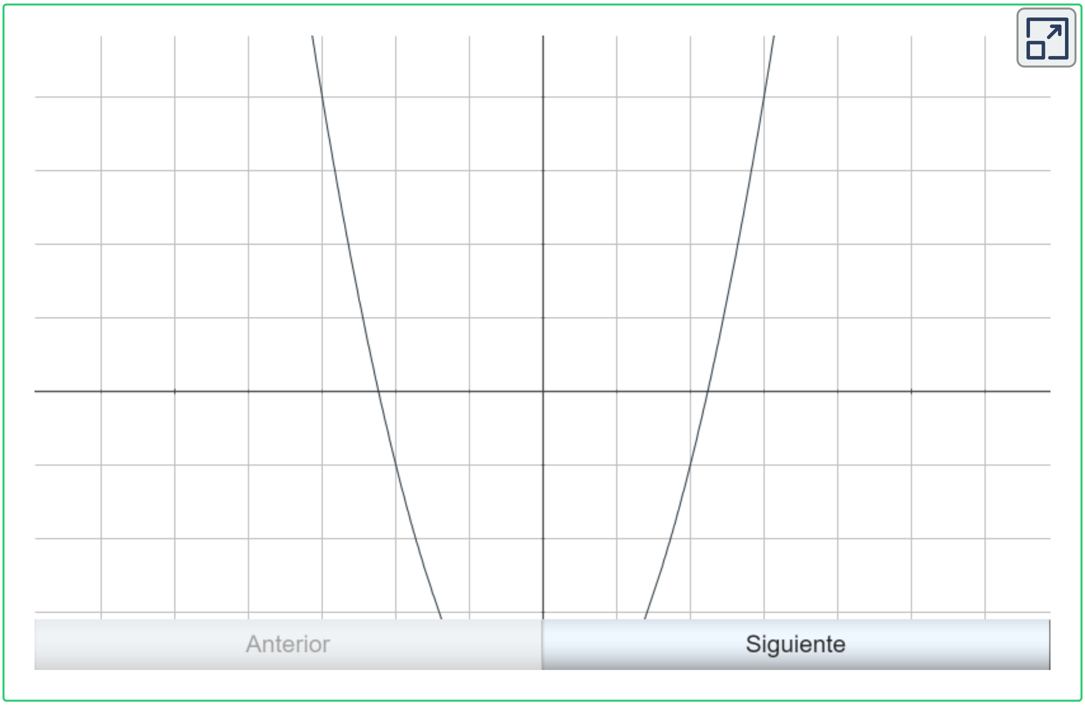


Figura 4.3. Método de Newton utilizado para aproximar $\sqrt{5}$.

Notemos que obtuvimos el mismo valor para x_4 y x_5, por lo tanto, podemos dejar de aplicar el método de Newton ya que es poco probable que el valor cambie si volvemos a aplicarlo. Entonces, podemos suponer que

$$\sqrt{5} \approx 2.36068$$

El método de Newton puede fallar cuando:

- La derivada de x_n es igual a 0 y $f(x_n) \neq 0$, esto significa que la tangente nunca intersecta al eje x.
- Existe más de una x que cumple $f(x) = 0$, en este caso debemos elegir un x_0 que esté más cerca a la solución que buscamos.

- En ocasiones puede fallar completamente, por ejemplo, si escogemos un x_0 tal que las aproximaciones continúen alternando entre dos valores y nunca se acerquen a la solución.

4.2 Regla de la cadena. Derivada de la función inversa.

La regla de la cadena nos permite derivar composiciones de funciones. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones diferenciables y sea $h(x)$ la composición de ambas funciones $h(x) = (f \circ g)(x)$ la derivada de $h(x)$ es igual a:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ la derivada de y es igual a:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{du}y \cdot \frac{d}{dx}u$$

Por ejemplo, usemos la regla de la cadena para derivar la función $h(x) = \sqrt{3x^2 - 5}$. Lo primero que haremos será identificar $f(x)$ y $g(x)$, que en este caso son

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = 3x^2 - 5$$

Ahora, derivamos $f(x)$ y $g(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = 6x$$

Por último, aplicamos la regla de la cadena

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 5}}6x$$

$$h'(x) = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 5}}$$

4.2.1 Regla de la cadena para potencias de funciones

Podemos utilizar la regla de la cadena para derivar funciones de la forma $h(x) = g(x)^n$, $h(x)$ es una composición de las funciones $f(x) = x^n$ y $g(x)$, entonces, $f'(x) = nx^{n-1}$ y aplicando la regla de la cadena tenemos que

$$h'(x) = ng(x)^{n-1}g'(x)$$

4.2.2 Derivada de la función inversa

Sea $f(x)$ una función invertible y derivable, como $f(x)$ es derivable podemos pensar que su inversa también lo es. Para encontrar la derivada de $f^{-1}(x)$ empecemos recordando que:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Derivamos ambos lados de la ecuación

$$\frac{d}{dx}f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx}x$$

Como el lado izquierdo de la ecuación es una composición de funciones podemos aplicar la regla de la cadena

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))' = 1$$

Despejamos del lado izquierdo para obtener la derivada de la inversa

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Veamos un ejemplo, usemos la ecuación anterior para encontrar la derivada de $g(x) = \sqrt{x+1}$. La función inversa de $g(x)$ es $f(x) = x^2 - 1$ con derivada $f'(x) = 2x$, entonces, la derivada de $g(x)$ es igual a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})}$$

Ahora, derivamos la función directamente para comprobar que el resultado sea correcto

$$g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2(\sqrt{x+1})}$$

4.3 Curvas parametrizadas $c(t) = (x(t), y(t))$. Derivadas de y respecto a x.

Supongamos que queremos encontrar la derivada $\frac{d}{dx}y$ de una función $f(x)$ escrita en forma paramétrica, es decir, $f(x)$ está descrita por el par de ecuaciones:

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

Una manera de encontrar $\frac{d}{dx}y$ sería eliminar el parámetro, otra manera de hacerlo sin tener que eliminar el parámetro sería la siguiente: Consideremos la derivada de y respecto a t, usando la regla de la cadena tenemos que $\frac{d}{dt}y$ es igual a

$$\frac{d}{dt}y = \frac{d}{dx}y\frac{d}{dt}x$$

Ahora, despejamos la ecuación para obtener $\frac{d}{dx}y$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x}$$

Veamos un ejemplo, sean $x = t^2$ y $y = t^3 - 2t$ calculemos $\frac{d}{dx}y$. Primero derivamos x y y respecto a t:

$$\frac{d}{dt}x = 2t \quad \frac{d}{dt}y = 3t^2 - 2$$

Aplicando la regla de la cadena obtenemos:

$$\frac{d}{dx}y=\frac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x}=\frac{3t^2-2}{2t}$$

Figura 4.4. Gráfica de la curva paramétrica $x=t^2$, $y=t^3-2t$ en el intervalo $[0,3]$.

4.3.1 Segunda derivada

Para calcular la segunda derivada aplicamos la regla de la cadena dos veces de la siguiente manera:

$$\frac{d^2}{dx^2}y=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x}\right)\frac{d}{dx}t$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{d}{dt}y}{\frac{d}{dt}x}\right)\frac{d}{dx}t=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}y\right)}{\frac{d}{dt}x}$$

Por ejemplo, calculemos la segunda derivada del ejemplo anterior:

$$\frac{d^2}{dx^2}y=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}y\right)}{\frac{d}{dt}x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3t^2-2}{2t}\right)}{2t}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y=\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{3}{2}}{2t}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y=\frac{3t^2+2}{4t^3}$$

4.4 Polinomios. Raíces de polinomios. Métodos numéricos.

La diferenciación numérica es un método para aproximar la derivada de una función definida como un conjunto discreto de puntos o si la función es difícil de derivar. Sea la función $f(x)$ y el punto x_0 lo primero que haremos será aproximar la función usando un polinomio de interpolación de Lagrange.

> ***Definición 4.1***. **Interpolación de Lagrange:** El método de interpolación de Lagrange es una forma de encontrar el polinomio que toma ciertos valores en puntos arbitrarios. Sea un conjunto de N puntos:
>
> $$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$$
>
> El polinomio de interpolación de grado $N-1$ está dado por:
>
> $$P(x) = \phi_1(x)y_1 + \phi_2(x)y_2 + \cdots + \phi_N(x)y_N$$
>
> Donde la función $\phi_i(x)$ está dada por
>
> $$\phi_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_N)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_N)}$$

Si usamos un polinomio lineal L_1 necesitaremos dos puntos:

$$(x_0, f(x_0)) \quad (x_0+h, f(x_0+h))$$

Entonces:

$$f(x) \approx L_1(x)$$

$$f(x) \approx \frac{x-(x_0+h)}{x_0-(x_0+h)}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_0+h-x_0}f(x_0+h)$$

$$f(x) \approx \frac{x-x_0-h}{-h}f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}f(x_0+h)$$

Ahora, diferenciamos el polinomio de interpolación para obtener una aproximación a la derivada de $f(x)$:

$$f(x) \approx \frac{-(x-x_0-h)f(x_0)+(x-x_0)f(x_0+h)}{h}$$

$$f(x) \approx \frac{(x-x_0)f(x_0+h)-(x-x_0-h)f(x_0)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{h(f(x_0+h)-f(x_0))}{h^2}$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

A esta aproximación la llamamos aproximación progresiva, si $h < 0$ obtenemos una aproximación regresiva:

$$f'(x) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

Para obtener una aproximación de segundo orden de la derivada necesitaremos un polinomio de interpolación cuadrático $L_2(x)$, para esto utilizaremos tres puntos:

$$(x_1, f(x_1)) \quad (x_2, f(x_2)) \quad (x_3, f(x_3))$$

El polinomio de interpolación será igual a:

$$f(x) \approx L_2(x)$$

$$f(x) \approx P_1 f(x_1) + P_2 f(x_2) + P_3 f(x_3)$$

$$P_1 = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$P_2 = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$P_3 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Derivando el polinomio de interpolación tenemos que:

$$f'(x) \approx P_1' f(x_1) + P_2' f(x_2) + P_3' f(x_3)$$

$$P_1' = \frac{2x - x_2 - x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$P_2' = \frac{2x - x_1 - x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$P_3' = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Realizando las siguientes sustituciones tenemos que, $x_1 = x$, $x_2 = x + h$, $x_3 = x + 2h$:

$$f'(x) \approx \frac{-3}{2h} f(x) + \frac{2}{h} f(x+h) + \frac{-1}{2h} f(x+2h)$$

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

A esta fórmula la llamamos fórmula progresiva de segundo orden, si reemplazamos h por $-h$ obtenemos una fórmula regresiva de segundo orden:

$$f'(x) \approx \frac{3f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{2h}$$

Si realizamos las siguientes substituciones, $x_1 = x$, $x_2 = x - h$, $x_3 = x + h$, obtenemos una fórmula centrada de segundo orden:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Veamos un ejemplo, sea $f(x) = x^2 \ln x$ usemos las fórmulas de derivación numérica para calcular $f'(2)$ y compararemos los resultados obtenidos con el resultado real $f'(x) = 4.772588$. Primero, veamos las fórmulas de primer orden:

$$f'(x) \approx \frac{(2+h)^2 \sin(2+h) - 4\sin(2)}{h}$$

$$f'(x) \approx \frac{2\ln(2) - (2-h)^2 \ln(2-h)}{h}$$

h	Progresiva	Error	Regresiva	Error
1	7.1149	-2.3423	2.7725	2
0.1	4.9935	-0.2209	4.5549	0.2176
0.01	4.7945	-0.0219	4.7506	0.0219
0.001	4.7747	-0.0021	4.7704	0.0021

Ahora, veamos las funciones de segundo orden:

$$f'(x) \approx \frac{-12\ln(2) + 4*(2+h)^2\ln(2+h) - (2+2h)^2\ln(2+2h)}{2h}$$

$$f'(x) \approx \frac{12\ln(2) - 4*(2-h)^2\ln(2-h) + 2*(2-2h)^2\ln(2-2h)}{2h}$$

$$f'(x) \approx \frac{(2+h)^2\ln(2+h) - (2-h)^2\ln(2-h)}{2h}$$

h	Progresiva	Error	Regresiva	Error	Centrada	Error
1	4.5257	0.2468	-	-	4.9437	-0.17
0.1	4.7693	0.0032	4.7691	0.0034	4.7742	-0.0016
0.01	4.7725	0.000028	4.7725	0.000028	4.7726	-0.000021
0.001	4.7725	-0.0000012	4.7725	-0.0000012	4.7725	-0.0000012

Notemos que el error disminuye al reducir el valor de h y que las fórmulas de segundo orden son mucho más precisas que las fórmulas de primer orden y que entre las fórmulas de segundo orden la fórmula centrada es más precisa.

En el siguiente interactivo se muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 \ln x$, usando el menú puedes cambiar el tipo de función para aproximar el valor de $f'(x)$ usando derivación numérica y al arrastra el punto azul puedes cambiar el valor de x, observa como se va acercando más la aproximación al valor real de $f'(x)$ al acercarse h a 0.

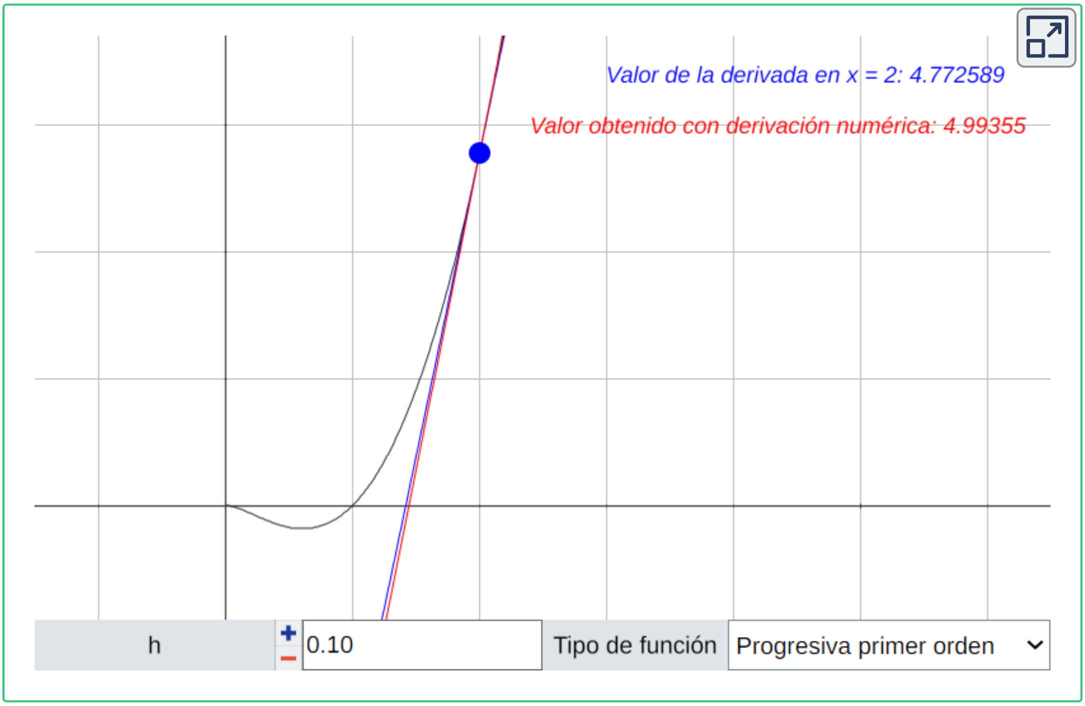


Figura 4.5. Derivación numérica.

4.5 Función exponencial. El número e. Logaritmos.

Llamamos funciones exponenciales a funciones de la forma:

$$f(x) = a^x$$

Donde a es un número positivo real distinto de 1. Supongamos que queremos derivar una función exponencial, si $a = e \approx 2.7128$ entonces podemos utilizar la fórmula:

$$(e^x)' = e^x$$

Ahora, veamos el caso donde $a \neq e$. Usando propiedades de los logaritmos podemos escribir a a como:

$$a = e^{\ln(a)}$$

Y usando propiedades de las potencias podemos escribir a la función exponencial como:

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x\ln(a)}$$

Entonces, aplicando la regla de la cadena tenemos que:

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)'$$

$$\left(e^{x\ln(a)}\right)' = e^{x\ln(a)}(x\ln(a))'$$

$$e^{x\ln(a)}(x\ln(a))' = e^{x\ln(a)}\ln(a)$$

$$e^{x\ln(a)}\ln(a) = a^x\ln(a)$$

$$\therefore (a^x)' = a^x\ln(a)$$

Veamos un ejemplo, sea la función $f(x) = 7^{3x^2} - e^{5x}$ calculemos $f'(x)$:

$$f'(x) = 6(7^{3x^2}\ln(7)) - 5e^{5x}$$

Notemos que el primer y el segundo término son de la forma a^u y e^u respectivamente, por lo tanto, utilizamos la regla de la cadena con la fórmula de las derivadas de una función exponencial. En el caso del primer término $u = 3x^2$ y $u' = 6$ por lo que su derivada es igual a $6(7^{3x^2}\ln(7))$, para el segundo término $u = 5x$ y $u' = 5$ por lo que su derivada es igual a $-5e^{5x}$.

4.5.1 Logaritmos

Recordemos que la derivada del logaritmo natural, $\ln(x)$ o $\log_e(x)$, es igual a:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

Utilizando la fórmula de la derivada del logaritmo natural podemos encontrar la fórmula de un logaritmo de base a. Sea $f(x) = \log_a(x)$ tal que $a > 0$ y $a \neq 1$, primero aplicamos la fórmula de cambio de base del logaritmo.

Definición 4.2. **Cambio de base de un logaritmo:** Sean b, x y k números reales positivos tenemos que:

$$\log_b(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(b)}$$

Entonces, aplicando la fórmula de cambio de base reescribimos al logaritmo de la siguiente manera:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Derivamos ambos lados de la ecuación:

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{d}{dx}\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Factorizamos la constante:

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\frac{d}{dx}\ln(x)$$

Por lo tanto, la derivada del logaritmo de base a es igual a:

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

Veamos un ejemplo, sea la función $f(x) = e^{2x^3}\log_4(2x-5)$ calculemos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = (e^{2x^3}\log_4(2x-5))'$$

$$f'(x) = (e^{2x^3})'\log_4(2x-5) + e^{2x^3}(\log_4(2x-5))'$$

$$f'(x) = (6x^2 * e^{2x^3})\log_4(2x-5) + e^{2x^3}\left(\frac{2}{(2x-5)\ln 4}\right)$$

$$\therefore f'(x) = (6x^2 * e^{2x^3})\log_4(2x-5) + \frac{2e^{2x^3}}{(2x-5)\ln 4}$$

4.6 Funciones trigonométricas y sus inversas.

Para calcular las derivadas de las funciones seno y coseno, primero consideremos las siguientes propiedades:

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \qquad \lim_{\theta\to\infty}\frac{\cos\theta-1}{\theta}=0$$

Entonces, utilizando la definición de derivada tenemos que:

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

Utilizamos la siguiente identidad trigonométrica y sustituimos en la ecuación anterior:

$$\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}$$

Reordenamos la fracción:

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin x\cos h-\sin x}{h}+\frac{\cos x\sin h}{h}\right)$$

Factorizamos $\sin x$ y $\cos x$:

$$\frac{d}{dx}\sin x=\lim_{h\to 0}\left(\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right)$$

Aplicamos los límites:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sin x = \sin x(0) + \cos x(1)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

Para la derivada de $\cos x$ realizamos un proceso similar:

$$\frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \cos x}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \sin h}{h}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = \cos x(0) - \sin x(1)$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

El resto de las funciones trigonométricas puede ser expresado como cocientes de seno o coseno de la siguiente manera:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Por lo que podemos calcular sus derivadas utilizando la regla del cociente, por ejemplo, para la derivada de la función $\sec x$:

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos x} = \frac{(0)\cos x - (1)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$$

Las derivadas de las funciones trigonométricas restantes pueden ser obtenidas de manera similar, las fórmulas son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x \quad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

En el siguiente interactivo se muestran las gráficas de distintas funciones trigonométricas junto con las gráficas de sus derivadas, utiliza el menú para seleccionar entre las funciones seno, coseno y tangente. Mueve el punto rojo para observar el valor de la pendiente en ese punto.

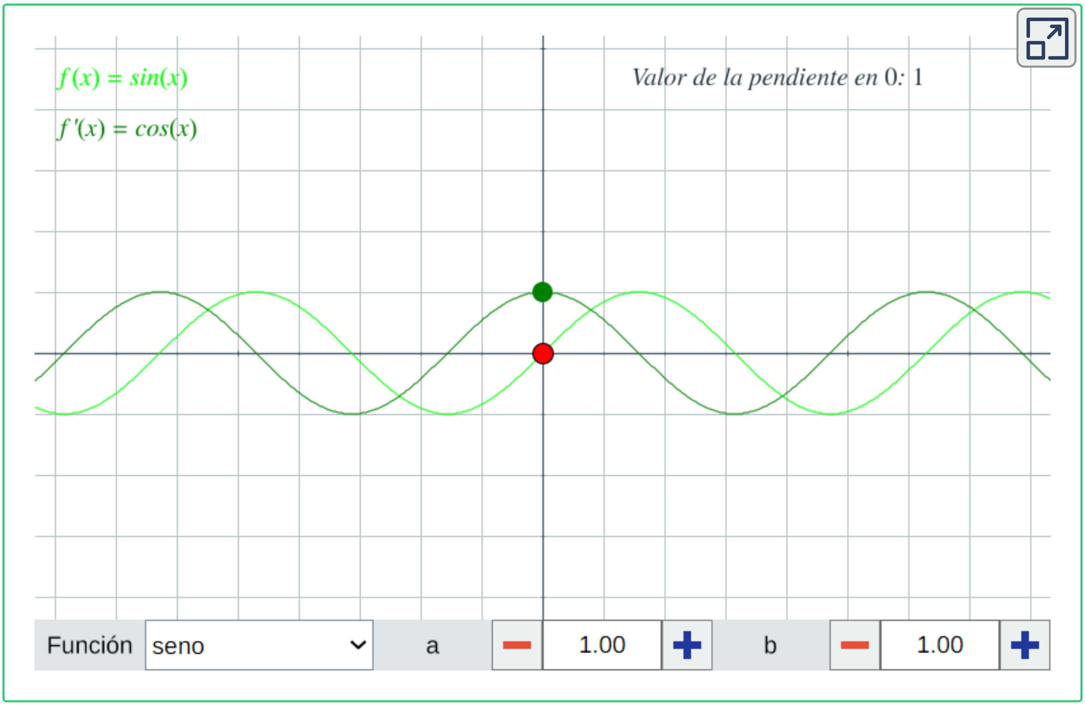


Figura 4.6. Funciones trigonométricas y sus derivadas.

4.6.1 Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas inversas, como su nombre lo indica, son las funciones inversas de las funciones trigonométricas, son utilizadas cuando queremos obtener el ángulo a partir del seno, coseno, etc. Se denotan de manera similar a las funciones inversas: $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, etc. y se leen como: seno inverso, coseno inverso, tangente inversa, etc., también podemos denotarlas agregando el prefijo "arco": $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, etc. , y se leen como: arcoseno, arcocoseno, arcotangente, etc.

Recordemos que la derivada de una función inversa es igual a:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Empecemos con la derivada del seno inverso:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}(x))}$$

Podemos utilizar la siguiente identidad trigonométrica para sustituir la función coseno en la ecuación:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}(x))}}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Podemos obtener la derivada de la función coseno inverso de manera similar:

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = \frac{1}{-\sin(\cos^{-1}(x))}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\cos^{-1}(x))}}$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas inversas restantes son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}\csc^{-1}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

4.7 Derivación implícita.

Las derivadas que hemos visto hasta ahora son para funciones de la forma $y = f(x)$ donde y depende explícitamente de x. Por otro lado tenemos ecuaciones como esta:

$$x^2 + y^2 = 9$$

Que es la ecuación que describe a un círculo de radio 3. En este caso y no está expresada enteramente en términos de x, a este tipo de ecuaciones las llamamos ecuaciones o funciones implícitas. Para encontrar la derivada de la ecuación anterior podríamos despejar la ecuación para obtener y:

$$y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

El problema es que al despejar obtenemos 2 soluciones diferentes: $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$, en el siguiente interactivo se muestran las gráficas de las tres ecuaciones:

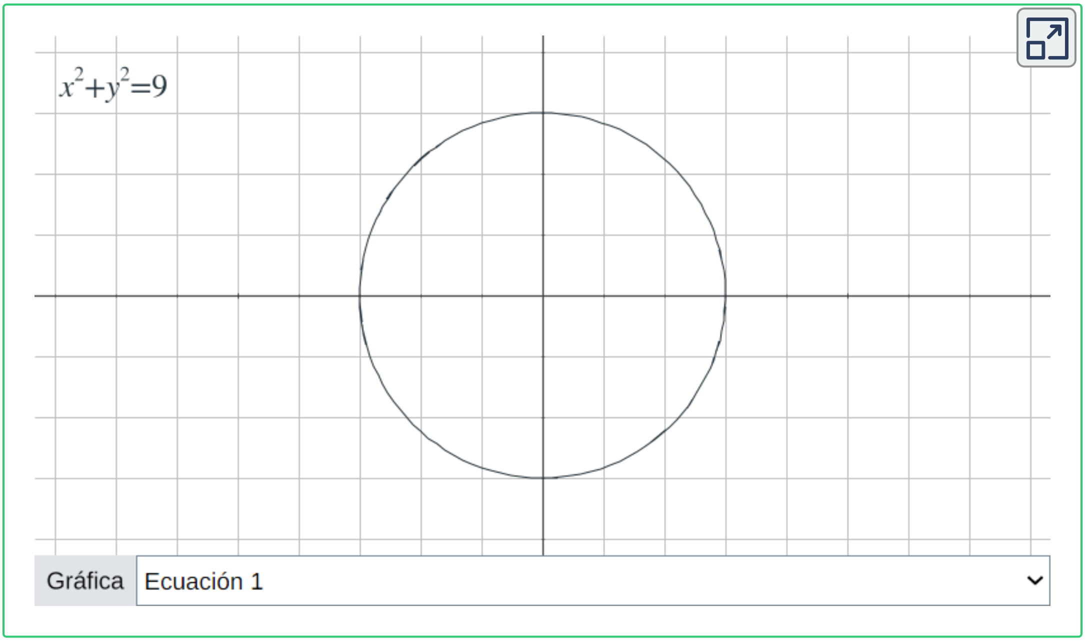


Figura 4.7. Gráficas de las ecuaciones $x^2+y^2=9,\ y=\sqrt{9-x^2}$ y $y=-\sqrt{9-x^2}$.

Podemos ver que ninguna de las dos soluciones representa la gráfica completa. La técnica de derivación implícita nos permite calcular la derivada de funciones implícitas sin tener que despejar variables. Los pasos para realizar la derivación implícita son los siguientes:

- Derivamos ambos lados de la ecuación, tratando y como una función de x.
- Separamos los factores que contienen $\frac{d}{dx}y$ en distintos lados de la ecuación.
- Despejamos $\frac{d}{dx}y$.

Usando derivación implícita podemos encontrar la derivada del ejemplo anterior. Primero derivamos ambos lados de la ecuación, tratando a y como una función de x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}9$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}9$$

$$2x + 2y * \frac{d}{dx}y = 0$$

Pasamos el factor $2x$ al lado derecho de la ecuación:

$$2y * \frac{d}{dx}y = -2x$$

Por último despejamos $\frac{d}{dx}y$:

$$\frac{d}{dx}y = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Con lo que obtenemos la derivada de la función implícita $x^2 + y^2 = 9$ que es igual a:

$$\frac{d}{dx}y = -\frac{x}{y}$$

Capítulo V
Métodos de integración

5.1 Integración por partes. Integración por substitución.

La integración por partes nos permite integrar funciones que son el resultado del producto de otras dos funciones. Sea $h(x) = f(x)g(x)$ usando la regla del producto tenemos que:

$$h'(x) = (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int (f(x)g(x))'dx = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

Ahora, despejamos el término $\int f(x)g'(x)dx$:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Para que la fórmula sea más fácil de leer hacemos las siguientes substituciones: $u = f(x)$ y $v = g(x)$, sus derivadas serían $du = f'(x)dx$ y $dv = g'(x)dx$. Entonces, la fórmula sería la siguiente:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

A esta fórmula la conocemos como la fórmula de integración por partes. Para usar la fórmula primero identificamos u y dv y calculamos du y v, sabremos si identificamos correctamente u y dv si la integral que obtenemos al usar la fórmula es una que si podamos integrar.

Veamos un ejemplo, usemos integración por partes para calcular la siguiente integral:

$$\int x^2 \cos(2x)dx$$

Lo primero que tenemos que hacer es identificar que términos serán u y dv. Generalmente, la función que escogeremos como u será la primera que encontremos de la siguiente lista:

1. Logaritmos
2. Funciones trigonométricas inversas
3. Funciones algebraicas (como $x^2 + 1$)
4. Funciones trigonométricas
5. Funciones exponenciales

En este caso, x^2 tiene precedencia sobre $\cos(2x)$ ya que es una función algebraica, entonces, aplicando la fórmula de integración por partes tenemos que:

$$u = x^2 \qquad dv = \cos(2x) \qquad v = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$\int x^2 \cos(2x)dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - \int x \sin(2x)dx$$

Para resolver la nueva integral obtenida volvemos a aplicar integración por partes:

$$u = x \qquad dv = \sin(2x) \qquad v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int x \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)dx$$

$$\int x \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Sustituimos el resultado en la ecuación anterior:

$$\int x^2 \cos(2x)dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) - \left(-\frac{1}{2}x\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)$$

$$\int x^2 \cos(2x)dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x) + \frac{1}{2}x\cos(2x) - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

5.1.1 Integración por substitución

La integración por substitución, también llamada integración por cambio de variable, es una técnica de integración relacionada con la regla de la cadena que nos ayuda a encontrar antiderivadas. Para aplicar la integración por substitución lo primero que haremos es buscar que la integral este escrita de la siguiente forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

Por ejemplo, en la siguiente integral:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx$$

$f(x)=\sqrt{x},\ \ g(x)=1+x^2$ y $\ g'(x)=2x$. Una vez que la integral está escrita de esta forma podemos sustituir $g(x)$ por la variable u y $g'(x)$ por du:

$$\int \sqrt{u}du=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

Finalmente, sustituimos u por $g(x)$:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

Decimos que la integración por substitución esta relacionada con la regla de la cadena ya que podemos verla como si fuera la inversa de la regla de la cadena.

Veamos otro ejemplo, podemos usar integración por substitución para resolver la siguiente integral:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$$

En este caso, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = 1 + 2x^2$ y $g'(x) = 4xdx$. Pero el término $4x$ no se encuentra en la integral por lo que haremos la siguiente substitución:

$$u = 1 + 2x^2$$

$$du = 4xdx$$

$$\frac{du}{4} = xdx$$

$$\int \frac{du}{4\sqrt{u}} = \frac{1}{4}(2\sqrt{u}) = \frac{\sqrt{u}}{2} + C$$

Sustituyendo u por $g(x)$ tenemos que:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x^2}} = \frac{\sqrt{1+2x^2}}{2} + C$$

5.2 Cambio de variable.

Los pasos a seguir para integrar una función por cambio de variable son los siguientes:

1. Escoger una substitución tal que $u = g(x)$.
2. Obtener $du = g'(x)$.
3. Utilizando las ecuaciones de los dos pasos anteriores, reescribir la integral tal que sólo quede la variable u.
4. Evaluar la nueva integral obtenida.
5. Reemplazar u por $g(x)$ en el resultado obtenido en el paso anterior.

5.2.1 Cambios de variable comunes

- Funciones exponenciales: En el caso de una función exponencial escogemos u como el exponente y calculamos la integral $\int e^u du$. **Ejemplo:**

$$\int e^{5x} dx$$

$$u = 5x \quad du = 5dx$$

$$\int e^{5x} dx = \int e^u \frac{du}{10}$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{10} \int e^u du$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{e^u}{10}$$

$$\int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{10} + C$$

- Fracciones: Generalmente, es conveniente escoger u como el denominador de la fracción. **Ejemplo:**

$$\int \frac{3x}{2x^2+7} dx$$

$$u = 2x^2 + 7 \quad du = 4xdx$$

$$\int \frac{3x}{2x^2+7} dx = \int \frac{3x}{u} \frac{du}{4x}$$

$$\int \frac{3x}{2x^2+7} dx = \frac{3}{4} \int \frac{1}{u} du$$

$$\int \frac{3x}{2x^2+7} dx = \frac{3}{4} \ln u$$

$$\int \frac{3x}{2x^2+7} dx = \frac{3\ln(2x^2+7)}{4} + C$$

- Funciones bajo un radical: Las funciones que se encuentren bajo un radical son una buena opción para escoger como u. **Ejemplo:**

$$\int 4x^2 \sqrt{x^3+2} dx$$

$$u = x^3 + 2 \quad du = 3x^2 dx$$

$$\int 4x^2\sqrt{x^3+2}dx = \int 4x^2\sqrt{u}\frac{du}{3x^2}$$

$$\int 4x^2\sqrt{x^3+2}dx = \frac{4}{3}\int \sqrt{u}du$$

$$\int 4x^2\sqrt{x^3+2}dx = \frac{8u^{\frac{3}{2}}}{9}$$

$$\int 4x^2\sqrt{x^3+2}dx = \frac{8(x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

- Composición de funciones: Si identificamos una composición de funciones en el integrando y conocemos una regla para integrar la función externa entonces escogemos u como la función interna. **Ejemplo:**

$$\int \sin(7x+6)dx$$

$$u = 7x + 6 \quad du = 7dx$$

$$\int \sin(7x+6)dx = \frac{1}{7}\int \sin(u)du$$

$$\int \sin(7x+6)dx = -\frac{1}{7}\cos(u)$$

$$\int \sin(7x+6)dx = -\frac{1}{7}\cos(7x+6) + C$$

5.3 Métodos numéricos.

Los métodos numéricos de integración son útiles para aproximar el valor de la integral definida de funciones cuya antiderivada es difícil de calcular. Anteriormente vimos una forma de aproximar derivadas definidas dividiendo el área bajo la curva en rectángulos y sumando el área de todos los rectángulos, podemos mejorar este método utilizando trapecios en vez de rectángulos.

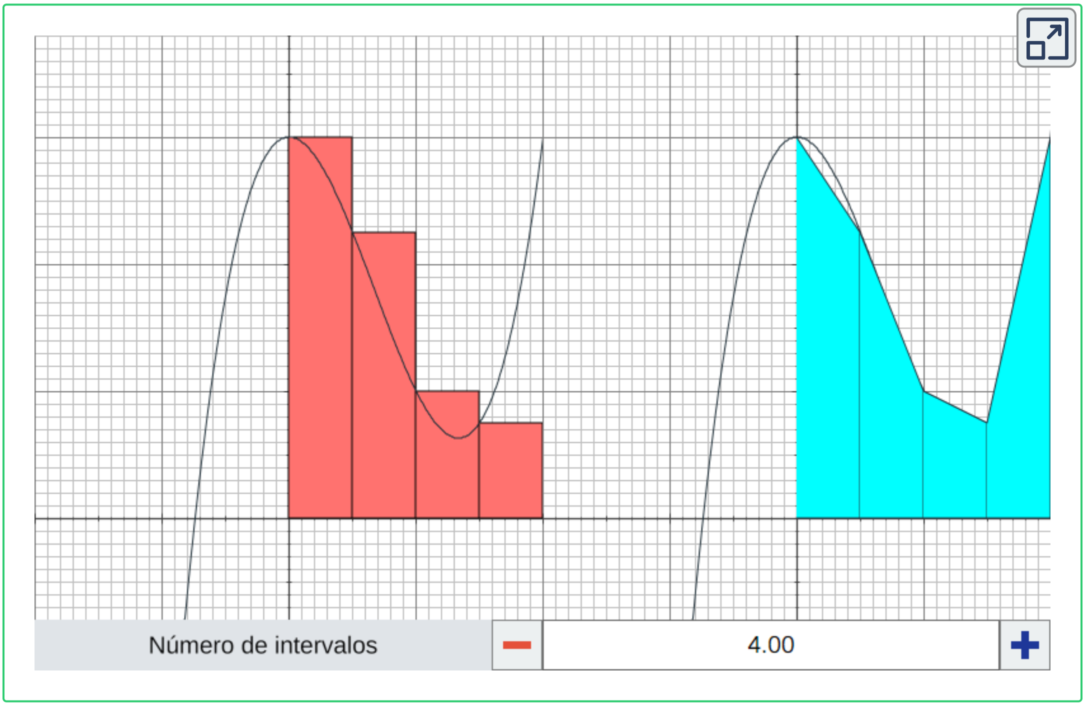


Figura 5.1. Regla del trapecio.

A este método lo llamamos regla del trapecio. Recordemos que el área de un trapecio con altura h y bases de longitud b_1 y b_2 está dada por la fórmula $a = \frac{(b_1+b_2)h}{2}$.

En este caso, los trapecios tienen una altura de Δx con bases de longitud $f(x_i)$ y $f(x_{i+1})$, por lo tanto, el área de cada trapecio está dada por:

$$a_i = \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))\Delta x}{2}$$

Si sumamos el área de los n trapecios tenemos que:

$$\frac{(f(x_0) + f(x_1))\Delta x}{2} + \frac{(f(x_1) + f(x_2))\Delta x}{2} + \cdots + \frac{(f(x_{n-1}) + f(x_n))\Delta x}{2}$$

$$\left(\frac{f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right)\Delta x$$

$$T_n = \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right)\Delta x$$

Entonces, sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ podemos aproximar su integral usando la regla del trapecio con la siguiente fórmula:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)dx$$

Veamos un ejemplo, usaremos la regla del trapecio para aproximar la integral $\int_0^2 3x^2 - 2dx$ utilizando 5 subintervalos. Utilizando la fórmula de la regla del trapecio tenemos que:

$$T_5 = \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + \frac{f(x_5)}{2}\right)\Delta x$$

Recordemos que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, en este caso Δx es igual a:

$$\Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5}$$

Los valores de la función en cada punto x_i serán los siguientes:

$$f(0) = 3(0)^2 - 2 = -2$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = 3\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 2 = -\frac{38}{25}$$

$$f\left(\frac{4}{5}\right) = 3\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 = -\frac{2}{25}$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right) = 3\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 2 = \frac{58}{25}$$

$$f\left(\frac{8}{5}\right) = 3\left(\frac{8}{5}\right)^2 - 2 = \frac{142}{25}$$

$$f(2) = 3(2)^2 - 2 = 10$$

Sustituyendo estos valores obtenemos:

$$T_5 = \left(-\frac{2}{2} - \frac{38}{25} - \frac{2}{25} + \frac{58}{25} + \frac{142}{25} + \frac{10}{2}\right)\frac{2}{5}$$

$$T_5 = \frac{104}{25} = 4.16$$

$$\therefore \int_0^2 3x^2 - 2dx \approx 4.16$$

5.3.1 Método de Simpson

El método de Simpson es similar a la regla del trapecio, sólo que en lugar de utilizar trapecios para aproximar el área bajo la curva se utilizan polinomios de segundo grado. Para obtener una aproximación de la integral $\int_a^b f(x)dx$ primero dividimos el intervalo $[a, b]$ en un número par n de subintervalos de longitud Δx. Por cada par de intervalos consecutivos $[x_{i-1}, x_i]$, $[x_i, x_{i+1}]$ aproximamos $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx$ con la integral $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)dx$, siendo $p(x)$ la función cuadrática $p(x) = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$, $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

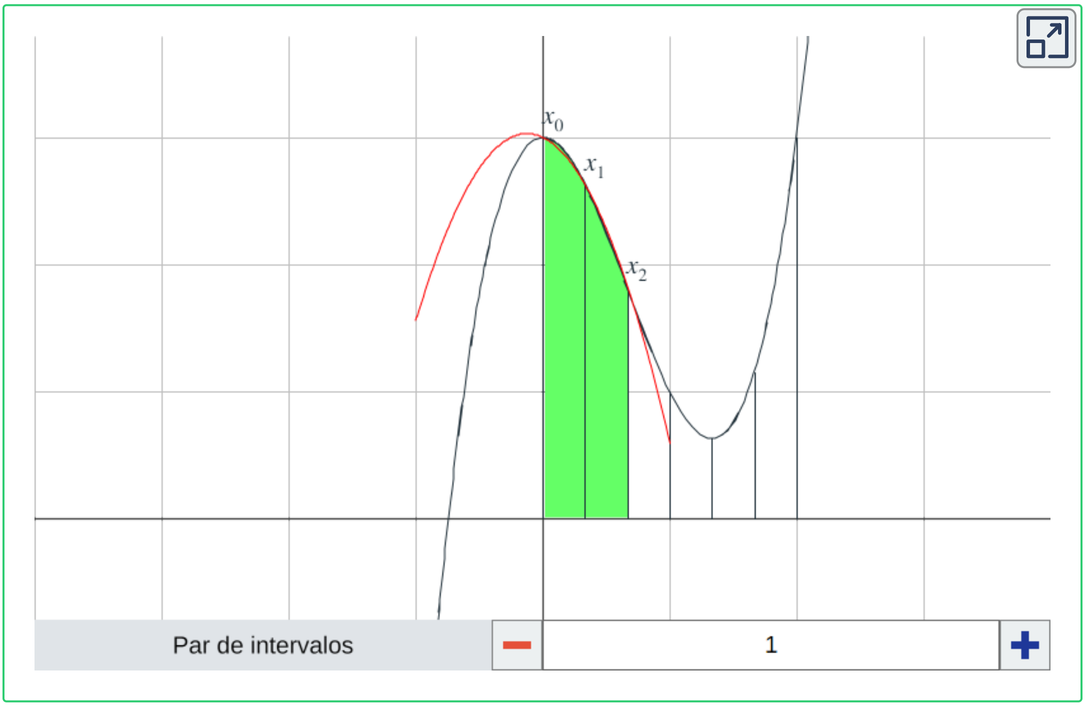


Figura 5.2. Método de Simpson.

Definición 5.1. **Método de Simpson:** Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Sea el intervalo $[a,b]$ dividido en un número par n de intervalos, cada uno de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ con sus extremos en los puntos $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Definiendo la siguiente ecuación:

$$S_n = \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$$

Veamos un ejemplo, utilicemos el método de Simpson con $n = 6$ intervalos para aproximar la integral $\int_0^5 x^2$. Notemos que los coeficientes de la ecuación del método de Simpson siguen el siguiente patrón:

$$1, 4, 2, 4, 2, \ldots, 4, 2, 4, 1$$

Entonces, aplicando el método de Simpson tenemos que:

$$\Delta x = \frac{5}{6}$$

$$S_6 = \frac{5}{18}\left(f(0) + 4f\left(\frac{5}{6}\right) + 2f\left(\frac{10}{6}\right) + 4f\left(\frac{15}{6}\right) + 2f\left(\frac{20}{6}\right) + 4f\left(\frac{25}{6}\right) + f\left(\frac{30}{6}\right)\right)$$

$$S_6 = \frac{5}{18}\left(0 + \frac{100}{36} + \frac{200}{36} + 25 + \frac{200}{9} + \frac{625}{9} + 25\right)$$

$$S_6 = \frac{125}{3}$$

$$\therefore \int_0^5 x^2 = \frac{125}{3}$$

Capítulo VI

Series

6.1 Polinomio de Taylor.

> ***Definición 6.1***. **Expansión en serie:** Llamamos expansión en serie al método de aproximación de una función por medio de la suma de un número n de términos.

El polinomio de Taylor, también llamado serie de Taylor, es una expansión en serie de una función $f(x)$ en el punto $x = a$. Si $f(x)$ tiene n derivadas en a, entonces el polinomio de Taylor de orden n está dado por la fórmula:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En caso de que $a = 0$ el polinomio $p_n(x)$ también es conocido como polinomio de Maclaurin. En la siguiente tabla se muestran algunos polinomios de Maclaurin usados comúnmente:

Función	Polinomio de Maclaurin
$\dfrac{1}{1-x}$	$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$
e^x	$p_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$
$\cos x$	$p_n(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin x$	$p_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\ln(1+x)$	$p_n(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$
$\tan^{-1} x$	$p_n(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$

En el siguiente interactivo se muestran las gráficas de las funciones de la tabla junto con las gráficas de sus respectivos polinomios de Maclaurin, aumenta el valor de la variable n para aumentar el orden del polinomio y observa lo que sucede:

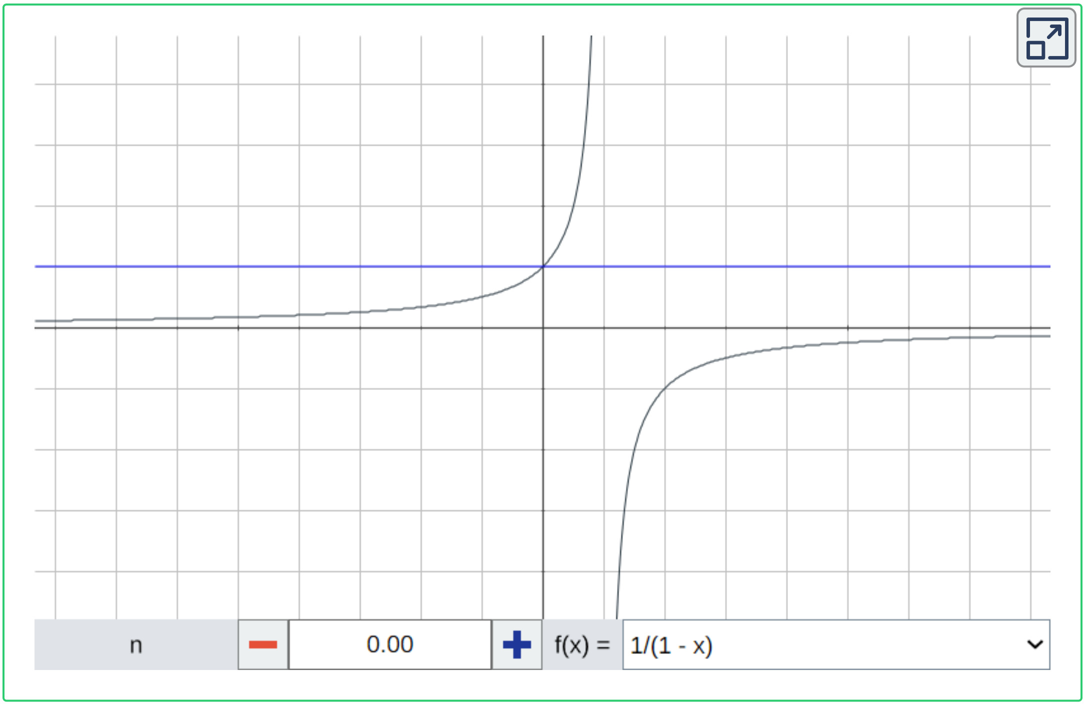


Figura 6.1. Polinomios de Maclaurin.

Veamos un ejemplo, sea $f(x) = xe^x$ encontremos el polinomio de Taylor de orden $n = 4$ centrado en $a = 1$:

$$p_0 = e$$

$$p_1 = e + 2e(x-1)$$

$$p_2 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2$$

$$p_3 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3$$

$$p_4 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3 + \frac{5e}{4!}(x-1)^4$$

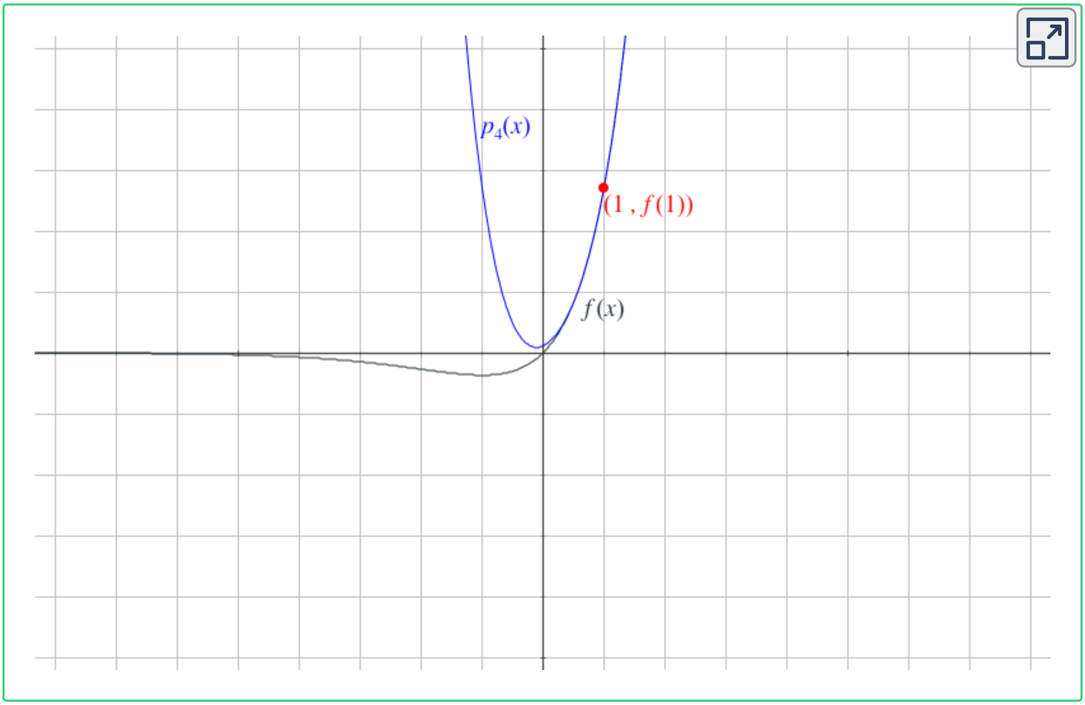


Figura 6.2. Polinomio de Taylor de orden $n = 4$ centrado en $a = 1$ para la función $f(x) = xe^x$.

Utilizando el polinomio de Taylor pudimos obtener una buena aproximación de $f(x)$ para valores de x cercanos a $a = 1$.

6.2 Cálculo de valores de una función con ayuda de las series.

Uno de los usos más importantes de las series es utilizar una porción de la serie de $f(x)$ para aproximar la misma función $f(x)$. El teorema de Taylor nos ayuda a acotar el error cuando usamos un polinomio de Taylor para aproximar el valor de una función.

> ***Teorema 6.1***. **Teorema de Taylor:** Sea $f(x)$ una función que puede ser diferenciada $n+1$ veces definida sobre el intervalo I conteniendo el número real a, entonces para cada $x \in I$ se cumple que:
>
> $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$
> $$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$
>
> Donde R_n es llamado el resto y está dado por
>
> $$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
>
> Para algún número real c entre a y x.

Si $R_n(x)$ se aproxima a 0 conforme n se aproxima a ∞ decimos que la serie de Taylor generada por $f(x)$ en $x=a$ converge a $f(x)$ en I. Si existe un número real M tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ para toda $x \in I$ entonces

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Veamos un ejemplo, utilizando el polinomio de Taylor obtenido en el ejemplo anterior para la función $f(x) = xe^x$, aproximemos el valor de $2e^2$. Primero aumentaremos el orden del polinomio a 7 para obtener una mejor aproximación:

$$p_4 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3 + \frac{5e}{4!}(x-1)^4$$

$$p_5 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3 + \frac{5e}{4!}(x-1)^4 + \frac{6e}{5!}(x-1)^5$$

$$p_6 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3 + \frac{5e}{4!}(x-1)^4$$

$$+\frac{6e}{5!}(x-1)^5 + \frac{7e}{6!}(x-1)^6$$

$$p_7 = e + 2e(x-1) + \frac{3e}{2}(x-1)^2 + \frac{4e}{3!}(x-1)^3 + \frac{5e}{4!}(x-1)^4$$

$$+\frac{6e}{5!}(x-1)^5 + \frac{7e}{6!}(x-1)^6 + \frac{8e}{7!}(x-1)^7$$

Evaluamos p_7 con $x = 2$:

$$p_7(2) = e + 2e(2-1) + \frac{3e}{2}(2-1)^2 + \frac{4e}{3!}(2-1)^3 + \frac{5e}{4!}(2-1)^4$$

$$+\frac{6e}{5!}(2-1)^5 + \frac{7e}{6!}(2-1)^6 + \frac{8e}{7!}(2-1)^7$$

$$p_7(2) = e + 2e + \frac{3e}{2} + \frac{4e}{3!} + \frac{5e}{4!} + \frac{6e}{5!} + \frac{7e}{6!} + \frac{8e}{7!}$$

$$p_7(2) = 14.77742$$

El resto está dado por:

$$R_7(2) = \frac{f^{(8)}(c)}{8!}(2-1)^8$$

$$R_7(2) = \frac{f^{(8)}(c)}{8!}$$

No conocemos el valor de c pero podemos dar una cota superior para el resto, como la derivada $f^{(8)} = e^x(x+8)$ alcanza su valor máximo en el intervalo $[1,2]$ en $x=2$, entonces:

$$|R_7(2)| \leq \frac{f^{(8)}(2)}{8!}|2-1|^8$$

$$f^{(8)}(2) = 73.8905$$

$$|R_7(2)| \leq \frac{73.8905}{8!} = 0.00183260$$

Ahora, comparemos el valor obtenido con el valor real de $f(x)$. $f(2)$ es igual a:

$$f(2) = 2e^2 = 14.77811$$

El valor del resto es igual a:

$$R_7(2) = f(2) - p_7(2) = 14.77811 - 14.77742 = 0.00069$$

Podemos ver que la cota superior que obtuvimos fue correcta, ya que: $0.00183260 > 0.00069$.

Al usar el teorema de Taylor pudimos obtener una aproximación cercana al valor de $2e^2$ y acotar el error obtenido. En el futuro podemos utilizar este teorema para aproximar funciones que pueden llegar a ser difíciles de calcular.

Bibliografía

[1] Tom M. Apostol. ***Calculus. Volumen 1. Calculo con funciones de una variable, con una introducción al Álgebra Lineal***. Editorial Reverté. 9ª reimpresión. 2001.

[2] Edwin Herman, Gilbert Strang. ***Calculus Volume 1***. OpenStax. 2016.

[3] Edwin Herman, Gilbert Strang. ***Calculus Volume 2***. OpenStax. 2016.

[4] Matthew Boelkins, David Austin, Steven Schlicker. ***Active Calculus***. Universidad Grand Valley State. Primera Edición. 2014.

[5] Ron Larson, Robert P. Hostetler, Bruce H. Edwards. ***Cálculo con geometría analítica***. McGraw-Hill. Octava edición. 2006.

[6] Rubén Flores Espinoza, Marco Antonio Valencia Arvizu, Guillermo Dávila Rascón, Martín Gildardo García Alvarado. ***Fundamentos del Cálculo***. Pearson Educación. 2008.

[7] Antonio Rivera Figueroa. ***Cálculo diferencial, fundamentos, aplicaciones y notas históricas***. Grupo Editorial Patria. Primera Edición. 2014.

[8] Néstor Daniel Búcari, Laura Langoni, Diego Vallejo. ***Cálculo diferencial***. Editorial de la Universidad de la Plata. Primera Edición. 2013.

[9] Walter Mora Flores. ***Cálculo en varias variables***. Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Primera Edición. 2012.

[10] ***Pressure***. Hyperphysics. (1998). http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/press.html.

[11] ***Function Transformations***. Mathsisfun.com. (2017). https://www.mathsisfun.com/sets/function-transformations.html.

[12] ***Transformación de Funciones***. Fisicalab.com. https://www.fisicalab.com/apartado/transformacion-funciones.

[13] ***TRANSFORMACIÓN DE GRAFICAS***. Portafolio Digital Erick Sc. (2014). https://sites.google.com/site/portafolioericksc/transformacin-de-graficas.

[14] ***Function Transformations***. Purplemath. (2021). https://www.purplemath.com/modules/fcntrans.html.

[15] ***Parametric Equations And Curves***. Paul Dawkins. (2018). http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ParametricEqn.aspx.

[16] Jay Abramson. ***Precalculus***. OpenStax. 2014.

[17] ***Reaction Rate***. (2020). https://chem.libretexts.org/@go/page/1438.

[18] ***Heat capacity***. (2020). https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity.

[19] ***Secant, Tangent, and Derivatives***. (2012). http://clas.sa.ucsb.edu/staff/lee/secant,%20tangent,%20-and%20derivatives.htm.

[20] ***Equation of the Tangent to the Conic***. (2014). https://www.emathzone.com/tutorials/geometry/equation-of-tangent-to-conic.html.

[21] ***Proof of Various Derivative Properties***. Paul Dawkins. (2018). http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcI/DerivativeProofs.aspx.