



# Matemáticas de secundaria: Grados 8 - 9

## Libro Interactivo

Carlos Alberto Rojas Hincapié

iCartesiLibri

# Matemáticas de secundaria: Grados 8 - 9

INTERACTIVO



**Carlos Alberto Rojas Hincapié**  
Red Educativa Digital Descartes, Colombia

1ª edición – 2022  
Fondo Editorial RED Descartes



Córdoba (España)  
2022

## Título de la obra

Matemáticas de secundaria:  
Grados 8 - 9

## Autor

Carlos Alberto Rojas Hincapié  
Primera edición: 2022

Código JavaScript para el libro: [Joel Espinosa Longi](#), [IMATE](#), UNAM.

Recursos interactivos: [DescartesJS](#)

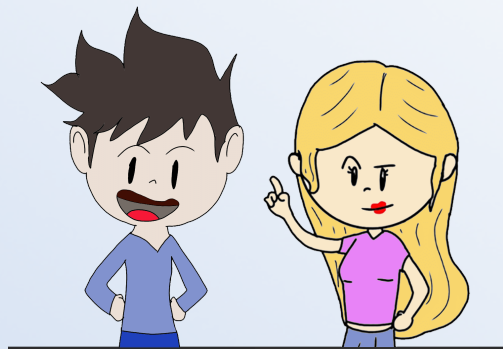
Fuentes: [Lato](#) y [UbuntuMono](#)

Fórmulas matemáticas: [K<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#)

Núcleo del libro interactivo: septiembre 2023

Diseño de personajes:

Orlando Antonio Martínez Hoyos



Red Educativa Digital Descartes  
Córdoba (España)

[descartes@proyectodescartes.org](mailto:descartes@proyectodescartes.org)

<https://proyectodescartes.org>

Proyecto iCartesiLibri

<https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm>

<https://prometeo.matem.unam.mx/recursos/VariosNiveles/iCartesiLibri/>

ISBN: 978-84-18834-49-3



Esta obra está bajo una licencia [Creative Commons 4.0 internacional: Reconocimiento-No Comercial-Compartir Igual](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

# Tabla de contenido

07	Prefacio
09	Componente Curricular de Matemáticas
15	I. Conceptos preliminares
17	Conjuntos numéricos
22	Los números Reales ( $\mathbb{R}$ )
24	¿Qué son los números decimales?
31	Practiquemos
37	II. Potenciación, Radicación y Logaritmación
39	Potenciación
41	Propiedades de la potenciación
44	Radicación
45	Propiedades de los radicales
46	Operaciones con expresiones radicales
50	Logaritmos
52	Practiquemos
57	III. Expresiones Algebraicas
59	Definiciones preliminares
65	Operaciones entre polinomios
72	Productos notables
77	División de polinomios
82	Practiquemos



87	IV. Factorización
89	Casos de factorización de polinomios
102	Practiquemos
107	V. Operaciones Algebraicas
109	Fracciones racionales
112	Operaciones entre fracciones racionales
117	Practiquemos
123	VI. Ecuaciones
125	¿Que es una ecuación?
126	Ecuaciones lineales con una incógnita
136	Ecuaciones cuadráticas con una incógnita
153	Ecuaciones con grado mayor o igual a tres
162	Ecuaciones con logaritmos y exponenciales
166	Practiquemos
173	VII. Sistemas de Ecuaciones
175	Sistema de ecuaciones lineales
176	Métodos de solución
190	Situaciones problema
192	Practiquemos



**197 VIII. Inecuaciones**

**199 ¿Que es una inecuación?**

**204 Inecuaciones lineales con una incógnita**

**210 Inecuaciones cuadráticas con una incógnita**

**214 Inecuaciones racionales con una incógnita**

**215 Practiquemos**

**219 IX. Números Complejos**

**221 Introducción**

**223 Números Complejos ( $\mathbb{C}$ )**

**225 Operaciones con números Complejos**

**233 Practiquemos**

**237 Bibliografía**







# Prefacio

Este libro digital interactivo se ha diseñado con fundamento en la filosofía del [Proyecto DescartesJS](#): "*Trabajando altruistamente por la comunidad educativa de la aldea global*", que sólo busca desarrollar contenidos educativos para el provecho de la comunidad académica, esperando únicamente como retribución el uso y difusión de estos contenidos. El contenido del libro, al igual que los objetos interactivos se han diseñado de tal forma que se puedan leer en ordenadores y dispositivos móviles sin necesidad de instalar ningún programa o [plugin](#). El libro se puede descargar para su uso en local sin dependencia con la red, a excepción de algunos vídeos incluidos en el texto. Todos los objetos interactivos se han diseñado con el Editor DescartesJS.

La [herramienta DescartesJS](#) se caracteriza por una innata interactividad, por permitir realizar representaciones de objetos bi y tridimensionales, por gestionar expresiones de texto y de fórmulas, por integrar objetos multimedia como imágenes, audios y vídeos, por tener la posibilidad de reflejar casos concretos y también potenciar la conceptualización de tareas y procedimientos mediante la utilización de semillas aleatorias y controles numéricos, gráficos y de texto, y con ellos poder abordar la evaluación de manera automática, tanto la correctiva como la formativa. Con DescartesJS es posible el diseño y desarrollo de objetos educativos que promueven el aprendizaje significativo, posibilitando esa deseada construcción del conocimiento.<sup>1</sup>

El contenido de este libro se basa en un curso de capacitación del editor DescartesJS para docentes que, por la dificultad de concertar un horario presencial, permite una opción autodidacta acompañada de material interactivo para una mayor comprensión de los temas tratados.

---

<sup>1</sup> Véase <https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/descripcion.htm>.

Retomando la introducción a la [documentación de DescartesJS](#) de Radillo, Abreu y Espinosa, podríamos coincidir en que este libro está destinado tanto a personas que no han usado DescartesJS como a personas que tienen cierta experiencia y desean mejorarla. En cada apartado del libro se proponen ejercicios y se incluyen ejemplos para que el lector pueda comprender paso a paso la funcionalidad de DescartesJS y su enorme potencial para crear objetos interactivos de aprendizaje.

# Componente Curricular de Matemáticas

El Estado colombiano, decidido a elevar la calidad de la educación, introdujo el enfoque basado en el desarrollo de competencias en los estudiantes, lo cual supone el tránsito desde el aprendizaje que centra la atención en el dominio de contenidos, a una educación basada en competencias que no se agota en el sistema educativo, sino que se desarrolla de manera permanente en interacción con el mundo.

De esta manera, consolidar una política de calidad enmarcada en el desarrollo de competencias implica, entonces, una transformación de fondo de las prácticas pedagógicas, del funcionamiento de la institución educativa y del papel de los actores educativos, teniendo como protagonista al estudiante. Buscando desarrollar este modelo se han realizado esfuerzos por elevar la calidad de la educación en el país; en este sentido, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) ha puesto a disposición de docentes, directivos docentes, padres de familia y público en general herramientas pedagógicas como:

- Los lineamientos curriculares. (1998).
- Los Estándares Básicos de Competencias (EBC). (2006).
- Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). (2015).
- Las matrices de referencia. 2016.
- Las mallas de aprendizaje. 2017.

Herramientas que constituyen el punto de partida y sustento de todas las estrategias de mejoramiento, además son un importante insumo para el diseño curricular y el cambio en las prácticas pedagógicas [\[6\]](#).

## ESTRATEGIAS DE MEJORAMIENTO

Elementos que contribuyen a mejorar los procesos de evaluación por competencias y las prácticas en el aula de clase por parte de los docentes para alcanzar cada vez mejores resultados y hacer que la educación en Colombia mejore su calidad. [Ampliar imagen](#)

### Componentes / Pensamientos Específicos del área de matemáticas.

5 categorías conceptuales que conforman esta asignatura según los Lineamientos y los Estándares Básicos de Competencia diseñados por el Ministerio de Educación Nacional, los cuales son:

#### 1. Pensamiento numérico y sistemas numéricos.

Se asocia con "la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación".

#### 2. Pensamiento espacial y sistemas geométricos.

Contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales.



Tomados de los EBC, orientaciones pedagógicas, determinados por el M.E.N. Se encuentran en la MALLA DE RELACIÓN DE COMPONENTES CURRICULARES.

Por cada área o asignatura reciben nombres específicos de acuerdo a su propósito cognitivo. Ejemplo:

Matemáticas: Pensamientos.  
Ciencias Naturales: Entornos.  
Idioma extranjero: Habilidades.

Lenguaje: Factores.  
Ciencias Sociales: Relaciones.  
Educación Religiosa: Enfoques.

chos  
os de  
lizajes

Contenidos

Tomados del Ministerio de Educación Nacional para las áreas en las cuales están definidas. En su implementación se tuvieron en cuenta las mallas de aprendizaje del MEN.

Se especifican los temas a evaluar, guardando la secuencia de progresión establecida en los EBC.

### 3. Pensamiento métrico y sistemas de medidas.

Hace referencia a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones.

### 4. El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico.

### 5. Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.

El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procesos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente, en la estadística descriptiva y en la combinatoria.

## Competencias específicas del área de matemáticas.

Son las encargadas de desarrollar la capacidad de formular, resolver y modelar fenómenos de la realidad; comunicar, razonar, comparar y ejercitar procedimientos para fortalecer la adquisición de conocimientos, habilidades, actitudes y comprensiones del pensamiento matemático, relacionándolos entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido. Las competencias específicas en el área de matemáticas que evalúa la prueba Saber desde los grados 1° a 9° se reagrupan en las siguientes:

### 1. Comunicación, representación y modelación.

La capacidad del estudiante para expresar ideas, interpretar, usar diferentes tipos de representación, describir relaciones matemáticas, describir situaciones o problemas usando el lenguaje escrito, concreto, pictórico, gráfico y algebraico, manipular expresiones que contengan símbolos y fórmulas, utilizar variables y describir cadenas de argumentos orales y escritas, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones, interpretar lenguaje formal y simbólico así como traducir de lenguaje natural al simbólico formal y viceversa, que se resume en decodificar de manera entendible aquello expresado matemáticamente en palabras sencillas y manejables.

### 2. Planteamiento y resolución de problemas.

Es la capacidad para formular problemas a partir de situaciones dentro y fuera de las matemáticas, desarrollar, aplicar diferentes estrategias y justificar la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas, justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado

en la solución de un problema y lo razonable o no de una respuesta obtenida, verificar e interpretar resultados a la luz del problema original y generalizar soluciones y estrategias para dar solución a nuevas situaciones problema.

### 3. Razonamiento y argumentación.

Está relacionada con la capacidad para dar cuenta del cómo y del porqué de los caminos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar estrategias y procedimientos puestos en acción en el tratamiento de situaciones problema, formular hipótesis, proponer opiniones e ideas, explorar ejemplos y contraejemplos, probar y estructurar argumentos, generalizar propiedades y relaciones, identificar patrones y expresarlos matemáticamente y plantear preguntas, reconocer distintos tipos de razonamiento y distinguir y evaluar cadenas de argumentos.

Tomado Saber 3° Guía de orientación(2017).

## ¿Qué son los Derechos Básicos de Aprendizajes (DBA)?

Los DBA, en su conjunto, explicitan los aprendizajes estructurantes para un grado y un área particular. Se entienden los aprendizajes como la conjunción de unos conocimientos, habilidades y actitudes que otorgan un contexto cultural e histórico a quien aprende.

Los DBA se organizan guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Su importancia radica en que plantean elementos para construir rutas de enseñanza que promueven la consecución de aprendizajes año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados.





# Capítulo I

## Conceptos preliminares



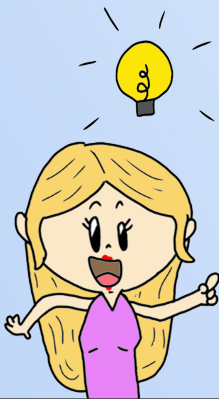
## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

**DBA.1.** Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.3.** Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones..

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 8°.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico.

**1.1 M.IV** Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. DBA 1, 2.

**1.2 M.IV** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. DBA 3.

**1.3 M.IV** Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes. DBA 2.

El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.

# 1.1 Conceptos preliminares

El sistema de los números Reales ( $\mathbb{R}$ ) lo conforman los conjuntos:

## 1.1.1 El conjunto de los números Naturales ( $\mathbb{N}$ )

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots \}$$

Se denomina el conjunto de los números Naturales o enteros positivos, están definidas las operaciones básicas: adición y multiplicación. El conjunto de los números Naturales surgió de la necesidad de contar, lo cual se manifiesta en el ser humano desde sus inicios, este conjunto se caracteriza porque tiene un número ilimitado de elementos.



## 1.1.2 El conjunto de los números Enteros ( $\mathbb{Z}$ )

$$\mathbb{Z} = \{ \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

El Conjunto de los números Enteros surge de la necesidad de dar solución general a la sustracción (resta), pues cuando el sustraendo es mayor que el minuendo, esta sustracción no tiene solución en los números Naturales (por ejemplo:  $5 - 20 = ;?$ ). Debido a esto, la recta numérica se extiende hacia la izquierda, de modo que a cada punto que representa un número Natural le corresponda un punto simétrico, situado a la izquierda del cero; Punto simétrico es aquel que está ubicado a igual distancia del cero (uno a la derecha y el otro a la izquierda de él), se dividen en:

**Enteros Negativos:  $\mathbb{Z}^-$ , Enteros Positivos:  $\mathbb{Z}^+$  y el Cero:  $\{0\}$**

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

### 1.1.3 El conjunto de los Números Racionales ( $\mathbb{Q}$ )

Un número Racional es un número que puede expresarse de la forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}, \quad \text{con } b \neq 0$$

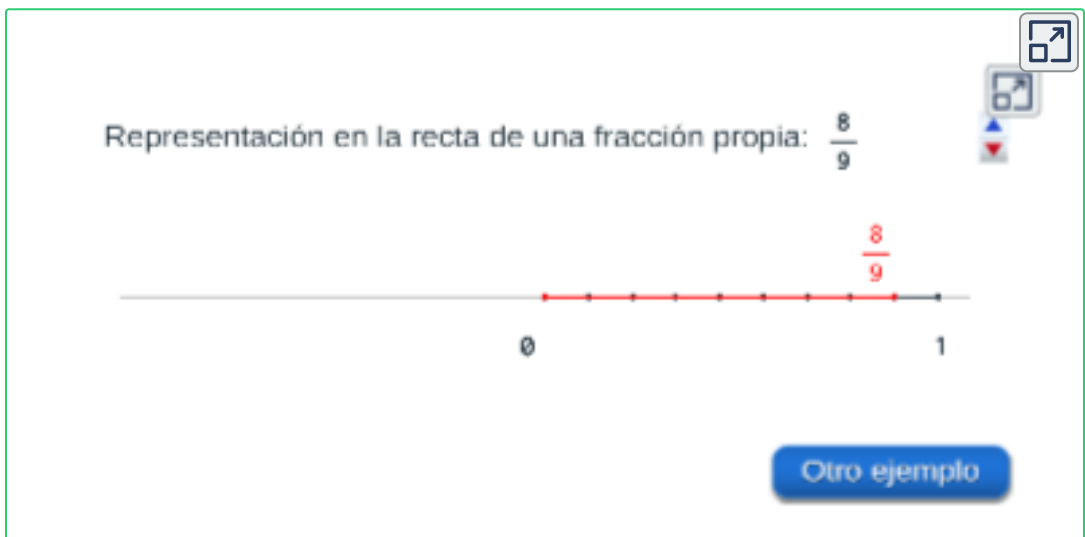
Este conjunto se creó debido a las limitaciones de cálculo que se presentaban los números Naturales y números Enteros, para solucionar esta dificultad, se creó este conjunto, podemos identificar dos tipos de fracciones:

#### ✓ Fracciones propias.

Una fracción propia es una fracción donde el valor del numerador es más pequeño que el valor del denominador.

#### Exploremos.

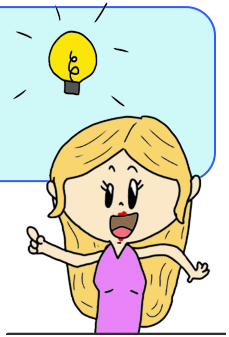
Ejemplos de fracciones propias representadas en la recta numérica, oprime el botón [otro ejemplo](#) para ver más fracciones.



Se representa gráficamente, dividiendo cada intervalo de una recta numérica en espacios iguales, que representen números enteros.

$$Q = \{ \dots - \frac{3}{4}, - \frac{1}{2}, - \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \dots \}$$

**¡Nótese!** , que una fracción propia siempre es menor que la unidad, se encuentra ubicada en la recta numérica entre  $-1$  y  $1$ .



✓ **Fracciones impropias.**

Una fracción impropia es una fracción donde el valor del numerador es más grande que el valor del denominador, veamos algunos ejemplos de fracciones impropias en la recta numérica.

**Exploremos.**

Ejemplos de fracciones impropias representadas en la recta numérica, oprime el botón **otro ejemplo** para ver más fracciones.

Representación en la recta de una fracción impropia:  $-\frac{16}{6}$

Conversión a número Mixto:  $-2\frac{4}{6}$

Otro ejemplo



### Ejercicio 1.1.

Representar en la recta fracciones propias e impropias.

Ingresas el numerador y denominador, oprime la tecla "enter <J", el botón **solución** y observa la gráfica de la fracción.

Representación en la línea recta de la fracción:  $\frac{1}{3}$

Num

Den

**Solución**

Una fracción impropia, se puede representar como un **¡Número Mixto!**, estos, se componen por un número entero y una fracción propia, por ejemplo:

$$3\frac{1}{5} = \frac{(3)(5) + 1}{5} = \frac{16}{5}$$

¿Sabes como se convierte un fracción impropia a un número mixto?



Cada una de estas subdivisiones representa una fracción con denominador igual al número de partes de la subdivisión. Cada fracción es un número racional y cada número racional consta de infinitas fracciones equivalentes.

## 1.1.4 El conjunto de Números Irracionales ( $\mathbb{Q}^*$ )

Conjunto de Números Decimales Infinitos no Periódicos. Este conjunto surgió de la necesidad de reunir a ciertos números que no pertenecen a los conjuntos anteriores; entre ellos se pueden citar a las raíces inexactas, el número Pi, etc. A él pertenecen todos los números decimales infinitos puros, es decir aquellos números que no pueden transformarse en una fracción.

No deben confundirse con los números racionales, porque éstos son números decimales finitos, infinitos periódicos e infinitos semiperiódicos que sí pueden transformarse en una fracción.



Un número Irracional no se puede expresar como una fracción o el cociente de dos números, algunos ejemplos:

$$\pi \approx 3,14159265358979323846 \dots$$

$$e \approx 2,718281828459045235360 \dots$$

Las raíces inexactas representan números Irracionales.

$$\sqrt{2} \approx 1,41421356237309504880 \dots$$

## 1.2 Los números Reales ( $\mathbb{R}$ )

El conjunto de los números Reales ( $\mathbb{R}$ ) está conformado por la unión de los números Racionales ( $\mathbb{Q}$ ) y los números Irracionales ( $\mathbb{Q}^*$ ).

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$$

Los números Racionales ( $\mathbb{Q}$ ) incluye a los números Naturales ( $\mathbb{N}$ ) y los números Enteros ( $\mathbb{Z}$ ) y el cero (0).



Figura 1.1. Los números Reales.

La figura representa la gráfica del conjunto de los números Reales, teniendo en cuenta esto, se puede representar gráficamente el conjunto de los números Reales en una recta numérica, en la que cada punto representa un número.



## Representaciones numéricas de los conjuntos.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 6, -5, -4, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \dots - 3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, -\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots \right\}$$

Los números Racionales es un número que se expresa de la forma:

$$\frac{a}{b}, \quad \text{con } b \neq 0$$

En otras palabras, se representa como el cociente de dos números, donde  $a$  y  $b$  son números enteros. (Recordemos que la división por cero no existe), un número Irracional ( $\mathbb{Q}^*$ ) no se puede expresar como una fracción o el cociente de dos números.

Su característica principal es que al expresarlos en forma decimal, su parte decimal no termina ni se repiten, es un decimal infinito (es decir, con infinitas cifras), son decimales no periódicos.

**Ejemplo 1.1.** Representación de un número Irracional en la recta.

$$\sqrt{5} \approx 2, 236067976\dots$$

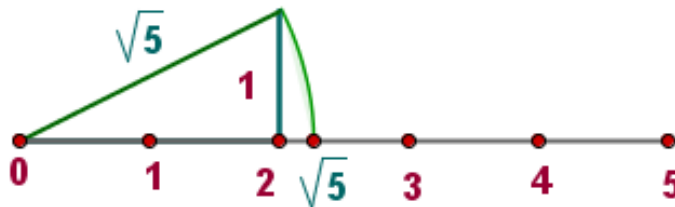


Figura 1.2. Recta numérica.

## 1.3 ¿Qué son los números decimales?

Expresando informalmente, como en muchos ámbitos de la educación, los números decimales son aquellos que poseen una parte decimal, en contraposición a los números enteros, que carecen de esta, es decir, un número decimal  $x$  se puede representar como:

$$x = a, dddddd\dots$$

donde  $a$  es un número entero o cero y  $d$  dígitos decimales, por ejemplo:

$$\frac{1}{6} \approx 1,66666666666666\dots$$

Dada la definición anterior, observa el siguiente esquema:

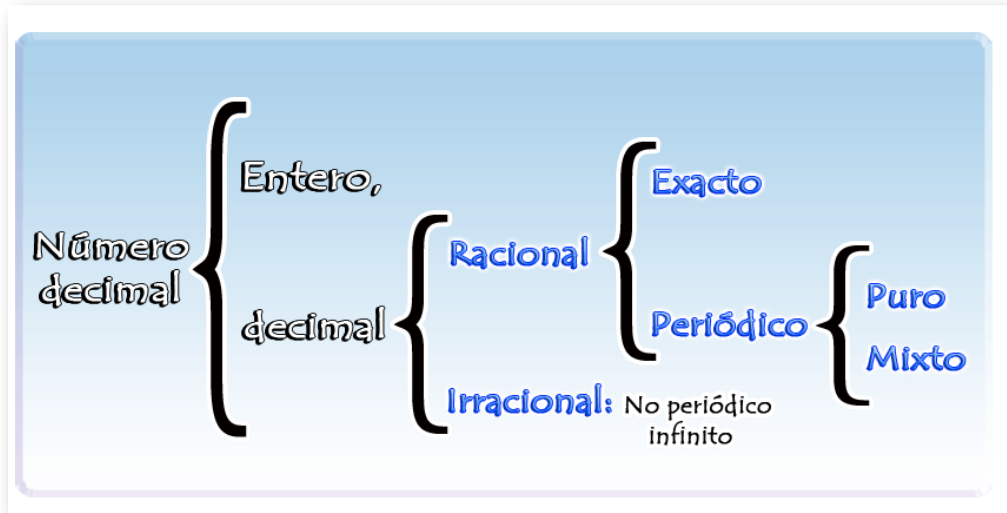


Figura 1.3. Esquema de la representación de un número decimal.

Un número decimal que tiene en su parte decimal dígitos que se repiten infinitamente, se conocen como un decimal **periódico**.

La parte que se repite se llama **periodo**, y se puede representar mediante una barra en la parte que se repite, por ejemplo:

$$\frac{1}{6} \approx 1,6666666666666666\dots = 1,\bar{6}$$

Teniendo en cuenta el esquema de la [figura 1.3](#), una fracción se puede representar como un número decimal que puede ser:

- ✓ **Exacto**, números decimales cuya parte decimal tiene un número finito de cifras.

$$\frac{5}{2} = 2,5$$

- ✓ **Periódico puro**, números decimales en los que la parte decimal se repite periódicamente, inmediatamente después de la coma o separador decimal.

$$\frac{10}{3} \approx 3,3333333333333333\dots = 3,\bar{3}$$

- ✓ **Periódico mixto**, números decimales en cuya parte decimal hay una parte no periódica, y otra periódica.

$$\frac{7}{44} \approx 0,1590909090909090\dots = 0,159\bar{0}$$



La fracción  $\frac{58}{3}$ , ¿que tipo de fracción decimales es?



Respuesta

 **Video.** Observa y complementa la información dada.



**Video.** Los números decimales<sup>2</sup>

Si se tiene un número decimal exacto, periódico puro o periódico mixto, se puede encontrar la fracción que lo representa, esta fracción se conoce como **fracción generatriz**.

**Ejemplo 1.2.** Se tiene el siguiente número decimal, encontrar la fracción generatriz:  $0,1590909090909090\dots = 0,15\overline{90}$

1. El numerador de donde se genera el número decimal, corresponde a la parte entera decimal completa menos la parte decimal que no se repite:

$$1590 - 15 = 1575$$

Por tanto, el numerador de la fracción es 1575.

<sup>2</sup> Tomado del canal de Daniel Carreón: <https://www.youtube.com/user/JAKEMATHE1>

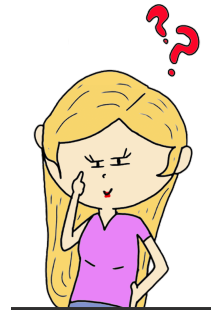
2. Ahora, el denominador tendrá tantos nueves (9) según tantos dígitos tenga la parte periódica y tendrá tantos ceros (0) según tantos dígitos tenga la parte no periódica:

$$\bar{90} = 99, \quad 15 = 00, \quad \text{Denominador} = 9900$$

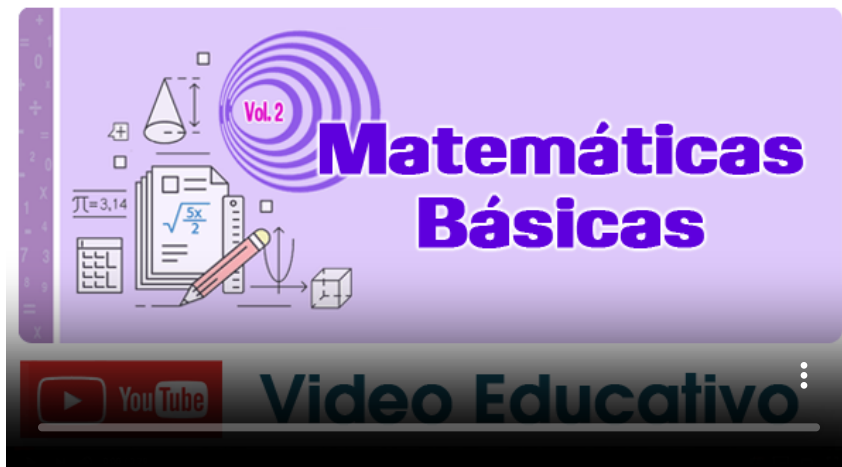
3. Entonces la fracción que se obtiene es igual a:

$$\frac{\cancel{1575}}{\cancel{9900}} = \frac{\cancel{315}}{\cancel{1980}} = \frac{\cancel{63}}{\cancel{396}} = \frac{7}{44}$$

$$\frac{7}{44} = 0,15\bar{90} \approx 0,1590909090909090\dots$$



 **Video.** Observa y complementa la información dada.



**Video.** Como hallar la fracción generatriz de un número decimal<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Tomado de: <https://www.youtube.com/embed/zfhQUYzDkvY>

## 1.3.1 Notación científica

La representación de un número en notación científica es una forma de escribir números demasiado grandes o demasiado pequeños utilizando potencias de 10.



Figura 1.4. Representación en notación científica.

Entre las partes que componen un número representado en notación científica (figura 1.4) tenemos:

- ✓ **Coeficiente**, es un número real, parte entera una sola cifra significativa entre 1 y 9, parte decimal una sola cifra.
- ✓ **Base**, es la base decimal (10).
- ✓ **Exponente**, es un número entero, indica el número de veces que se desplaza la coma o el punto decimal.

Potencia de  $10(+)$ . Siempre que movemos la coma decimal hacia la izquierda. ( $\leftarrow$ )

Potencia de  $10(-)$ . Siempre que movemos la coma decimal hacia la derecha. ( $\rightarrow$ ).



En el sistema decimal, cualquier número  $\mathbb{R}$  puede expresarse en notación científica, veamos la representación del siguiente número:




Figura 1.5. Representación en notación científica.

**Ejemplo 1.3.** Representación de un número en notación científica.

- $9 \times 10^{24} \rightarrow 9.000.000.000.000.000.000.000.000$
- $3 \times 10^{-8} \rightarrow 0,00000003$
- $5,2 \times 10^{10} \rightarrow 52000000000$

**Exploremos.**  
Notación científica.

 Escribe un número en notación científica y oprime el botón **expresar** para ver en forma decimal.

The screenshot shows a calculator interface. At the top, it says "Expresar en decimales:". Below this, the input  $2,40 \times 10^5$  is shown in a text box. Below that, it says "Notación decimal:" and the result  $2,4 \times 10^5 = 240000$  is displayed. A blue button labeled "Expresar" is visible at the bottom right.

## 1.3.2 Operaciones en notación científica.

Para **sumar** o **restar** números en notación científica, éstos deben tener el mismo exponente en la potencia de 10.

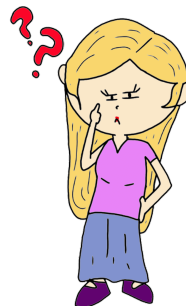
Una vez todos los números tienen el mismo exponente, tan sólo hay que sumar y restar los números que multiplican a la potencia de base 10, sacando factor común a la potencia de 10.

**Ejemplo 1.4.** Sumar  $5,5 \times 10^{18}$  con  $3 \times 10^{18}$

$$= 5,5 \times 10^{18} + 3 \times 10^{18}$$

$$= 10^{18} \cdot (5,5 + 3) \quad \longrightarrow \quad \text{Factor común.}$$

$$= 8,8 \times 10^{18} \quad \longrightarrow \quad \text{Suma números decimales.}$$



Para **multiplicar** o **dividir** números en notación científica, hay que tener en cuenta las [propiedades de las potencias](#).

**Ejemplo 1.5.** Multiplicar  $(3,2 \times 10^{25}) \times (3 \times 10^{-18})$

$$= (3,2 \times 3) \times 10^{25-18} \quad \longrightarrow \quad \text{Propiedades de potencias.}$$

$$= 9,6 \times 10^7 \quad \longrightarrow \quad \text{Multiplicación números decimales.}$$

Se pueden presentar expresiones combinadas entre operaciones.



La expresión  $(8,4 \times 10^{54}) \frac{6,6 \times 10^{37}}{8,4 \times 10^{25}}$ , ¿Cual será su resultado?



Respuesta



## 1.4 Practiquemos

### Ejercicio 1. Clasificación de los números.

Arrastrar los números a cada recuadro según su conjunto numérico, ubicarlo en el conjunto más pequeño al que pertenezcan.

**Indicación.** Arrastrar el número al recuadro que corresponda, según el primer conjunto al que pertenece.

**Clasifica los siguientes números:**

-39	-89	$\frac{23}{5}$	$-\frac{32}{4}$
3.141516...	$\pi$	-101	38
0.123581...	5	-10031	19

Naturales (N)	Enteros (Z)	Racional (Q)	Irracional (Q <sup>i</sup> )

1 / 4

**¡Recuerda!** , todos los conjuntos numéricos pueden ser representados en la recta numérica.



Proyecto Descartes.org.

[4] Tomada de Plantillas con Descartes-JS

## Ejercicio 2. Identifica el conjunto numérico.

$\mathbb{N}$  (Naturales),  $\mathbb{Z}$  (Enteros),  $\mathbb{Q}$  (Racional),  $\mathbb{Q}^*$  (Irracional) o  $\mathbb{R}$  (Reales).



Oprime el **botón** correspondiente al conjunto numérico al cual pertenece el número dado y verifica tu respuesta.

1. Identifica a qué conjuntos de numéricos pertenece el número:  $-6, 32455532 \dots$   
(Haz clic en todos los botones a los cuales pertenece el número dado.)

N  
 Z  
 Q  
 Q\*  
 R

Ejercicio Bien=0  
Solución Mal =0

### Ejercicio 3.

Práctica resolviendo los siguientes ejercicios con números reales en operaciones básicas, realiza paso a paso su debido procedimiento.



[Imprimir](#)

1).  $3.422 - 3.836 + 7.852 =$

2).  $6.8444 - 11.5092 - 4.3184 =$

3).  $6.84 \times 3.84 =$

4).  $6.844 + 3.836 ( 23.555 - 7.852 ) =$

5).  $7.85 + ( 3.42 \times 1.92 ) =$

6).  $3.8364 ( 10.2667 - 3.0691 ) =$

[Solución](#)



**Actividad complementaria.**

[Descargar para imprimir](#)



## ✓ Evaluamos lo aprendido.

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:

Conecta la columna izquierda con las expresiones correctas de la columna derecha

Notación Científica

$7 \times 10^6$	0,000000013
$1,3 \times 10^5$	17000000
$3,1 \times 10^5$	0,00000013
$4,7 \times 10^2$	0,000031
$5 \times 10^3$	70000000
	700000000
	0,000000003
	0,00000003

Comenzar

✓ **Evaluación - 5x2 preguntas con límite de tiempo - (20 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.

### Capítulo I: Conceptos preliminares.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).

**Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo I](#)

Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.

[\[4\]](#) Plantillas con Descartes-JS



"Las matemáticas son la puerta y la llave a la ciencia".  
Roger Bacon



# Capítulo II

## Potenciación, Radicación y Logaritmicación

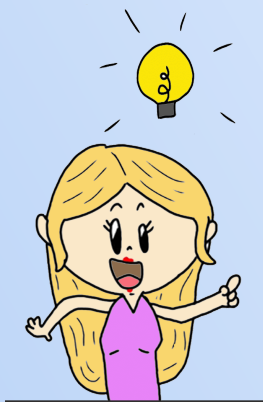


## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.3.** Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones..

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 8º.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico.

**1.2 M.IV** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. DBA 3.

**1.4 M.IV** Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas. DBA 3.

El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.







## Ejercicio 2.1.

Practiquemos con los elementos de la potenciación.

1. Ingresa base y exponente del ejercicio propuesto, oprime la tecla "enter <math>\leftarrow</math>" para verificar, oprime el botón **otro ejercicio**.

Base  Exponente

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

Otro ejercicio

2. Ingresa base y exponente del ejercicio propuesto, escribe la potencia, oprime la tecla "enter <math>\leftarrow</math>" para verificar, oprime el botón **otro ejercicio**.

(B)base  (E)exponente  (P)potencia

$-1^3 =$

Otro ejercicio

## 2.2 Propiedades de la potenciación

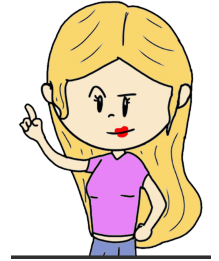
Las propiedades de la potenciación son válidas para todos los conjuntos numéricos.

- ✓ Todo número diferente de cero, elevado a un exponente cero es igual a uno.

$$a^0 = 1$$



- ✓ Todo número diferente de cero, elevado a un exponente uno es igual a el mismo.

$$a^1 = a$$



Potencia de una potencia ▼

Otro ejemplo

1. Producto de potencias de la misma base  

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
2. Cociente de potencias de la misma base  

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$
3. Potencia de una potencia  




$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$
 $(8^5)^7 = 8^{42}$
4. Producto de potencias con igual exponente  

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
5. Cociente de potencias con igual exponente  

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

## Exploremos




Verifica lo aprendido en esta sección, oprime las **fechas** y sigue paso a paso como aplicar la propiedad de potencia de una potencia.

Oprime las flechas y observa el paso a paso   

Otro ejemplo

Una potencia que tiene de base otra potencia

$$(2^3)^4 =$$

Base  exponente 1º  exponente 2º 



**¡Recuerda!** , una potencia que tiene de base una potencia, se coloca la misma base y se multiplican los exponentes.

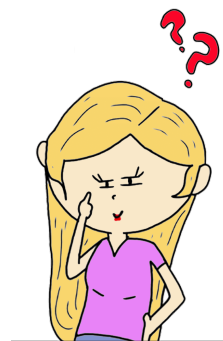
$$(a^{e_1})^{e_2} = a^{(e_1 \cdot e_2)}$$



## Ejercicio 2.2.

Aplicando propiedades de potenciación.

### Indicaciones.

1. Para iniciar, haz click en el botón **ejercicio** , soluciona el ejercicio propuesto, ingresa los resultados en el campo indicado, el exponente, la base y pulsa la tecla "enter <math>\leftarrow</math>", verifica tu respuesta oprime el botón **solución** .
2. Oprime de nuevo el botón **ejercicio** y repite el mismo procedimiento, completa tu ejercicio y verifica cuantas buenas obtienes.



Exponente(b)	0
Base(a)	1

$$a^b$$

Solución

Ejercicio

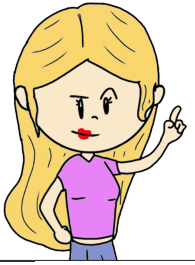
Solución

Bien:0  
Mal :0

Pulsa el boton EJERCICIO para generar un ejercicio.

## 2.3 Radicación

Las expresiones radicales son expresiones que incluyen un radical, el cual es el símbolo de calcular una raíz.



En la nomenclatura de la radicación se tienen las siguientes partes:

indice de la raíz      Radical

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Cantidad Subradical      Raíz

Expresada en forma de Potencia       $b^n = a$

La radicación es la operación inversa de la potenciación, porque se expresa en forma de potencia:

$$\sqrt[5]{25} = 5 \text{ porque } 5^2 = 25$$

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ porque } 2^4 = 16$$

$$\sqrt[7]{343} = 7 \text{ porque } 7^3 = 343$$

$$\sqrt[3]{243} = 3 \text{ porque } 3^5 = 243$$

**Nota:**

Una expresión radical se puede expresar como una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

El denominador es el índice del radical.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Otro ejemplo

## 2.4 Propiedades de los radicales

Producto de Raíces

Otro ejemplo

1. Producto de raíces de igual índice.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{5 \cdot 7} = \sqrt[3]{35}$$

2. Cociente de raíces de igual índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3. Potencia de una raíz.

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

4. Raíz de una raíz.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

**Ejemplo 2.1.** Potencia de una raíz.

$$(\sqrt[3]{x^2})^4 = (x^{\frac{2}{3}})^4 = x^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{x^8}$$

$$(\sqrt[3]{x^2})^4 = \sqrt[3]{x^8}$$



## 2.5 Operaciones con expresiones radicales

Para operar sumas o restas de expresiones radicales, deben tener el mismo índice y el mismo radicando, o sea radicandos semejantes.

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} \quad \text{Términos semejantes } \sqrt{5}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

Ejercicio

### Simplificar expresiones radicales.

Para simplificar expresiones radicales con diferente índice, buscamos términos exponenciales dentro del radical, aplicamos la descomposición en factores primos y las reglas de los exponentes.

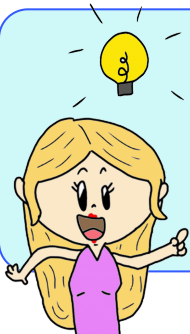
Se debe llevar a un índice común (m.c.m.) y se expresa en una sola raíz, simplificando la expresión si es posible, como por ejemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \frac{3x^2\sqrt{4^2}}{2x^3\sqrt{2^3}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} =$$

$$\left(\frac{2^4}{2^3}\right)^{\frac{1}{6}} = (2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

**¡Recuerda!** , si el radical es de igual índice, utilizamos la propiedad del cociente de radicales.

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$







## Ejercicio 2.4. Simplificar expresiones radicales.

### Indicaciones

Practica lo aprendido en esta sección, resuelve los 10 ejercicios propuestos.

1. Para iniciar, oprime el botón **ejercicio** y resuelve el ejercicio propuesto.
2. Ingresa el índice del radical, el exponente del radical y el exponente del coeficiente, y pulsa la tecla "enter <math>\leftarrow</math>" para verificar tu respuesta oprime el botón **solución**.
3. Oprime de nuevo el botón **ejercicio** y repite el mismo procedimiento, completa tu ejercicio y verifica cuantos buenos obtienes.



2

0

0

## 2.5.1 Racionalización

La racionalización consiste en eliminar los radicales del denominador.

Una expresión es considerada simplificada solo si no tiene signos de radical en el denominador. Si tenemos un radical en el denominador, tenemos que racionalizar dicho denominador.

Para racionalizar un denominador, se puede presentar:

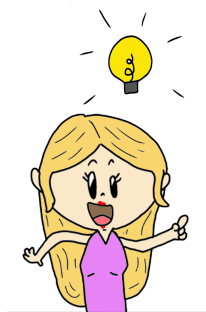
**Ejemplo 2.2.** Racionalizar  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

En este caso, se logra multiplicando tanto el numerador como el denominador por el mismo radical que tiene el denominador.

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

**Ejemplo 2.3.** Racionalizar  $\frac{3}{6^{\sqrt[5]{3}}}$

Para este caso, multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el mismo radical que tiene el denominador elevado a la diferencia entre el índice de la raíz y su exponente.

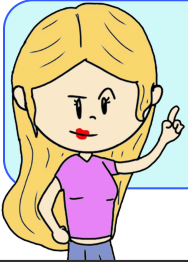
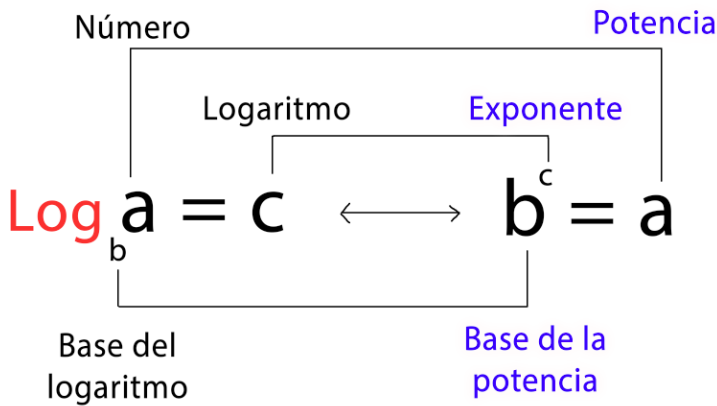


$$\begin{aligned} \frac{3}{6^{\sqrt[5]{3}}} &= \frac{3}{6^{\sqrt[5]{3}}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^{5-1}}}{\sqrt[5]{3^{5-1}}} = \frac{3}{6^{\sqrt[5]{3}}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^4}} = \\ &= \frac{3\sqrt[5]{3^4}}{6^{\sqrt[5]{3}}\sqrt[5]{3^4}} = \frac{3\sqrt[5]{3^4}}{6^{\sqrt[5]{3^5}}} = \frac{\cancel{3}\sqrt[5]{3^4}}{6.\cancel{3}} = \frac{\sqrt[5]{3^4}}{6} \end{aligned}$$

## 2.6 Logaritmos

El logaritmo es el exponente de una potencia con cierta base, el logaritmo de un número debe ser positivo, es decir, el número y la base de un logaritmo corresponde a números  $\mathbb{R}$  (números positivos).

El logaritmo de  $a$  en base  $b$  es otra forma de expresar la potenciación con  $b > 0$  y  $a$  un número  $\mathbb{R}$  positivo, se denota como:



Si  $b = 10$  entonces  $\log_{10}(a) = \log(a)$ , es conocido como logaritmo decimal, se lee: **Logaritmo en base 10 de  $a$ .**

**Ejemplo 2.4.** Evaluar los logaritmos.

- ✓  $\log_3(81) = 4$  porque  $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- ✓  $\log(100) = 2$  porque  $10^2 = 10 \times 10 = 100$
- ✓  $\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$  porque  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

## Propiedades de los logaritmos.

Si  $m$  y  $n$  son números positivos y  $a$  es un número  $\mathbb{R}$ , entonces:

$$1. \log_b b = 1$$

$$2. \log_b b^c = c.$$

$$3. \log_b 1 = 0$$

$$4. \log_b (m \cdot n) = \log_b (m) + \log_b (n).$$

$$5. \log_b \frac{m}{n} = \log_b (m) - \log_b (n).$$

$$6. \log_b (m^n) = n \log_b (m).$$

$$7. \log_b \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \cdot \log_b (m).$$



**Ejemplo 2.5.** Apliquemos propiedades para simplificar la expresión:  $\log_5(25)$ .

$$\log_5(25) = \log_5(5^2) = 2 \cdot \log_5(5) = 2 \cdot (1) = 2$$

**Ejemplo 2.6.** Apliquemos propiedades para simplificar la siguiente expresión:

$$\log_4(2) + \log_4(32)$$

Solución.

$$\log_4(2) + \log_4(32) = \log_4(2 \cdot 32) = \log_4(64)$$

$$\log_4(4^3) = 3 \cdot \log_4(4) = 3 \cdot (1) = 3$$

## 2.7 Practiquemos

### Ejercicio 1.

Resuelve y simplifica aplicando las propiedades de potenciación.



[Imprimir](#)

1. Expresar con notación exponencial

a).  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

b).  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$

c).  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} =$

2. Calcular utilizando propiedades

a).  $\left(\frac{7}{6}\right)^{-1} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} =$

b).  $\left(\frac{7}{6}\right)^{-1} - \left(\frac{6}{7}\right)^{-1} =$

c).  $\left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{1}{7}\right)^1 =$

[Solución](#)



**Actividad complementaria.**

[Descargar para imprimir](#)



## Ejercicio 2.

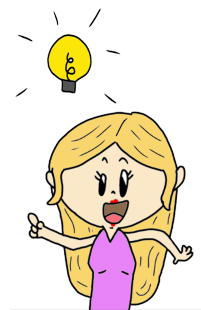
Resuelve los ejercicios propuesto a continuación.



### Indicaciones

Resuelve y simplifica aplicando las propiedades de potenciación.

1. Selecciona el tipo de **ejercicio** a solucionar.
2. Resuelva el ejercicio propuesto y verifica tus respuestas.
3. Pulsa el botón **solución** para ver las respuestas.
4. Si desea realizar otro ejercicio, oprima otro tipo de **ejercicio** y repite los pasos anteriores.



Logaritmos

Click en un número para generar un ejercicio

1

2

3

Ejercicio 1: calcular logaritmos a mano.

Ejercicio 2: propiedades de los logaritmos.

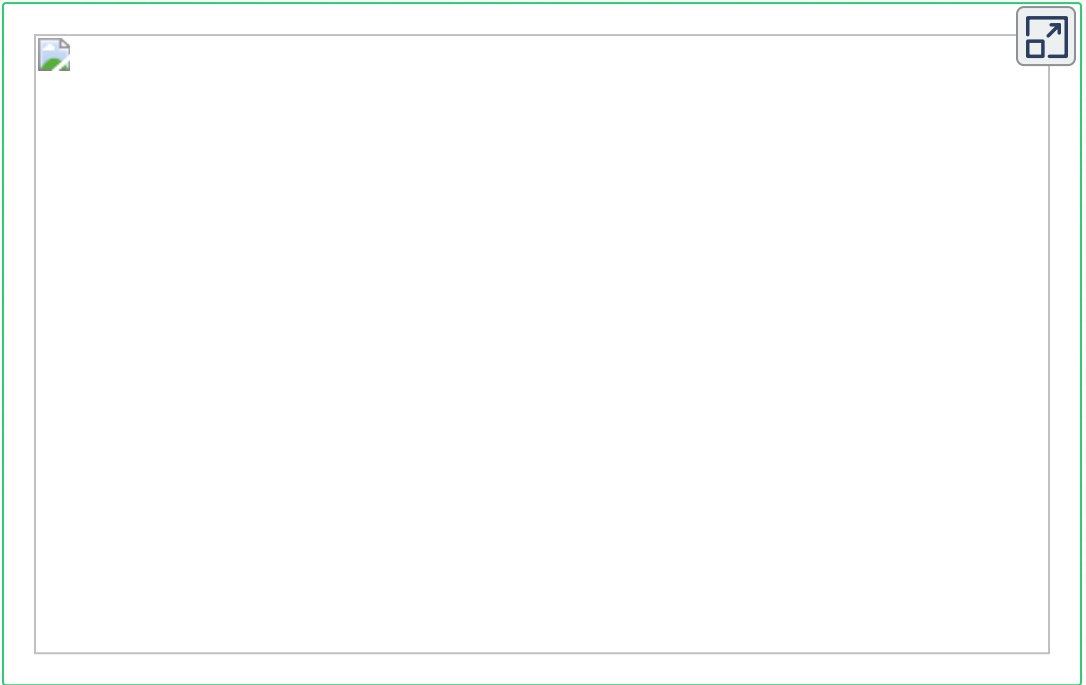
Ejercicio 3: logaritmos con calculadora.

¡Recuerda!,

$$c = \log_b(a) \quad \text{si y solo si} \quad a = b^c$$

## Evaluamos lo aprendido.

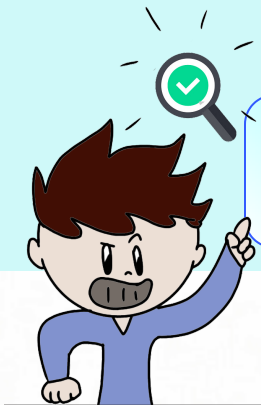
Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:



 **Evaluación - 12 preguntas con límite de tiempo - (12 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.

### Capítulo II: Potenciación, radicación y logaritmos.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).



**Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo II](#)

[4] Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.  
Plantillas con Descartes-JS





"La vida es buena por sólo dos cosas, descubrir  
y enseñar las matemáticas".

Simeon Poisson



# Capítulo III

## Expresiones Algebraicas



## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

**DBA.1.** Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

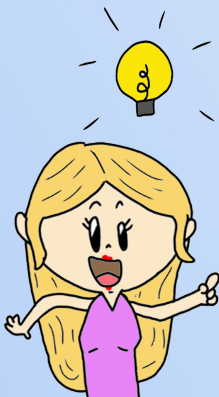
**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.3.** Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones..

**DBA.8.** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 8°.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico

**1.1 M.IV** Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. DBA 1, 2.

#### Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

**5.2 M.IV** Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. DBA 3, 9.

**5.3 M.IV** Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. DBA 8.

## 3.1 Expresiones algebraicas

### Definiciones preliminares

#### 1. Expresión algebraica:

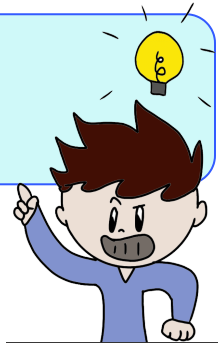
Combinación de números, letras, signos de agrupación, con operaciones indicadas, por ejemplo:

$$\frac{10a-3}{5a+9}, \quad x^2-5x+18, \quad 10b+5, \quad 10y-20xy+10x$$

#### 2. Términos en una expresión algebraica:

Se llama término en una expresión algebraica, a cada parte de ella que viene a ser separada por el signo mas (+) ó el signo menos (-). Los términos están formados por números y letras o expresiones combinadas multiplicadas entre sí (llamados factores).

El término puede tener factor literal y factor numérico o coeficiente numérico o coeficiente del término.



#### Ejemplo 3.1.

$$\begin{array}{ll}
 x^2-3x+6 & \longrightarrow \text{Expresión de tres términos} \\
 6b+5 & \longrightarrow \text{Expresión de dos términos} \\
 3y-6xy+12x-10 & \longrightarrow \text{Expresión de cuatro términos}
 \end{array}$$

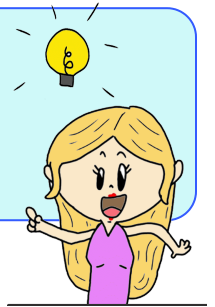
### 3. Términos semejantes:

Aquellas expresiones que poseen una misma parte, bien sea literal (letras) o radical (raíces), por ejemplo:

$12ab, - 6ab \rightarrow$  Términos semejantes, poseen la misma parte literal: **ab**

$\sqrt[5]{x}, 6\sqrt[5]{x} \rightarrow$  Términos semejantes, poseen la misma parte radical:  $\sqrt[5]{x}$

Para conocer el valor numérico de una expresión algebraica, se sustituyen las letras (que llamaremos variables) por números reales y se efectúan operaciones que están indicadas.



#### Exploremos.

Ingresa los valores de  $x, y, z$  y evalúa la expresión propuesta.

Expresión algebraica  $\rightarrow 7(2x^2 - 7y) + 6z$

Solución

## Exploremos

Observa las siguientes expresiones algebraicas, pulsa los controles para desplazarse por las diferentes frases y observa la escritura matemática de la expresión algebraica.

The screenshot shows an interactive interface for generating algebraic expressions. At the top, the expression  $-1/2 \cdot x^2$  is displayed in white on a blue background. Below this is a grid of light blue boxes containing various operations. A white box with orange text highlights the selected operation: "Menos la mitad del cuadrado". At the bottom, there are navigation arrows and a blue instruction box.

El doble	
El triple	
La mitad	
Menos el doble	
Menos el triple	
<b>Menos la mitad del cuadrado</b>	
La raíz	del cubo
27 por ciento	de x e y
	de x menos y
	de x por y
	del inverso

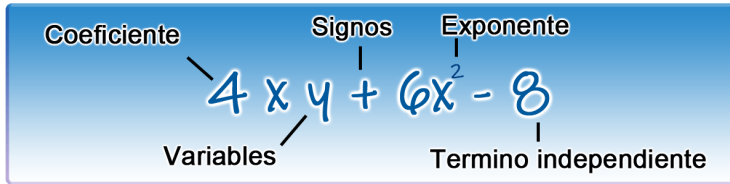
Pulsa en las flechas laterales para obtener distintas expresiones

Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Cuándo un término en apariencia no presenta coeficiente numérico, como en la expresión algebraica " $b - 4c$ " en donde  $b$  es el término que en apariencia no presenta coeficiente numérico, se asume la unidad como su coeficiente numérico, donde, el término  $b = 1b$ .

## Exploremos.

Identifica los términos de una expresiones algebraicas.



**Indicaciones.** Sigue las instrucciones que se muestran en cada pantalla, oprime las flechas para avanzar o retroceder a otra escena.

Captura de pantalla de un programa interactivo que muestra el término  $-4xy^3$ . El programa tiene una barra de navegación superior con el texto "1.2 Suma y resta de expresiones algebraicas | Monomios 1" y una instrucción: "Haz clic en las diferentes partes del término y observa su nombre". En la parte inferior hay un botón "Otra" y una flecha verde para avanzar.



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.





Para simplificar monomios que se suman o restan, estos deben contener términos semejantes, los coeficientes de cada monomio que tienen la misma parte literal se suman o restan, y se deja igual la parte literal, por ejemplo, simplifiquemos la expresión algebraica

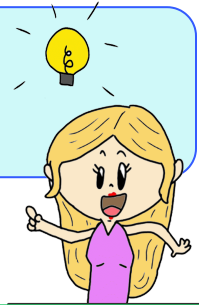
$$20x^2y + 12x^2y - 3x^2y$$

Término semejante (llamaremos factor común)  $\longrightarrow x^2y$ .

Operación con los coeficientes  $\longrightarrow 20 + 12 - 3 = 29$ .

$$20x^2y + 12x^2y - 3x^2y = 29x^2y$$

**¡Recuerda!** , aquéllas expresiones que poseen una misma parte, bien sea literal (letras) o radical (raíces) son términos semejantes.



### Ejemplo 3.2.

Simplificar la siguiente expresión:

$$-3q^7 + 8q^{12} - 18q^7 - 3q^7$$

Solución



### Ejercicio 3.1.

Simplificar términos semejantes en expresiones algebraicas cuando sea posible.



**Actividad complementaria.**  
[Descargar para imprimir](#)



## 3.2 Operaciones entre polinomios

¿Que es un polinomios?

Son expresión algebraica con características especiales, así por ejemplo un polinomio en la variable  $x$ , es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

El **grado de un polinomio**  $P(x)$  es el **mayor exponente** al que se encuentra elevada la variable  $x$ .

Elementos de un polinomio:

- ✓  $n$  es un entero no negativo.
- ✓  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  son números reales.
- ✓  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$  son coeficientes del polinomio.
- ✓  $a_n$  es el coeficiente principal.
- ✓  $a_0$  es el término independiente.

**Ejemplo 3.3.** Elementos de un polinomio:

Sea  $P(x) = 10x^6 + 6x^5 - x + 11$

- El grado del polinomio es 6
- El coeficiente principal es 10
- El término independiente es 11

Otro ejemplo

Algunos polinomios reciben nombres especiales de acuerdo con el número de términos que posean, por ejemplo:



Monomio (un término)  $\rightarrow 5x^2$

Binomio (dos términos)  $\rightarrow 2b + 3$

Trinomio (tres términos)  $\rightarrow 3y^2 - 2y + 5$

### 3.2.1 Suma y resta de polinomios

Veamos el proceso para sumar dos polinomios, sean  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ :

$$P_1(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

$$P_2(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3$$

1. Se coloca el primer polinomio y a continuación se le suma o adiciona el segundo polinomio.

$$P_1 + P_2 = (x^3 + 2x^2 - 5x + 7) + (4x^3 - 5x^2 + 3)$$

2. Se eliminan signos de agrupación ( paréntesis, llaves, corchetes )

$$P_1 + P_2 = x^3 + 2x^2 - 5x + 7 + 4x^3 - 5x^2 + 3$$

Si a un signo de agrupación (paréntesis, llaves, corchetes) lo antecede un signo mas (+), al eliminar el signo de agrupación, todos los términos que haya dentro de él quedarán con los mismos signos, pero si al signo de agrupación lo antecede un signo menos (-), o sea en la resta, al eliminar el signo de agrupación todos los términos dentro de éste cambian de signo.

3. Realizar las sumas o restas de términos semejantes, los que no son semejantes se dejan igual, luego organizar los términos en orden creciente o decreciente para la variable si es el caso.



$$P_1 + P_2 = (x^3 + 4x^3) + (2x^2 - 5x^2) - 5x + (7 + 3)$$

Por lo tanto, el resultado de la suma de  $P_1 + P_2$  es:

$$P_1 + P_2 = 5x^3 - 3x^2 - 5x + 10$$

### Exploremos.

Dados los polinomios  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  de grado 3, observa la suma entre ellos, oprime el botón **otro ejemplo** para ver diferentes polinomios.


Sumar

$$P_1(x) = 3x^3 + 0x^2 + 2x -$$

$$P_2(x) = -3x^3 + 0x^2 - 5x + 8$$


---


$$P_1(x) + P_2(x) = 0x^3 + 0x^2 - 3x + 7$$



Se pueden operar dos o más polinomios al mismo tiempo, se suman o restan los términos semejantes de cada polinomio.



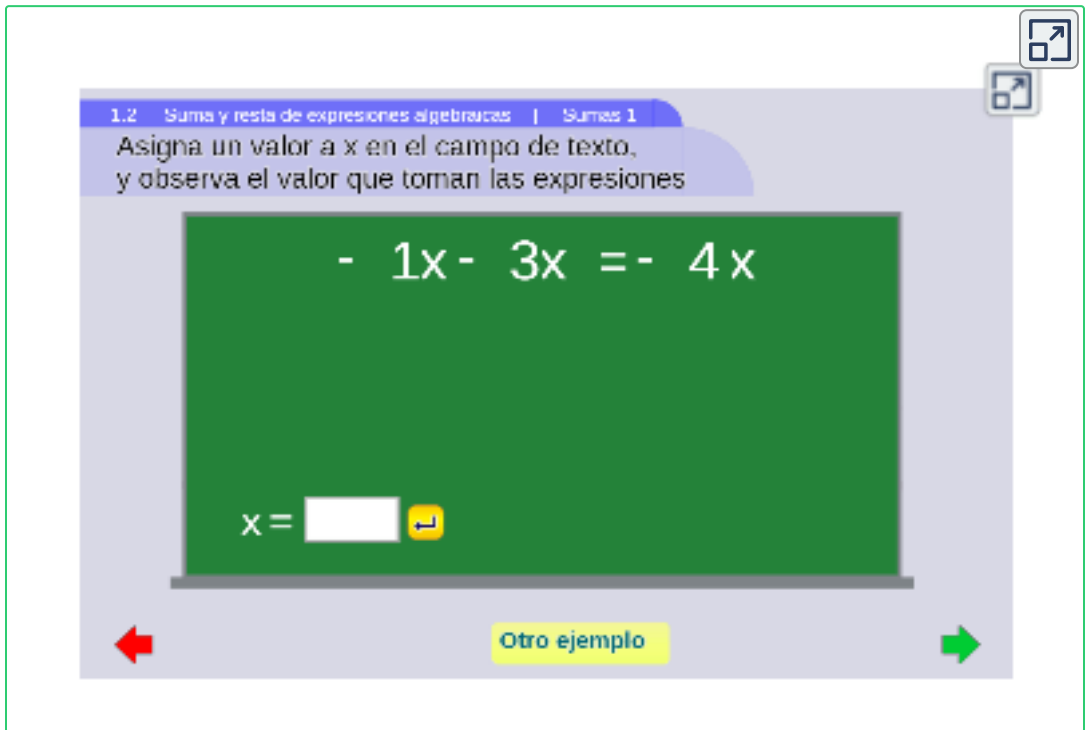
## Exploremos.

Polinomios - suma y resta de expresiones algebraicas.

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección, explora la siguiente escena interactiva.

### Indicaciones.

Sigue las instrucciones que se muestran en cada pantalla, oprime las flechas para avanzar o retroceder a otra escena.



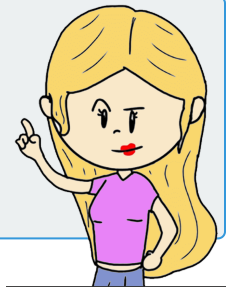
The screenshot shows an interactive interface with a light blue header. The header contains the text "1.2 Suma y resta de expresiones algebraicas | Sumas 1". Below the header, there is a light blue box with the instruction: "Asigna un valor a x en el campo de texto, y observa el valor que toman las expresiones". The main content area features a green chalkboard with the algebraic equation  $-1x - 3x = -4x$  written on it. Below the chalkboard, there is a text input field labeled "x =" followed by a yellow button with a blue arrow pointing right. At the bottom of the interface, there is a red arrow pointing left, a yellow button labeled "Otro ejemplo", and a green arrow pointing right. In the top right corner, there are two small icons: one for zooming in and one for zooming out.



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



### 3.2.2 Producto de monomios entre si



1. Se multiplican los coeficientes numéricos de los términos, aplicando ley de signos:

Signos iguales	Signos diferente
$(+) \cdot (+) = (+)$	$(+) \cdot (-) = (-)$
$(-) \cdot (-) = (+)$	$(-) \cdot (+) = (-)$


2. Se aplica a la parte literal propiedades de potenciación, producto de potencias de bases iguales:

$$b^m b^n = b^{m+n}$$

**Ejemplo 3.4.** Producto de monomios, simplificar:

**Simplificar la siguiente expresión:**  
 $(-9 b^{16}) \cdot (-4 b) \cdot (-4 b^{15})$




### 3.2.3 Producto de polinomios

Para multiplicar polinomios entre sí, se aplica la propiedad distributiva, multiplicando cada término del primer polinomio por todo el segundo polinomio, ejemplo:

$$(3x + 4) \cdot (5x - 7) = 3x \cdot (5x - 7) + 4 \cdot (5x - 7)$$

Se aplica propiedad distributiva.

$$= [(3x) \cdot (5x) - 7 \cdot (3x)] + [4 \cdot (5x) - (4) \cdot (7)]$$



En la parte literal, aplicamos el producto de potencias de igual base:

$$b^m b^n = b^{m+n}$$

Suma de términos semejantes.

$$= 15x^2 - 21x + 20x - 28$$

por tanto, el producto de los polinomios es:

$$(3x + 4) \cdot (5x - 7) = 15x^2 - x - 28$$

Se debe tener en cuenta la ley de signos entre los términos a multiplicar, donde los positivos son aquéllos términos que los antecede un signo mas (+) ó aquéllos términos que en apariencia no poseen signo que los anteceda; y los negativos son aquéllos términos que los antecede un signo menos (-).



## Exploremos.

Binomios - multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección, explora la siguiente escena interactiva.

### Indicaciones.

Sigue las instrucciones que se muestran en cada pantalla, oprime las flechas para avanzar o retroceder a otra escena.

2.2 a - Multiplicación y división de expresiones algebraicas | Binomios 3

Utiliza los pulsadores para realizar la multiplicación término a término

$$\begin{array}{r}
 -1b + 5 \\
 \times \quad 4b + 3 \\
 \hline
 \phantom{-1b + 5} 0b + 0 \\
 \phantom{-1b + 5} 0b^2 + 0b \\
 \hline
 \end{array}$$


Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



## 3.3 Productos notables

Productos que tienen su base en la potenciación de polinomios.

### 1. Cuadrado de la suma de dos términos

Corresponde al cuadrado del primer término, mas el doble producto del primer término por el segundo término, mas el cuadrado del segundo término, veamos como se genera:

$$(a + b)^2 = (a + b).(a + b) \longrightarrow \text{Definición de potencia}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

#### Ejemplo 3.5.

$$(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2.(2m).(3) + (3)^2 = 4m^2 + 12m + 9$$

### 2. Cuadrado de la diferencia de dos términos

Corresponde al cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo término, mas el cuadrado del segundo término, veamos como se genera:

$$(a - b)^2 = (a - b).(a - b) \longrightarrow \text{Definición de potencia}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

#### Ejemplo 3.6.

$$(y - 5x)^2 = (y)^2 - 2.(y).(5x) + (5x)^2 = y^2 - 10xy + 25x^2$$

Si se tienen tres o más términos elevados al cuadrado, se agrupan de tal forma que formen un binomio y se aplica la misma definición:

$$(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

### Exploremos.

Aplicación de productos notables.

Escribe los valores de los coeficientes, los exponentes, pulsa "enter <␣" y observa el resultado cuando tiene diferentes exponentes dentro de los términos del binomio.

Observa la descomposición al modificar los valores de los coeficientes  $a$  y  $b$ , los exponentes  $n$  y  $m$  para obtener el binomio  $(ax^n + by^m)^2$ .



**Binomio**  $\rightarrow (ax^n \pm by^m)^2 = (ax^n)^2 \pm 2(ab)x^n y^m + (by^m)^2$

Coeficiente (a) 1

Coeficiente (b) 1

Exponente (n) 1

Exponente (m) 1

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

## Exploremos.

Productos notables y factorización.

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección, explora la siguiente escena interactiva.

### Indicaciones.

Sigue las instrucciones que se muestran en cada pantalla, oprime las flechas para avanzar o retroceder a otra escena.



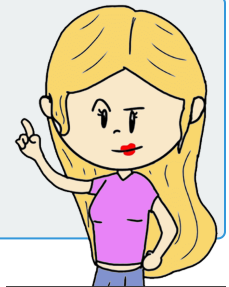
The screenshot shows a web browser window with the title "1.1 - Productos notables y factorización | Exploración" and a tab labeled "Matemáticas". The main content area contains the instruction "Utiliza las piezas para rellenar el rectángulo azul." Below this, there is a large blue rectangle. To the left of the rectangle are three pieces: a small white square labeled "1", a yellow horizontal rectangle labeled "x", and a pink square labeled "x<sup>2</sup>". At the bottom center of the interface is a "Verificar" button, and at the bottom right is a right-pointing arrow button. There are also window control icons in the top right corner.



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



### 3. Potencias de binomios

Los binomios se desarrollan de la siguiente forma:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

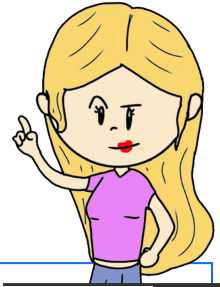
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Detallando el desarrollo de los binomios se tiene que:

- El número de términos del resultado es uno más que el exponente del binomio.
- El exponente del primer y último término del binomio, son iguales al exponente del binomio.
- El exponente de “ $a$ ” disminuye de uno en uno en cada término y en cambio “ $b$ ” aumenta de uno en uno para cada término.
- Todos los términos del desarrollo de cada binomio son positivos, pero fueran de la forma  $(a-b)^2$ ,  $(a-b)^3$ ,  $(a-b)^4$ , ..., los signos alternarían: (+), (-), (+), (-), ...
- Al analizar los coeficientes numéricos para cada término del desarrollo de un binomio se observa que son simétricos.

## Triángulo de Pascal.

Los términos simétricos tienen los mismos coeficientes, la simetría de los términos permite disponer los coeficientes de cada binomio en forma de un triángulo como se muestra a continuación:



$$\begin{array}{l} (a + b)^0 = 1 \text{ -----} 1 \\ (a + b)^1 = 1a + 1b \text{ -----} 1 \quad 1 \\ (a + b)^2 = \text{-----} 1 \quad 2 \quad 1 \\ (a + b)^3 = \text{-----} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ (a + b)^4 = \text{-----} 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ (a + b)^5 = \text{-----} 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ (a + b)^6 = \text{-----} 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

Con el triángulo de Pascal, se deduce:

- ✓ Los coeficientes de los términos del extremo son iguales a uno.
- ✓ Sumando dos coeficientes seguidos de una fila, se obtiene un coeficiente de la fila siguiente.

**Ejemplo 3.7.** Descomposición del binomio  $(m-2n)^5$

$$(m)^5 - 5(m)^4(2n) + 10(m)^3(2n)^2 - 10(m)^2(2n)^3 + 5(m)(2n)^4 - (2n)^5$$

$$(m-2n)^5 = m^5 - 10m^4n + 40m^3n^2 - 80m^2n^3 + 80mn^4 - 32n^5$$

## 3.4 División de polinomios

### 1. División de monomios

Para dividir dos monomios:

1. Se dividen los coeficientes, aplicando la ley de los signos.
2. En la parte literal, se le aplica la propiedad de división de potencias de igual base:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad ; \quad \frac{a^m}{a^n} = 1$$

Siendo  $m > n$                   Siendo  $m < n$                   Siendo  $m = n$

Sólo se pueden dividir monomios con la misma parte literal y con el grado del dividendo mayor o igual que el grado de la variable (letra) correspondiente del divisor.

En la división de los coeficientes de cada monomios también se aplica la ley o regla de los signos, ya que la división algebraica de monomios consiste en una operación aritmética.

**¡Recuerda!** , la **división de monomios** es otro monomio que tiene por coeficiente la división (el cociente) de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias que tenga la misma base.



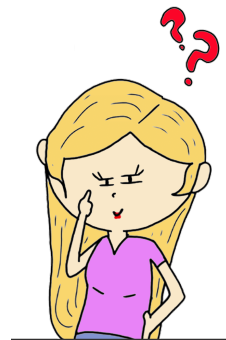
### Ejercicio 3.2.

División de monomios, simplificar:

Simplifique la siguiente expresión algebraica que contienen división entre monomios.

#### Indicaciones.

1. Resuelve el ejercicio propuesto
2. Oprime el botón **solución** para verificar el procedimiento.
3. De nuevo, oprime el botón **otro ejercicio** para un ejercicio nuevo y repite los pasos.



Simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{-42 b^{28}}{-7 b^6}$$


Solución



## 2. División de un polinomio por un monomio

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio, teniendo en cuenta la ley de signos y las propiedades de la potencia de bases iguales.

**Ejemplo 3.8.** División de un polinomio por un monomio.



$$\begin{aligned} \frac{12x^5 - 4x^3 + 50x^4}{-x^2} &= -\frac{12x^5}{x^2} + \frac{4x^3}{x^2} - \frac{50x^4}{x^2} \\ &= -12x^{5-2} + 4x^{3-2} - 50x^{4-2} \\ &= -12x^3 + 4x - 50x^2 \end{aligned}$$

## 3. División de un polinomio por otro polinomio

Tengamos en cuenta los siguientes pasos:

1. Ordenamos los polinomios en orden decreciente.
2. Dividimos el primer término del dividendo por el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente.
3. Multiplicamos este primer término del cociente por cada uno de los términos del divisor y el resultado lo restamos del dividendo, así obtenemos un dividendo parcial.
4. Continuamos a partir de este dividendo parcial, conforme lo indicamos en los paso 2 hasta obtener un residuo de menor exponente que el divisor.
5. Si el resultado es **cero** la división es **exacta**.

Para hacer la división, **se dividen** los monomios de mayor grado, luego, **se multiplican** cambiando de signo, y **se suman**, este proceso se repite hasta obtener un resto de grado menor que el del divisor.

La división de polinomios debe cumplir dos condiciones:

1.  $Dividendo = (divisor)(cociente) + resto$

2.  $Grado(resto) < Grado(divisor)$

El grado del cociente es la resta del grado del dividendo y del divisor; cuando el resto es cero, el divisor divide exactamente al dividendo. Observemos por medio de la escena la división de polinomios:

The screenshot shows a polynomial division on a grid background. The dividend is  $4x^3 - 7x - 1$ , the divisor is  $2x^2 - 3x + 1$ , and the quotient is  $2x + 3$ . The remainder is  $-4$ . The interface includes navigation buttons and a vertical scrollbar.

Otros polinomios	Otra paso a paso
------------------	------------------

Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

## División de polinomios con los coeficientes.

Se escriben los coeficientes del dividendo y del divisor, se **dividen** los primeros coeficientes, se **multiplica** el resultado por el divisor del último coeficiente y se resta al dividendo.



### Exploremos.

Observa los tres niveles de la escena:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 4x + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 4x + 6$$

P(x) Dividendo

Q(x) divisor

Pulsa el botón para ver paso a paso la división.



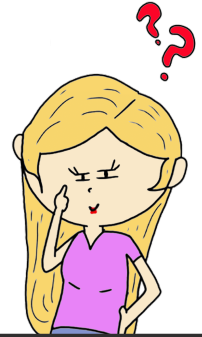
## 3.5 Practiquemos

### Ejercicio 1.

Simplifique la siguiente expresión algebraica que contienen operaciones de sumas, restas, productos, cocientes o potencias.

#### Indicaciones.

1. Resuelve el ejercicio propuesto, oprime el botón **solución** y verificar la respuesta.
2. De nuevo oprime el botón **ejercicio** para otro ejercicio.



Seleccione el tipo de ejercicio a resolver: **Combinación** ▾

**Simplificar la siguiente expresión:**

$$15x^6 - 10x^3 - 16x^6$$

**Solución**

## Ejercicio 2.

Mide tus conocimientos en la siguiente actividad interactiva.

EVALUAR si:  $a = 3, b = 1, c = 2$

COLUMNA 1


COLUMNA 2


Arrastra los elementos:  
Columnas 1 y 2, de tal forma que las parejas queden asociadas.

$a^2 + b^2 + c^2$   
1 1 3  
1 4 1

$a^2 + ab^2 + b^2$   
4 5

Revolver

Otro test

Ten cuidado al soltar el objeto, es posible que quede debajo de otro, si esto ocurre, aparecerá un cuadrado de color verde.



Proyecto Descartes.org.

[4] Tomada de Plantillas con Descartes-JS



## Evaluamos lo aprendido.

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:



 **Evaluación - 10 preguntas con límite de tiempo - (10 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.

### Capítulo III: Expresiones algebraicas.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).



**Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo III](#)

Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.

[\[4\]](#) Plantillas con Descartes-JS



"Las matemáticas consisten en demostrar  
las cosas más obvias de la forma menos obvia".  
George Polye





# Capítulo IV

## Factorización



## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

**DBA.3.** Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones..

**DBA.5.** Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Tales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 8º.

### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

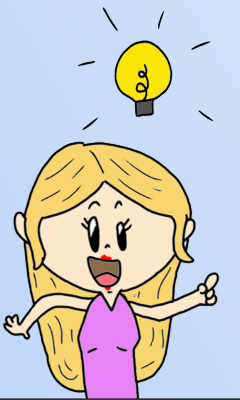
#### Pensamiento espacial

**2.4 M.IV** Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

DBA 5.

#### Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

**5.2 M.IV** Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. DBA 3, 9.



El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.

## 4.1 Casos de factorización de polinomios



Factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de otros polinomios que tengan menor grado que éste. Casos de factorización:

### 4.1.1 Factor común

Hace referencia al término común de un polinomio, pueden ser factores numéricos o factores literales.

Para encontrar el factor común, se realiza lo siguiente:

1. Encontrar el factor común numérico que corresponde al *M.C.D* de los coeficientes del polinomio común. (*MCD* → factores comunes elevados a su menor exponente).
2. El factor común literal está conformado por aquellas letras que están elevadas a su menor exponente.
3. El factor común para el polinomio corresponde a la multiplicación del factor común numérico con el factor común literal.

#### Ejemplo 4.1. Factorización por factor común.

La expresión, presenta un polinomio al lado izquierdo de la igualdad y a la derecha la factorización del polinomio.

$$4x^5 + 10x^9 = 2x^5(2 + 5x^4)$$

FACTOR COMÚN  $2x^5$

Factor Numérico: 2

Factor Literal:  $x^5$

Si aparecen expresiones con exponente cero, se han dejado sólo por ilustración.

Otro ejemplo

### Ejemplo 4.2.

Encontrar el factor común para el polinomio:  $3m^3 - 6m^2n$


Factor común numérico:  $\longrightarrow MCD(3, 6) = 3$

Factor común literal:  $\longrightarrow m^2$

por tanto, el factor común del polinomio es :  $3m^3 - 6m^2n = 3m^2$

### Exploramos.

Veamos por medio de un paso a paso como hallar el factor común de un polinomio, pulsa en botón para cada **paso** y sigue las instrucciones.



Factorizar  $P(x) = 90a^{13} + 30a^{11}b^7$

Paso 1

Ejercicio

Verificar

Una vez encontrado el factor común a los términos del polinomio, se procede a encontrar los términos que quedan al sacar el factor común, dividiendo cada término del polinomio por este factor, quedando en ésta forma factorizado completamente el polinomio.

### Ejemplo 4.3.

$5p^2q^3 + 10p^2q^2 + 20p^3q^4$  el factor común del polinomio es  $5p^2q^2$

Ahora dividimos cada termino por el factor común:

$$\frac{5p^2q^3}{5p^2q^2} + \frac{10p^2q^2}{5p^2q^2} + \frac{20p^3q^4}{5p^2q^2} = q^{3-2} + 2 + 4p^{3-2}q^{4-2}$$

Division de coeficientes numéricos, propiedad de división de potencias de igual base, por tanto,

$$5p^2q^3 + 10p^2q^2 + 20p^3q^4 = 5p^2q^2 ( q + 2 + 4pq^2 )$$

## 4.1.2 Diferencia de cuadrados

Se caracteriza por ser una diferencia (resta) entre dos términos que poseen raíz cuadrada exacta.

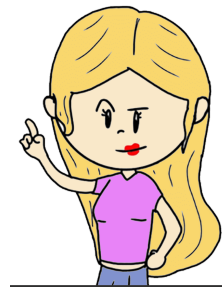
### Ejemplo 4.4. Factorización por diferencia de cuadrados.

Expresar la raíz cuadrada de cada termino.

$$9a^2 - b^2$$

Raíz cuadrada del primer término  $\longrightarrow 3a$

Raíz cuadrada del segundo término  $\longrightarrow b$



Una diferencia de cuadrados se factoriza como la suma de las raíces cuadradas, multiplicada por la diferencia de las mismas, simbólicamente se tiene:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

### Ejemplo 4.5.

Factorizar:  $25p^2 - 4q^2$

$$\frac{\sqrt{25p^2}}{5p} \quad \frac{\sqrt{4q^2}}{2q} \longrightarrow \text{Raíz cuadrada de cada termino}$$

Por tanto,  $25p^2 - 4q^2 = (5p - 2q)(5p + 2q)$

### Ejercicio 4.1.

Factorizar los siguientes polinomios si es posible.

1.  $a^2x^2 - 169 =$

2.  $a^2 - \frac{1}{25} =$

3.  $16y^4 - 36 =$

4.  $x^{2a} - y^{2b} =$

5.  $25 - 19y^2 =$

6.  $x^4 - 81$  (3 Factores) =

7.  $a^4x^2 - 81x^6$  (4 Factores) =

8.  $(2x - 5)^2 - (3x - 5)^2$

9.  $(y^2 - 6y + 9) - x^2 =$

10.  $(x^2 + 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1) =$

11.  $4a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) =$

12.  $16t^4 - x^4$  (3 Factores) =

## Exploremos.

Productos notables y factorización.

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección, explora la siguiente escena interactiva.

### Indicaciones.

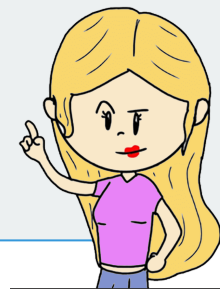
Sigue los pasos para la demostración gráfica.



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



### 4.1.3 Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio de la forma  $x^2 + bx + c$ , siempre que  $x^2 + bx + c = 0$  tenga solución, equivale al producto de dos binomios o factores, estos trinomios se factorizan de la siguiente forma:

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$$

Donde el primer término de cada binomio, es la raíz cuadrada del primer término del trinomio " $x$ " y los segundos términos de cada binomio son los números  $p$  y  $q$ , donde

La suma  $\longrightarrow p + q = b$

El producto  $\longrightarrow p \cdot q = c$



Simbólicamente se tiene:

$$x^2 + bx + c = (x + p)(x + q) \quad \text{donde,}$$
$$\sqrt{x^2} = x, \quad b = p + q, \quad c = p \cdot q$$

**Ejemplo 4.6.** Factorizar  $x^2 + 8x + 15$

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5) \quad \text{entonces,}$$
$$\sqrt{x^2} = x, \quad 8 = 3 + 5, \quad 15 = (3) \cdot (5)$$



### Ejercicio 4.2.

Practiquemos factorizando algunos trinomios, si es posible.

Ingresa los coeficientes  $p, q$ , pulsa la tecla "enter  $\leftarrow$ ", cambia los signos de cada factor con el botón  $+$  o  $-$  y oprime el botón **verificar**

Trinomio de la forma  $\rightarrow x^2 + bx + c$

$x^2 - 9x + 8 = (x + p)(x + q)$

Coeficiente (p)  Coeficiente (q)

Para cambiar el signo, Click en el botón  $+$   $-$

Ejercicio

Verificar

Se puede presentar el trinomio con la forma:  $x^{2n} + bx^n + c$

**Ejemplo 4.7.** Factorizar  $x^4 - x^2 - 6$

Se factoriza de igual manera, donde,

$$\begin{cases} b = (-3 + 2) = -1 \\ c = (-3)(2) = -6 \end{cases} \longrightarrow x^4 - x^2 - 6 = (x^2 - 3)(x^2 + 2)$$

## 4.1.4 Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Estos trinomios se factorizan de la siguiente forma:

Se caracterizan por ser muy parecidas a la forma  $x^{2n} + bx^n + c$ , con la diferencia de que la variable  $x^{2n}$  ya tiene un coeficiente "a" diferente de cero y uno.

**Ejemplo 4.8.** Trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ :

$$2x^2 + 7x - 15, \quad 3x^2 + 17x + 10, \quad 5x^2 - 17x + 6$$

Al factorizar trinomios de la forma  $x^{2n} + bx^n + c$  se llevan a la forma  $y^{2n} + by^n + c$ , donde se resuelven como en el caso anterior.



Simbólicamente se tiene que:

$$ax^{2n} + bx^n + c \rightarrow \text{trinomio dado,}$$

$$\frac{a(x^{2n} + bx^n + c)}{a} \rightarrow \text{multiplicamos y dividimos por } a,$$

$$\frac{ax^{2n} + (a)bx^n + a \cdot c}{a} \rightarrow \text{aplicamos propiedad distributiva,}$$

$$\text{El primer termino de cada binomio será: } (ax^n + p)(ax^n + q)$$

$$\text{por tanto, } (ax^n)^2 + b(ax^n) + ac = (ax^n + p)(ax^n + q),$$

$$\text{donde } \sqrt{(ax^n)^2} = ax^n, \quad b = p + q, \quad a \cdot c = p \cdot q$$

**Ejemplo 4.9.** Factorizar  $3x^2 + 17x + 10$

Multiplicamos y dividimos por 3  $\rightarrow \frac{3}{3} \cdot (x^2 + 17x + 10)$

Aplicamos propiedad distributiva  $\rightarrow \frac{3x^2 + 17(3x) + 30}{3}$

$$\begin{cases} 17 = 15 + 2 \\ 30 = (15)(2) \end{cases} \rightarrow \frac{(3x + 15)(3x + 2)}{3} = \frac{3(x + 5)(3x + 2)}{3}$$

$$\rightarrow 3x^2 + 17x + 10 = (x + 5)(3x + 2)$$



### Ejercicio 4.3.

Factorizar los trinomios de la forma  $ax^2 + bx + c$ .

Ingresa los coeficientes  $c_1, c_2, p, q$ , pulsa la tecla "enter <math>\downarrow</math>", cambia los signos de cada factor con el botón + o - y oprime el botón **verificar**



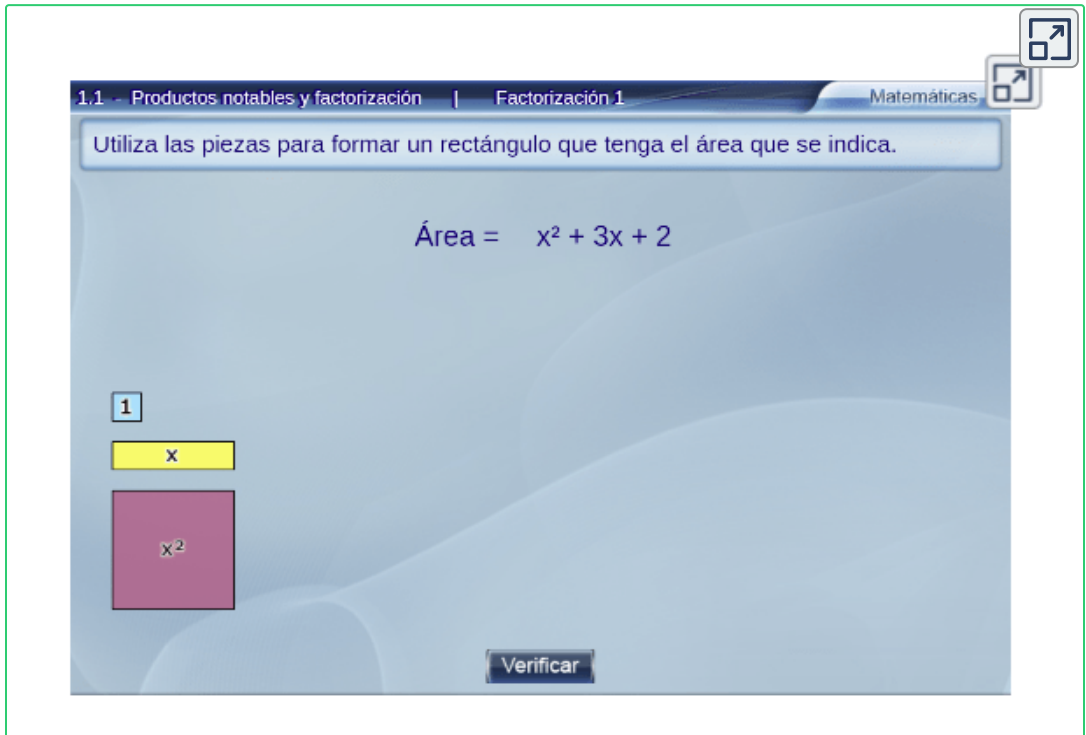
## Exploremos.

Productos notables y factorización.

Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección, explora la siguiente escena interactiva.

### Indicaciones.

Utilizar la piezas dadas para formar un rectángulo del área dada.



The screenshot shows a web browser window with the following elements:

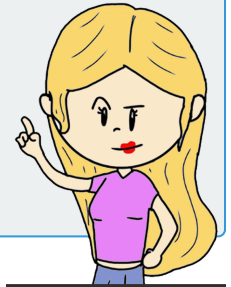
- Address bar: 1.1 - Productos notables y factorización | Factorización 1
- Page title: Matemáticas
- Instruction box: Utiliza las piezas para formar un rectángulo que tenga el área que se indica.
- Equation:  $\text{Área} = x^2 + 3x + 2$
- Numbered piece: 1
- Yellow rectangular piece:  $x$
- Pink square piece:  $x^2$
- Button: Verificar



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



## 4.1.5 Suma de cubos

Se trata de suma entre dos términos cuya característica es que pueden expresarse como cantidades que se pueden elevar al cubo, por lo tanto cada término posee raíz cúbica exacta.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Para factorizar una suma de cubos, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. Una suma de cubos es igual al producto de un binomio (dos términos) por un trinomio (tres términos).
2. El binomio está formado por la suma de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz, producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son: (+), (-), (+).

### Ejemplo 4.10.

Se tiene que:  $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$

Raíz cúbica del primer término  $\longrightarrow x$

Raíz cúbica del segundo término  $\longrightarrow 3$

### Ejemplo 4.11. Factorizar $y^3 + 64x^3$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y^3} = y \\ \sqrt[3]{64x^3} = 4x \end{cases}, \quad \text{donde } (y + 4x)(y^2 - 4xy + 16x^2)$$

## 4.1.6 Diferencia de cubos

Se trata de resta entre dos términos cuya característica es que pueden expresarse como cantidades que se pueden elevar al cubo, por lo tanto cada término posee raíz cúbica exacta.

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Para factorizar una diferencia de cubos, se tiene en cuenta lo siguiente:

1. Una diferencia de cubos es igual al producto de un binomio (dos términos) por un trinomio (tres términos).
2. El binomio está formado por la diferencia de las raíces cúbicas.
3. El trinomio consta de: cuadrado de la primera raíz, producto de las dos raíces y cuadrado de la segunda raíz.
4. Los signos del trinomio son: (+), (+), (+).

**Ejemplo 4.12.** Se tiene que:  $p^3 - 8k^3 = p^3 - (2k)^3$


Raíz cúbica del primer término  $\longrightarrow p$

Raíz cúbica del segundo término  $\longrightarrow 2k$

**Ejemplo 4.13.** Factorizar  $y^3 - 64x^3$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y^3} = y \\ \sqrt[3]{64x^3} = 4x \end{cases}, \quad \text{donde } (y - 4x)(y^2 + 4xy + 16x^2)$$

Ahora, veamos algunos ejemplos de la factorización de suma y diferencia de cubos.



**SUMA DE CUBOS,**  
 expresión de la forma:  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$64n^3 + x^3 = (4n + x)(16n^2 - 4nx + x^3)$

**DIFERENCIA DE CUBOS,**  
 expresión de la forma:  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$


$27c^3 - 64 = (3c - 4)(9c^2 + 12c + 16)$

[Otro ejemplo](#)

## 4.1.7 Factorización por agrupación

Algunos polinomios no se pueden factorizar directamente, mediante la aplicación de los casos vistos hasta ahora, sino que es necesario agrupar adecuadamente los términos antes de factorizar

**Ejemplo 4.14.** Factorizar el polinomio.



Polinomio  $\rightarrow x^3 - 11x^2 - x + 11$

$x^3 - 11x^2 - x + 11 \rightarrow$  Agrupamos  $\rightarrow (x^3 - 11x^2) - (x - 11)$

Factor común  $\rightarrow x^2(x - 11) - (x - 11)$

Factor común  $\rightarrow (x - 11)(x^2 - 1)$

Diferencia de cuadrados  $\rightarrow (x - 11)(x - 1)(x + 1)$

## 4.2 Practiquemos

### Ejercicio 1.

Factorizar los polinomios si se posible.



[Imprimir](#)

- 1).  $30 t^{18} - 30 t^5 =$
- 2).  $60 a^{18} b^5 + 60 a^{36} b^{15} =$
- 3).  $z^2 - 49 y^2 =$
- 4).  $49 a^2 + 14 ab + b^2 =$
- 5).  $324 x^2 + 14 xy + 49 y^2 =$
- 6).  $33 x^2 + 41 x + 13 =$
- 7).  $m^3 - 343 n^3$
- 8).  $14 n + 39 t + 38 m =$
- 9).  $14 m^{18} n - 13 m^2 n^5 =$

[Otro Ejercicio](#)



**Actividad complementaria.**

[Descargar para imprimir](#)







## Ejercicio 2.

Mide tus conocimientos de lo aprendido en esta sección y resuelve la actividad interactiva siguiente.

### Indicaciones

Factorizar diferencia de cuadrados.



Arrastrar las imágenes al recuadro en el orden que se realiza la factorización, ten presente que no queden imágenes montadas.

### FACTORIZAR DIFERENCIA DE CUADRADOS

Arrastra la imágenes a los cajones, en orden de acuerdo al signo. Procura no dejar imágenes montadas.

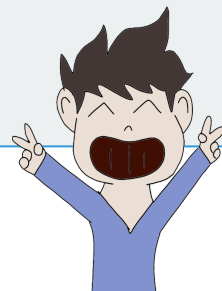
1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



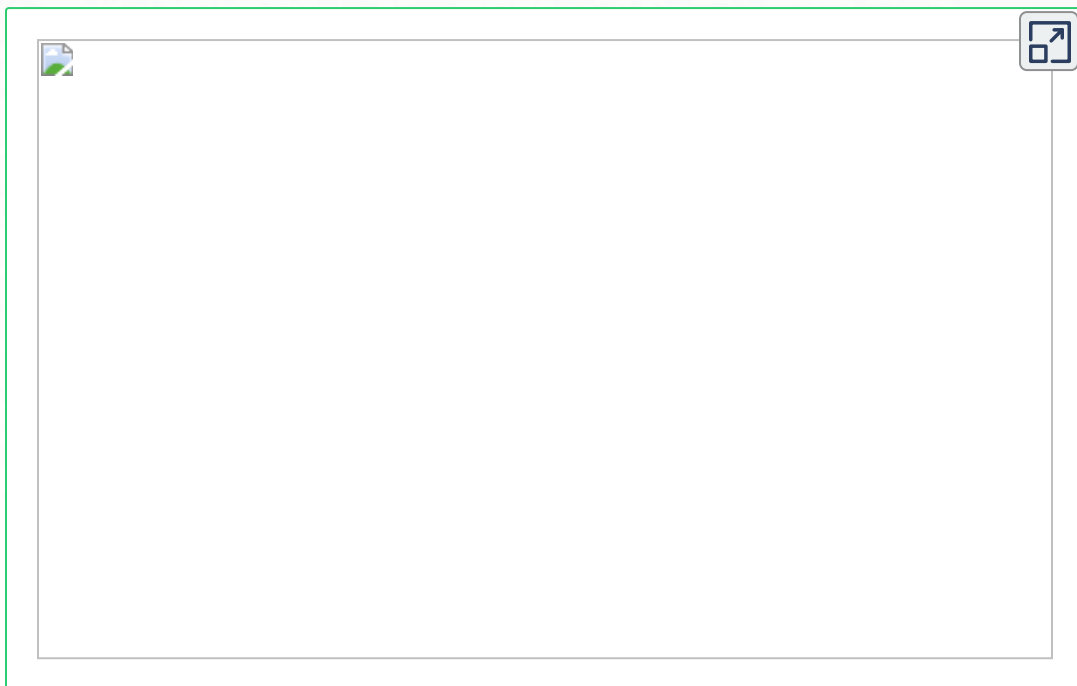
Proyecto Descartes.org.


[4] Tomada de Plantillas con Descartes-JS




## Evaluamos lo aprendido

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:




 **Evaluación - 10 preguntas con límite de tiempo -**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.



### Capítulo IV: Factorización.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).

 **Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo IV](#)

Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.

[\[4\]](#) Plantillas con Descartes-JS



"Ninguna investigación humana puede ser llamada verdadera ciencia si no puede ser demostrada matemáticamente".

Leonardo da Vinci



# Capítulo V

## Operaciones Algebraicas



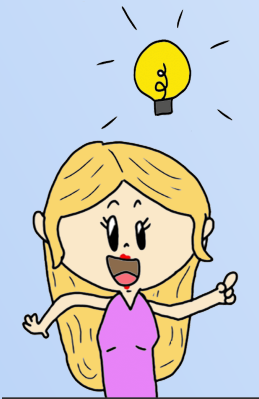
## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

**DBA.3.** Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones..

**DBA.8.** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 8º.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

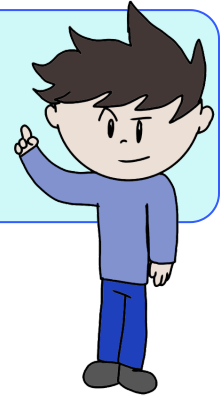
**Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos**  
**5.2 M.IV** Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. DBA 3, 9.  
**5.3 M.IV** Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. DBA 8.

El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.

## 5.1 Fracciones racionales

### 5.1.1 Simplificación de fracciones aritméticas

**¡Recuerda!**, para simplificar fracciones, escribimos el numerador y el denominador como un producto de factores y cancelamos los **factores comunes** a ambos.



Una fracción aritmética está simplificada cuando el único factor común al numerador y al denominador es el número "1".

**Ejemplo 5.1.** Simplificación de una fracción aritmética.

$$\frac{4}{8} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{48}{270} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{5}} = \frac{8}{45}$$

$$\boxed{\frac{\cancel{4} + \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4} \longrightarrow \text{¡ERROR!}$$

$$\frac{4 + 3}{3} = \frac{7}{3}$$

Para simplificar, cancelamos los **factores comunes** al numerador y al denominador.

Cuándo el denominador de una fracción es cero "0" se dice que la fracción no existe o no está definida.

**¡Cuidado!** No podemos simplificar términos de una suma, sólo factores multiplicativos.

## 5.1.2 Simplificación de fracciones racionales

Al igual que las fracciones aritméticas, decimos que una fracción algebraica está simplificada, cuando el único factor común al numerador y al denominador es el número "1", es decir, cuando el numerador y el denominador sean primos entre sí.

Para simplificar fracciones algebraicas procedemos de la forma:

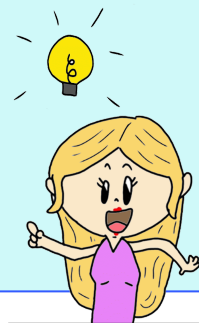
1. Factorizamos el numerador y el denominador.
2. Suprimimos los **factores comunes** al numerador y denominador. ¡Cuidado!, no podemos cancelar sumandos).

### Ejemplo 5.2.

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)^2}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{(x-2) \cdot \cancel{(x-2)}}{(x+2) \cdot \cancel{(x-2)}} = \frac{(x-2)}{(x+2)} \longrightarrow \text{Suprimiendo factores comunes.}$$

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{36 - x^2} = \frac{(x-6) \cdot (x+1)}{(6-x) \cdot (6+x)} = \frac{-\cancel{(6-x)} \cdot (x+1)}{\cancel{(6-x)} \cdot (x+6)} = \frac{-(x+1)}{(x+6)} = -\frac{x+1}{x+6}$$

En ocasiones, se requiere cambiar el orden de los términos de uno o varios factores, como en el ejemplo 2, el orden del factor  $(x-6)$ , por eso se le antecedió con un signo menos antes del paréntesis y se cambió el orden de los términos dentro del paréntesis, quedando  $-(6-x)$ .



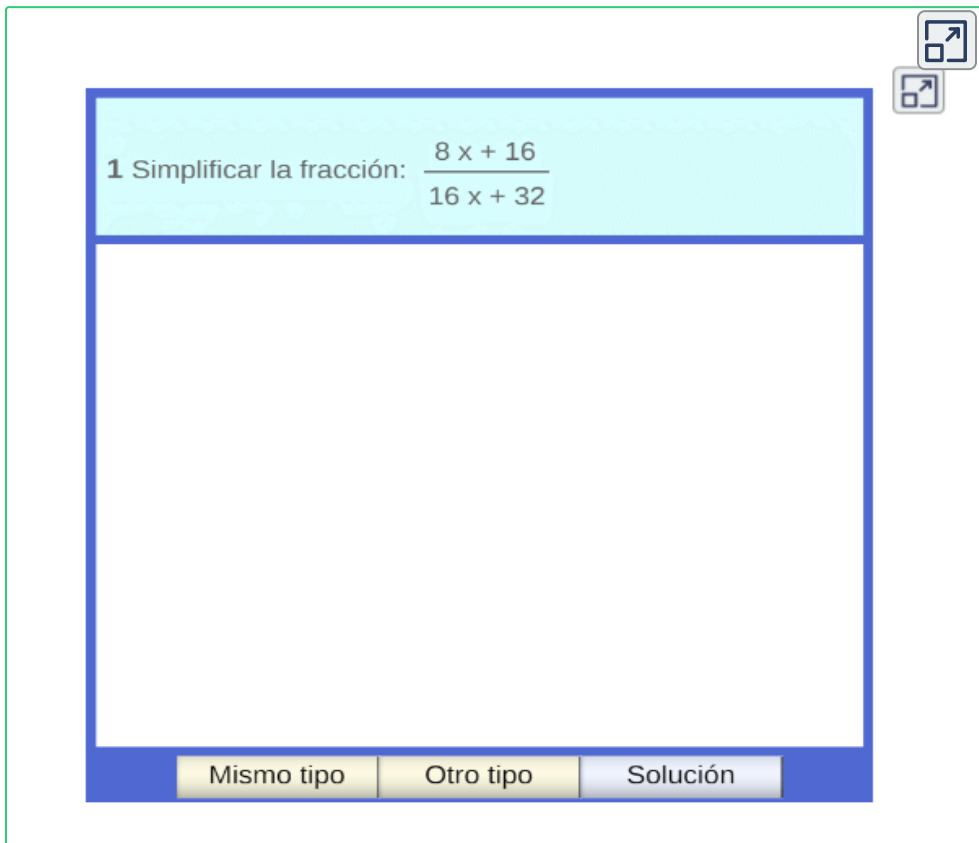


## Ejercicio 5.1.

Simplificar de fracciones racionales

### Indicaciones

1. Primero selecciona el tipo de expresión a simplificar, luego, soluciona la expresión racional dada, verifica haciendo clic en el botón **solución**.
2. Por último, realiza el mismo procedimiento para otro ejercicio.



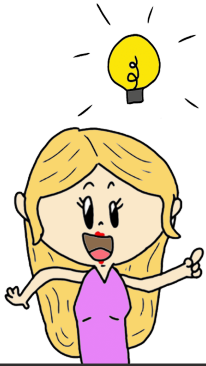
The screenshot shows a software interface for simplifying rational fractions. At the top, there is a light blue header with the text "1 Simplificar la fracción:" followed by the fraction  $\frac{8x + 16}{16x + 32}$ . Below the header is a large white area for the user's solution. At the bottom, there is a dark blue bar containing three buttons: "Mismo tipo", "Otro tipo", and "Solución". In the top right corner of the interface, there are two small icons: a square with an arrow pointing out and a square with an arrow pointing in.

Escena de Consolación Ruiz Gil con licencia [CC by-nc-sa](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

## 5.2 Operaciones entre fracciones racionales

### 5.2.1 Suma y diferencia de fracciones racionales

Para sumar o restar fracciones racionales hacemos lo siguiente:



1. Hallamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) de los denominadores.
2. Dividimos el m.c.m. encontrado entre el denominador de cada fracción y lo multiplicamos por el numerador respectivo.
3. Efectuamos las operaciones indicadas y simplificamos el resultado, si es posible.

#### Ejemplo 5.3.

Simplificar  $x + 3 + \frac{6}{x - 5}$

Expresamos el término  $(x + 3)$  como un fracción, se coloca de denominador un "1", y se opera con la otra fracción:

$$\frac{x + 3}{1} + \frac{6}{x - 5} = \frac{(x + 3)(x - 5) + 6}{x - 5} =$$

Aplicamos propiedad distributiva y se agrupan los términos semejantes, se verifica si es posible simplificar la expresión final obtenida.

$$\frac{x^2 + 3x - 5x - 15 + 6}{x - 5} = \frac{x^2 - 2x - 9}{x - 5}$$

**Ejercicio 5.2.**

Simplifiquemos expresiones racionales de suma y diferencia



## 5.2.2 Producto de fracciones racionales

Para multiplicar fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. Factorizamos los numeradores y denominadores, si es posible.
2. Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.
3. Suprimir (cancelar) los factores comunes que aparezcan entre el numerador y el denominador de las fracciones.

**¡Recuerda!** , la multiplicación de fracciones es:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \longrightarrow \frac{\text{Numeradores entre sí}}{\text{Denominadores entre sí}}$$

### Ejemplo 5.4.

Multipliquemos y simplifiquemos la siguiente fracción racional:

Factorizamos las expresiones

$$\frac{x^2 - 25}{3x^2 + 11x + 10} \cdot \frac{4x + 8}{x^2 - 2x - 15} = \frac{(x+5) \cdot (x-5)}{(3x+5) \cdot (x+2)} \cdot \frac{4(x+2)}{(x+3) \cdot (x-5)}$$

Simplificamos

$$= \frac{(x+5) \cdot \cancel{(x-5)} \cdot 4 \cdot \cancel{(x+2)}}{(3x+5) \cdot \cancel{(x+2)} \cdot (x+3) \cdot \cancel{(x-5)}}$$

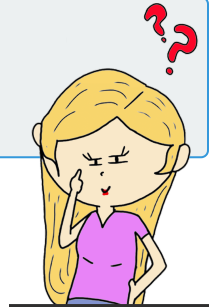
por lo tanto

$$\frac{x^2 - 25}{3x^2 + 11x + 10} = \frac{4 \cdot (x+5)}{(3x+5) \cdot (x+3)}$$



### Ejercicio 5.3.

Simplificar productos de fracciones racionales



Resuelva el ejercicio propuesto, oprima el botón **solución**, verifique el procedimiento, para un nuevo ejercicio, oprima el botón **ejercicio** y repita los pasos.

Simplificar la expresión racional:  $\frac{x+5}{x^2+x} \cdot \frac{x^2-5x}{x-6}$

Solución

## 5.2.3 División de fracciones racionales

Para dividir fracciones racionales hacemos lo siguiente:

1. En primer lugar, la segunda fracción se cambia por su inverso multiplicativo, convirtiendo la división en una multiplicación.
2. Se continúa con el mismo proceso de la multiplicación, factorizamos todos los numeradores y los denominadores.
3. Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí.
4. Suprimir (cancelar) los factores comunes que aparezcan entre el numerador y el denominador de las fracciones.

### Ejemplo 5.5.

Dividamos y simplifiquemos la siguiente fracción racional:

$$\frac{3x-15}{x+3} \div \frac{12x+18}{4x+12} = \frac{3x-15}{x+3} \cdot \frac{4x+12}{12x+18} = \frac{3 \cdot (x-5)}{(x+3)} \cdot \frac{4 \cdot (x+3)}{6 \cdot (2x+3)}$$

$$\frac{3x-15}{x+3} \div \frac{12x+18}{4x+12} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot (x-5) \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot \underset{2}{\cancel{6}} \cdot (2x+3)} = \frac{2 \cdot (x-5)}{2x+3}$$

**¡Recuerda!** , en la división de fracciones, se multiplica en cruz o multiplicamos por el inverso multiplicativo de la 2ª fracción:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$





### Ejercicio 5.4.

Simplifiquemos divisiones de expresiones racionales.

Resuelva el ejercicio propuesto, oprima el botón **solución** para verificar el procedimiento, para un nuevo ejercicio, oprima el botón **ejercicio** y repita los pasos.

Simplificar:  $\frac{x^2 + 3x - 18}{x - 2} \div \frac{x - 3}{x + 1}$

Solución

**¡Recuerda!** , usar el mismo proceso para multiplicar y dividir expresiones racionales que el que se utiliza para multiplicar y dividir fracciones numéricas. **¡El proceso es el mismo, aunque las expresiones se vean diferentes!**, por ejemplo:



$$\checkmark \quad \frac{8}{5} \cdot \frac{10}{6} = \frac{8 \cdot 10}{5 \cdot 6} = \frac{\cancel{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2} \cdot 3} = \frac{8}{3}$$

$$\checkmark \quad \frac{15}{2} \div \frac{5}{6} = \frac{15}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{15 \cdot 6}{2 \cdot 5} = \frac{\cancel{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5}} = \frac{9}{1} = 9$$

## 5.3 Practiquemos

### Ejercicio 1.

Simplifica las expresiones racionales dadas que contienen sumas, restas, productos o divisiones.

#### Indicaciones.

1. Resuelve el ejercicio propuesto
2. Oprime el botón **solución** para verificar el procedimiento.
3. Para un nuevo ejercicio, oprime el botón **ejercicio** y repita los pasos.



1. Simplificar:  $\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 5x + 6} \cdot \frac{x^2 + x - 2}{x}$

Solución

## Ejercicio 2.

Simplifica las expresiones racionales dadas que contienen diferentes operaciones básicas como: sumas, restas, productos o divisiones.



1. Simplifica las expresiones racionales con contienen sumas y restas.

$$1. \quad \frac{x-7}{15} + \frac{x-9}{25} - \frac{x+3}{45}$$

$$2. \quad \frac{a-2b}{2a} - \frac{a-5b}{4a} + \frac{a+7b}{8a}$$

$$3. \quad \frac{2}{xy} - \frac{3y^2-x^2}{xy^3} + \frac{xy+y^2}{x^2y^2}$$

$$4. \quad \frac{x-3}{5x} + \frac{x^2-9}{10x^2} - \frac{8-x^3}{15x^3}$$

$$5. \quad \frac{a}{x^2-4} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

$$6. \quad \frac{1}{x(x-y)} + \frac{1}{y(x+y)}$$

$$7. \quad \frac{1}{2x-3y} - \frac{x+y}{4x^2-9y^2}$$

$$8. \quad \frac{1}{2x+y} + \frac{1}{2x-y} - \frac{3x}{4x^2-y^2}$$

$$9. \quad \frac{2a}{2a+3b} + \frac{3b}{2a-3b} - \frac{8b^2}{4a^2-9b^2}$$

$$10. \quad \frac{5x}{6(x^2-1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{3(x+1)}$$

$$11. \quad \frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-1}$$

$$12. \quad \frac{1+2a}{1-2a} - \frac{1-2a}{1+2a} - \frac{8a}{(1-2a)^2}$$

$$13. \quad \frac{1}{1+x} - \frac{x}{(1+x)^3} - \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

$$14. \quad \frac{x-a}{x+a} + \frac{a^2+3ax}{a^2-x^2} - \frac{x+a}{x-a}$$

$$15. \quad \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y-x}$$

$$16. \quad \frac{1}{2a+5b} + \frac{3a}{25b^2-4a^2} + \frac{1}{2a-5b}$$



## 2. Simplificar productos con expresiones racionales:

$$1. \frac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \cdot \frac{-4a^3bx^2}{3a^2bx}$$

$$6. \frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12} \cdot \frac{x^3-4x^2+9x-36}{x^4-81}$$

$$2. \frac{21x^2y^3}{13ab^2} \cdot \frac{28y^2x^3}{39a^2b^3}$$

$$7. \frac{x^2-9}{x+4} \cdot (2x-6)$$

$$3. \frac{2x^2y}{3yz} \cdot \frac{5z^2x}{7xy^2} \cdot \frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$$

$$8. \frac{3a(a-2b)^2}{2b^3} \cdot \frac{b(a+2b)}{6a^2} \cdot \frac{12ab}{a^2-4b^2}$$

$$4. \frac{x-y}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2}{y^2-xy}$$

$$9. \frac{a^2-3a}{b^2-2b} \cdot \frac{ab^2-2ab}{a^2-9} \cdot \frac{a}{b(a+3)}$$

$$5. \frac{14x^2-7x}{12x^3+24x^2} \cdot \frac{2x-1}{x^2+2x}$$

$$10. \frac{2x^2+3x}{y^2-2y} \cdot \frac{xy^2-2xy}{4x^2-9} \cdot \frac{x}{2xy-3y}$$

## 3. Simplificar divisiones con expresiones racionales.

$$1. \frac{6a^2bx^3}{2ab^2x^4} \div \frac{4a^3bx^2}{3a^2bx}$$

$$6. \frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+12} \div \frac{x^3-4x^2+9x-36}{x^4-81}$$

$$2. \frac{21x^2y^3}{13ab^2} \div \frac{28y^2x^3}{39a^2b^3}$$

$$7. \frac{x^2-9}{x+4} \div (2x-6)$$

$$3. \frac{2x^2y}{3yz} \div \frac{21x^2y^3z^2}{40xy^2z}$$

$$8. \frac{3a(a-2b)^2}{2b^3} \div \frac{12ab}{a^2-4b^2}$$

$$4. \frac{x-y}{x^2+xy} \div \frac{x^2}{y^2-xy}$$

$$9. \frac{a^2-3a}{b^2-2b} \cdot \frac{ab^2-2ab}{a^2-9} \div \frac{a}{b(a+3)}$$

$$5. \frac{14x^2-7x}{12x^3+24x^2} \div \frac{2x-1}{x^2+2x}$$

$$10. \frac{2x^2+3x}{y^2-2y} \div \frac{x}{2xy-3y}$$



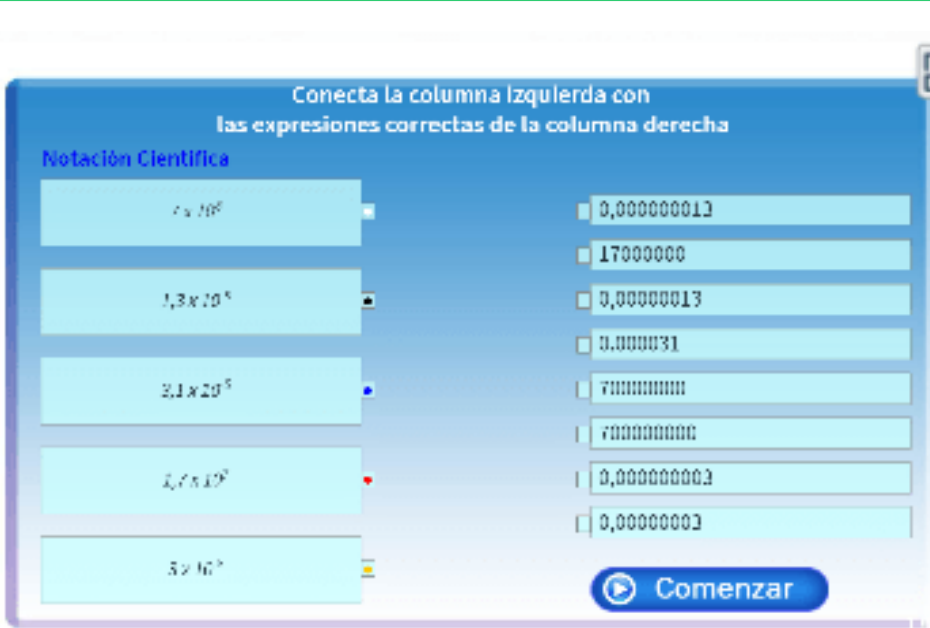
**Actividad complementaria.**

[Descargar para imprimir](#)



## Evaluamos lo aprendido.

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:




Conecta la columna izquierda con las expresiones correctas de la columna derecha

Notación Científica

$7 \times 10^6$	0,000000013
$1,3 \times 10^5$	17000000
$3,1 \times 10^5$	0,00000013
$4,7 \times 10^2$	0,000031
$5 \times 10^7$	70000000
	700000000
	0,000000003
	0,00000003

Comenzar

 **Evaluación - 5x2 preguntas con límite de tiempo - (25 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.

### Capítulo V: Operaciones Algebraicas.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).



**Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo V](#)

Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.

[\[4\]](#) Plantillas con Descartes-JS



"La matemática es la reina de la ciencia,  
y la aritmética la reina de la matemática".

Carl Friedrich Gauss



# Capítulo VI

## Ecuaciones



## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

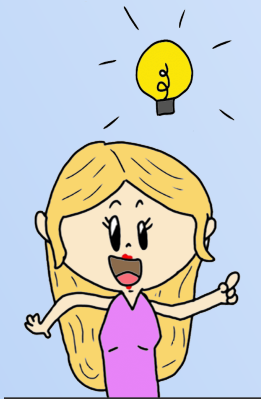
**DBA.1.** Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.8.** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 9°.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico

**1.2 M.IV** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. DBA 1, 2.

#### Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

**5.1 M.IV** Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. DBA8, 9

**5.5 M.IV** Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. DBA2, 8.

El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.

## 6.1 Ecuaciones

### 6.1.1 ¿Que es una ecuación?

Una ecuación consta de dos expresiones algebraicas relacionadas mediante una igualdad que contiene uno o más números desconocidos llamados incógnitas, por ejemplo:

$$6x - \frac{2}{3}x + 2 = 5x - \frac{1}{3} \quad (1)$$

La expresión a la izquierda del igual se conoce como primer miembro de la ecuación y la del lado derecho como segundo miembro de la ecuación.



Habitualmente a la incógnita la representamos con la letra  $x$ , que denominamos variable, en este caso, es una ecuación con una sola incógnita (letra en la ecuación).

Cualquier valor de la variable  $x$  que haga verdadera la igualdad se llama *solución* de la ecuación:

$$6(-7) - \frac{2}{3}(-7) + 2 = 5(-7) - \frac{1}{3}$$

$$-\frac{106}{3} = -\frac{106}{3}$$

por lo tanto,  $x = -7$  es solución de la ecuación (1).

Se puede presentar que en algunas ecuaciones se obtienen varias soluciones y se conocen como **conjunto solución** o **raíces** de la ecuación.

## 6.2 Ecuaciones lineales con una incógnita

Solucionar una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hacen verdadera la igualdad, transformando la ecuación a un equivalente de la forma  $x = a$  utilizando diferentes propiedades, donde  $a$  es solución o raíz de la ecuación original.

Para encontrar las soluciones de una ecuación, intentamos aislar la incógnita en uno de los miembros usando propiedades de los números reales y sus operaciones de forma que conserven la igualdad, observa el proceso de solución de la ecuación (1).

$$6x - \frac{2}{3}x + 2 = 5x - \frac{1}{3}$$

$$18x - 2x + 6 = 15x - 1$$

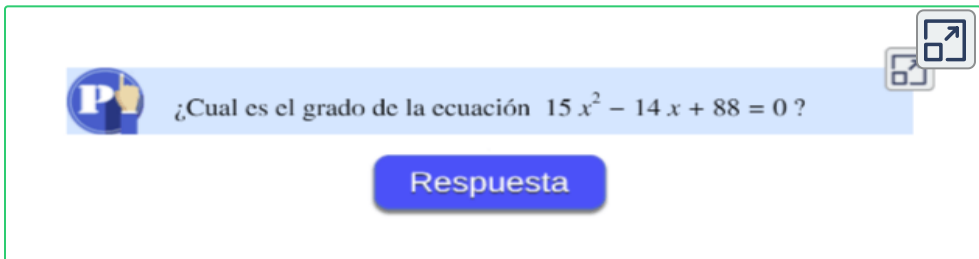
$$18x - 2x - 15x = -6 - 1$$

$$x = -7$$

¿Identificas cada paso? ([Ver explicación](#)).

Las ecuaciones son nombradas según el grado, el cual corresponde al grado del polinomio, por ejemplo:

$$18x - 2 = -6 \quad \longrightarrow \quad \text{Ecuación de primer grado o lineal.}$$



A screenshot of a digital interface showing a math problem and a button for the answer. On the left is a blue circular icon with a white 'P' and a hand pointing up. To its right is a light blue rectangular box containing the text: "¿Cual es el grado de la ecuación  $15x^2 - 14x + 88 = 0$  ?". In the top right corner of the interface are two small square icons: one with a magnifying glass and another with a square and an arrow pointing out. Below the question box is a blue rounded rectangular button with the word "Respuesta" in white text.





**¡Recuerda!** , llamamos **solución** de la ecuación a los valores de  $x$  que al sustituirlos en la ecuación resultan en una igualdad numérica. Decimos, entonces, que tal valor **satisface** la ecuación.

Observa la siguiente ecuación de primer grado con una incógnita:

$$4 - 6x = -2x - 4(x - 1)$$

$$4 - 6x = -2x - 4x + 4$$

$$-6x + 6x = 4 - 4$$

$$0 = 0$$

Cualquier valor que tome la incógnita, es solución de la ecuación:

$$\text{Si } x = 1 \longrightarrow 4 - 6(1) = -2(1) - 4((1) - 1)$$

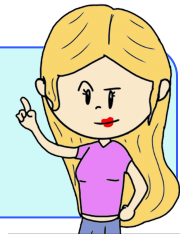
$$-2 = -2$$

$$\text{Si } x = -3 \longrightarrow 4 - 6(-3) = -2(-3) - 4((-3) - 1)$$

$$22 = 22$$

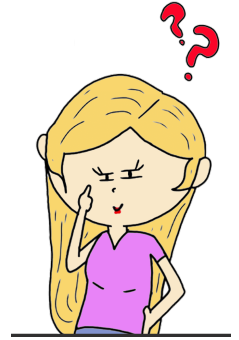
Por tanto, el conjunto solución son todos los números Reales ( $\mathbb{R}$ )


**¡Recuerda!** , Si quieres comprobar tu **solución**, sustituye la incógnita en la ecuación y debes obtener una igualdad.



De lo anterior, podemos deducir que una ecuación de primer grado con una incógnita, su solución puede ser:

- ✓ Una única solución o raíz.
- ✓ No tener solución.
- ✓ Tener infinitas soluciones, ¿Cuándo se presenta esto?



 **Ejercicio 6.1.**  
Ecuaciones lineales con una incógnita.

1. Resuelve la ecuación propuesta.
2. Oprime el botón **solución** verifica el resultado, para un nuevo ejercicio, oprima el botón **ejercicio** y repita los pasos.

Ecuación de 1° grado:  $(4 + x)(x + 7) - 2 = \frac{2 + 8x^2}{8}$

Solución

## 6.2.1 Situaciones problema con ecuaciones lineales

### ¿Estrategia para enfrentar una situación problema?

Si las variables que aparecen en un problema están relacionadas mediante una fórmula determinada, el problema se reduce a despejar y sustituir valores.

Algunas veces, las relaciones entre las variables del problema no vienen dadas en ninguna fórmula y es necesario determinar una ecuación que exprese la relación.

Para hacerlo es necesario estar bien familiarizado con el lenguaje cotidiano y expresarlo en forma adecuada por medio de expresiones algebraicas en lenguaje matemático.

Para la resolución de una situación problema, se tienen el siguiente método de análisis:



### Método de resolución de problemas de Polya.

Método que fue generalizado por el matemático George Polya para analizar situaciones problema en cuatro pasos.



Figura 6.1. Método de Polya.

Al intentar resolver un problema es útil aplicar los siguientes pasos:

**1. COMPRENDE, leer el problema cuidadosamente.**

Generalmente es necesario leer varias veces el problema hasta estar seguro de entender el significado y poder realizar la situación.

En esta etapa no es necesario escribir ni formular ecuaciones, pero es conveniente en algunos casos hacer un diagrama que ilustre la situación planteada y ayude a entender el problema.

**2. RESUELVE, expresar la información en el lenguaje algebraico.**

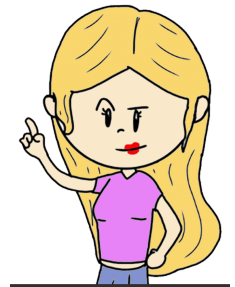
En este punto, se deben expresar las condiciones y datos del problema en el lenguaje algebraico, con lo que obtenemos una o varias ecuaciones.

**3. PLANIFICA, resolver la o las ecuaciones.**

Resolvemos las ecuaciones empleando los métodos ya conocidos para resolverlas.

**4. COMPRUEBA, verificar la solución.**

Es conveniente verificar que la solución obtenida satisface las condiciones del problema dado.



**Lista de chequeo.**

Método de resolución de problemas



## Pasos y preguntas orientadoras para la resolución de problemas.

**1**

**COMPRENDE**

- Lee el texto
- Di el problema con tus propias palabras
- ¿Qué información te dan?
- ¿Qué te piden?

Preguntas para profundizar

- ¿Sobra información?
- ¿Falta información?
- ¿Qué datos adicionales has descubierto en el texto?

**2**

**PLANIFICA**

- Elabora un plan
- ¿Que estrategias puedes usar?
- ¿Puedes encontrar alguna relacion entre lo que te dan y lo que te piden encontrar?
- ¿Has resuelto problemas parecidos más sencillos?

**3**

**RESUELVE**

- Lleva a cabo tu plan
- Escribe con cuidado y en forma ordenada tu trabajo
- ¿Hiciste todos los pasos?
- ¿En cada paso puedes decir lo que encontraste?

Preguntas para profundizar

- ¿Lo que hiciste te sirve para resolver otros problemas?
- Si ves que no te funciona, ¿puedes ensayar otro camino?

**4**

**COMPRUEBA**

- ¿Resolviste el problema?
- ¿Verificaste la solución?
- ¿Tu solución es razonable?
- ¿Escribiste en una frase correcta completa un respuesta al problema?

Preguntas para profundizar

- ¿Puedes resolver de otra manera el problema, te da la misma respuesta?
- ¿Puedes explicarle a alguien paso a paso como obtuviste la respuesta?



**Preguntas orientadoras.**  
Método de resolución de problemas



## 6.2.2 Problemas que contienen ecuaciones lineales

Es conveniente estar familiarizado con la forma de expresar algebraicamente gran cantidad de expresiones que con frecuencia se presentan en la cotidianidad.

Por ejemplo, símbolos como  $=$ ,  $<$ ,  $>$ ,  $+$  en otros, hacen parte de nuestro lenguaje, analicemos los siguientes frases expresadas en forma algebraica, donde " $x$ " representa un número indeterminado.

El triple de un número	$3x$
Un número aumentado en 3	$x + 3$
La tercera parte de un número	$\frac{x}{3}$
Tres enteros consecutivos	$x, (x + 1), (x + 2)$
Un número par o un número impar	$2x, (2x + 1)$
Dos números que su suma es 40	$x, (40 - x)$

**¡Recuerda!** , una variable " $x$ " es un símbolo que puede representar una cantidad real, por ejemplo:

- ✓ El número de años de Carlos (la edad de Carlos)
- ✓ La distancia entre dos ciudades
- ✓ El número de días empleados para realizar un trabajo
- ✓ El costo en pesos de un lápiz.
- ✓ La longitud del lado de un cuadrado.
- ✓ La altura de una montaña.



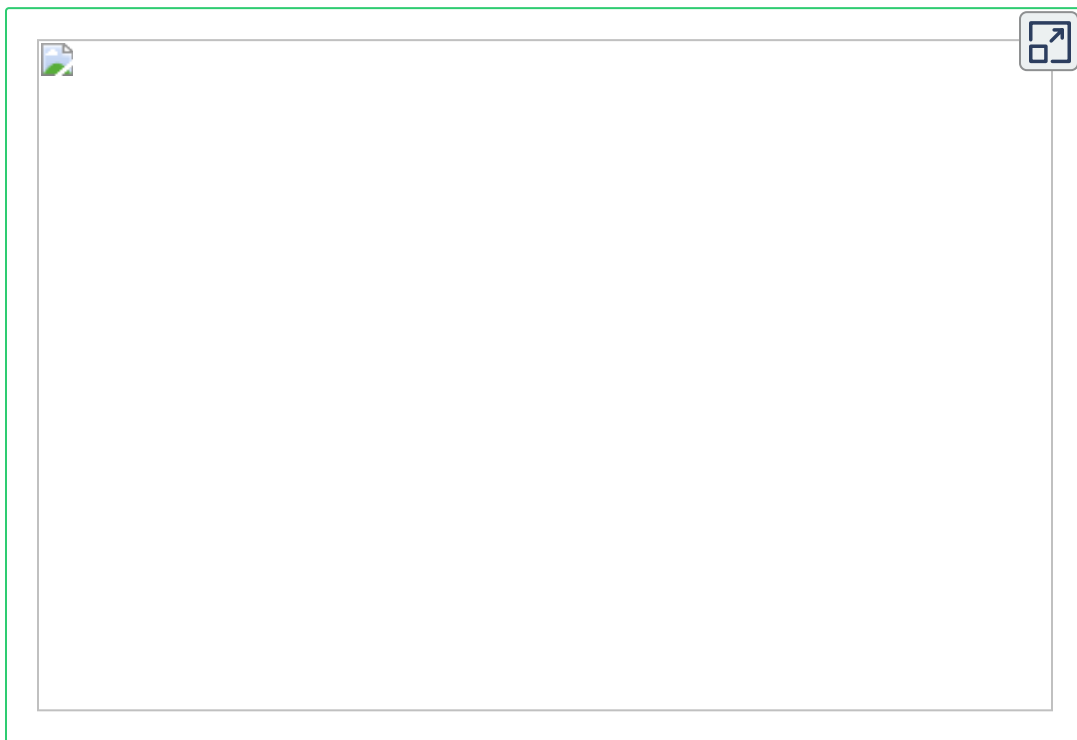
## Exploremos.

Expresiones escritas en lenguaje matemático, por ejemplo:

- ✓ El doble de un número menos su cuadrado  $\longrightarrow 2x - x^2$
- ✓ Dos números que multiplicados es 80  $\longrightarrow x, \frac{80}{x}$

## Indicaciones.

Arrastra la expresión al lugar adecuado para formar la ecuación.

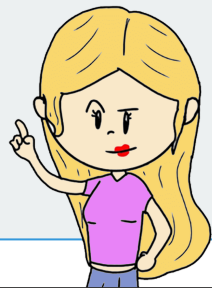




Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.





## Ejercicio 6.2.

Plantea problemas que expresan ecuaciones lineales.



### Indicaciones

Solucionar el problema y verificar las respuestas.

Se plantea el problema en lenguaje algebraico y se expresa el significado que le damos a la incógnita, se escribe la ecuación o las ecuaciones que se generan.

Oprime el botón **otro problema** para ver otros problemas o el botón **datos diferentes** para cambiar los datos del problema.

Responde a la siguiente pregunta:



**Ejercicio 6.3.**

Resuelve problemas que expresan ecuaciones lineales.

**Indicaciones**

Soluciona completamente el problema, intenta resolverlos antes de ver su solución, no memorizarlos, serán de gran ayuda para resolver los problemas propuestos al final del capítulo.

Oprime el botón **solución** y analiza la solución del problema, oprime el botón **ejercicio** para plantear un nuevo problema.

Si 84.4 es el 12 % de una cierta cantidad,  
¿cuál es el 58 % de dicha cantidad?

Solución



**¡Recuerda!** , si quieres comprobar la **solución** encontrada, sustituye el resultado hallado en la incógnita de la ecuación.

## 6.3 Ecuaciones cuadráticas con una incógnita

La ecuación cuadrática o también conocida como ecuación de segundo grado, donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números  $\mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ , se expresa de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

La ecuación cuadrática puede presentar las siguientes soluciones:

- ✓ Una, soluciones reales e iguales.
- ✓ Dos, soluciones reales diferentes.
- ✓ Ninguna solución en los números  $\mathbb{R}$  (soluciones imaginarias).

Para resolver o encontrar las posibles soluciones de una ecuación cuadrática, igualamos a cero la ecuación, es decir,  $ax^2 + bx + c = 0$  y se aplica una de las tres alternativas siguientes:

1. Factorización (si es posible).
2. Completar el cuadrado (si es posible).
3. Aplicar la fórmula general de la ecuación cuadrática:


$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1)$$

Para verificar si la ecuación tiene solución, se puede utilizar la expresión que se encuentra dentro la raíz cuadrada de la ecuación (1) llamada **discriminante**,



$$d = b^2 - 4ac \quad (2)$$

Se puede presentar uno de los siguientes casos si se analiza el valor del discriminante, expresión (2), teniendo presente lo siguiente:

- ✓ Si  $d > 0$ , tiene dos soluciones reales distintas.
- ✓ Si  $d = 0$ , tiene dos soluciones reales iguales.
- ✓ Si  $d < 0$ , no tiene solución en los números  $\mathbb{R}$ .



¿Que tipo de solución tiene la ecuación  $11x^2 + 20x = 0$ ?

Respuesta



Verifica ingresando los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación dada:

Ingresar los coeficientes  
a, b, c de la ecuación

a

b

c

Verificar



¿Sabes como se encuentra la solución de una ecuación de segundo grado (ecuación cuadrática)?



Existen varios métodos para resolver las ecuaciones de segundo grado, mencionados anteriormente.

El método apropiado para resolver una ecuación cuadrática depende del tipo de ecuación que se va a resolver.

Veamos algunos casos que se presentan:

**1° caso.** Ecuación de la forma  $ax^2 + c = 0$

Para este caso despejamos la variable, en nuestro caso,  $x$ , entonces la solución o raíces serán:

$$x_1 = \sqrt{\frac{c}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{c}{a}}, \quad \text{con } \frac{c}{a} > 0$$

**Ejemplo 6.1.** Veamos la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{4x + 3}{3x - 5} = \frac{6x - 1}{5x - 12}$$

$$(4x + 3)(5x - 12) = (6x - 1)(3x - 5)$$

$$20x^2 - 48x + 15x - 36 = 18x^2 - 30x - 3x + 5$$

$$2x^2 - 41 = 0$$

por tanto, las soluciones son dos raíces reales diferentes:

$$x_1 = \sqrt{\frac{41}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{41}{2}}$$

2º caso. Ecuación de la forma  $ax^2 + bx = 0$

En este caso tenemos la variable  $x$  en los dos términos, por lo tanto, podemos sacar un factor común  $x$ , es decir,

$$x(ax + b) = 0, \quad \text{donde } x = 0, \quad ax + b = 0$$

entonces la solución o raíces serán:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$$

**Ejemplo 6.2.** Veamos la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2}{5} - \frac{x - 25}{5} = 5$$

$$x^2 - (x - 25) = 25$$

$$x^2 - x + 25 - 25 = 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x = 0, \quad x - 1 = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada, corresponden a dos raíces reales diferentes.

En este tipo de ecuaciones, tienen dos soluciones reales diferentes, se debe tener presente que siempre una de las soluciones es:  $x = 0$



**3º caso.** Ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$

Para este tipo de ecuaciones se pueden presentar varias situaciones, una de ellas es, si el trinomio es factorizable

Para utilizar este método la ecuación cuadrática debe estar igualada a cero y factorizamos el trinomio de la forma  $x^2 + bx + c = 0$  o  $ax^2 + bx + c = 0$ .

**Ejemplo 6.3.** Veamos la solución de la siguiente ecuación:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados, entonces, las soluciones son dos raíces reales iguales:

$$x + 1 = 0$$

$$x_1 = x_2 = -1$$

En este caso, la ecuación  $(x + 1)^2 = 0$  corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, por tanto se dice que la raíz tiene multiplicidad 2, lo que equivale a tener dos soluciones o raíces iguales.



Si la ecuación de segundo grado no corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, se analiza si se puede ser factorizable por otro método.

**Ejemplo 6.4.** Veamos la solución de la siguiente ecuación:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x = -1$$

Vamos a reescribir esta ecuación completando cuadrados, sumando a ambos lados de la igualdad la cantidad  $(\frac{4}{2})^2$

$$x^2 - 4x + (\frac{4}{2})^2 = -1 + (\frac{4}{2})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$

$$(x - 2)^2 = 3$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados, obtenemos:

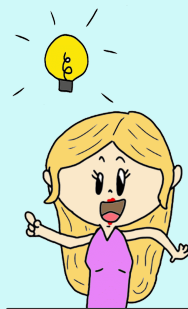
$$x - 2 = \sqrt{3}$$

por tanto, las soluciones son dos raíces reales diferentes:

$$x_1 = 2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

**¡Recuerda!** , para completar el cuadrado en una expresión de la forma  $x^2 + bx$ , se suma la expresión  $(\frac{b}{2})^2$  a ambos lados de la igualdad, y la expresión se vuelve:

$$x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = (x + \frac{b}{2})^2$$



Cualquiera que sea la ecuación cuadrática, la fórmula general es de gran utilidad para encontrar las raíces de la ecuación de 2° grado.

**Ejemplo 6.5.** Veamos la solución de la siguiente ecuación:

$$3x^2 + 4x - 15 = 0$$

donde  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $c = -15$ , si analizamos el discriminante:

$$d = (4)^2 - 4(3)(-15)$$

$$d = 196$$

Como  $d > 0$ , se tendrán dos soluciones reales diferentes, reemplazando entonces, en la ecuación cuadrática, se tiene:

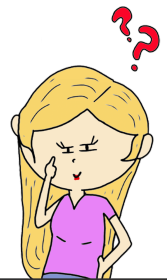
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{196}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 14}{6}, \quad x_2 = \frac{-4 - 14}{6}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}, \quad x_2 = -3$$

Por tanto, se tienen dos raíces reales diferente.


Responde de acuerdo a lo visto en la sección:



¿Que tipo de solución tiene la ecuación  $11x^2 + 18x = 0$ ?

Respuesta



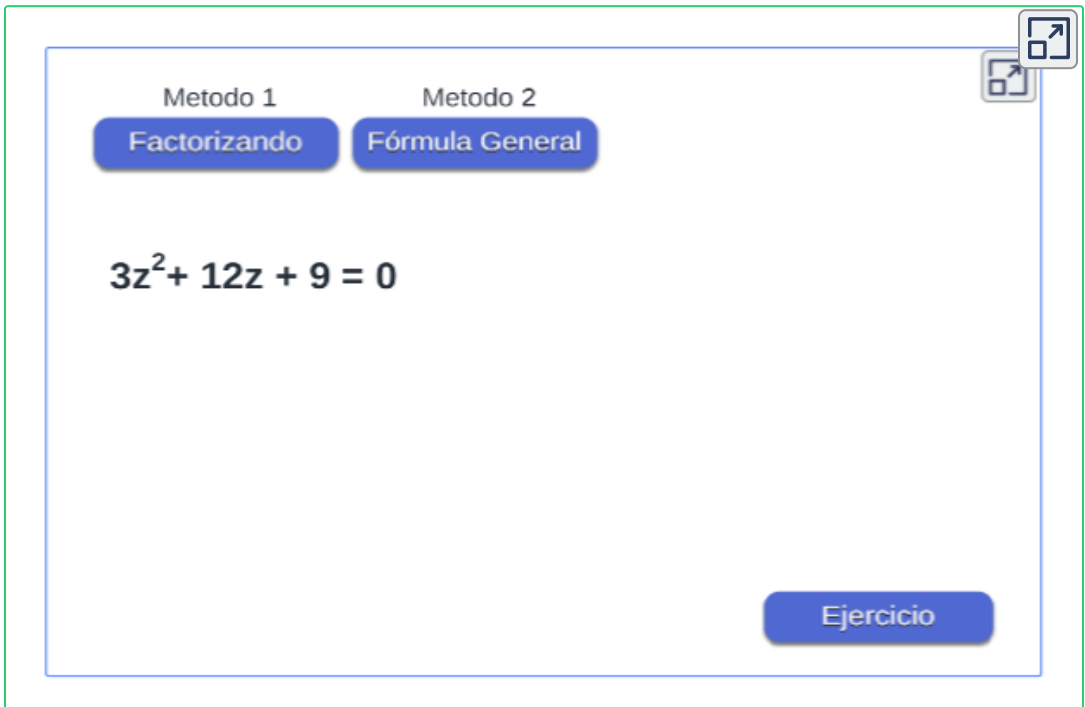
 **Ejercicio 6.4.** Ecuaciones de 2° grado.  
Aplicar los métodos de solución, ver solución gráfica.



### Indicaciones

Encuentra las raíces de la ecuación cuadrática.

1. Soluciona la ecuación propuesta, oprime el botón **factorizando** o **fórmula general** para indicar el método de solución, ingresa los datos, pulsa el botón **verificar** para ver la solución.
2. Por último, oprime el botón **ejercicio** para una nueva ecuación.  
¿Puedes indicar, sin resolver, el número de soluciones que tiene?



Metodo 1      Metodo 2

Factorizando      Fórmula General

$$3z^2 + 12z + 9 = 0$$

Ejercicio

La gráfica de la ecuación cuadrática corresponde a una parábola, donde, las soluciones o raíces son las intersecciones con el eje  $x$ .

## 6.3.1 Solución gráfica de la ecuación cuadrática

Veamos en la siguiente imagen, las posibles gráficas que se presentan de la ecuación cuadrática según el valor del discriminante ( $d$ ):

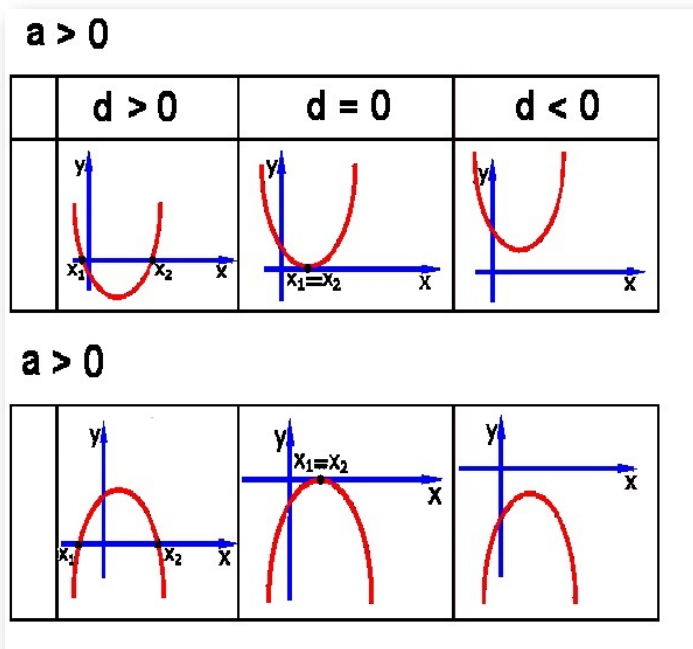


Figura 6.2. Gráfica de la función cuadrática.

En la figura se ve la solución gráfica que puede presentar una ecuación cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , donde el signo del coeficiente  $a$ , me indica si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.



Se puede observar que hay soluciones reales diferentes, iguales o no tener soluciones.

Las soluciones o raíces corresponden a las intersecciones o cortes en el eje  $x$ .

## Exploremos.

Observa la gráfica de la ecuación cuadrática.

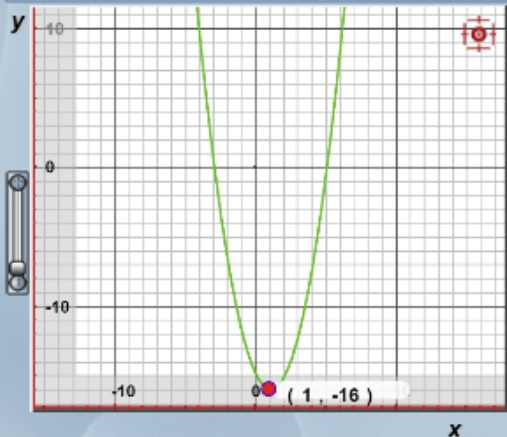
Verifica los conocimientos de lo visto en esta sección, explora la siguiente escena interactiva.

### Indicaciones.

Encuentra y comprueba las soluciones de la ecuación cuadrática dada según su gráfica.

2.1 - Ecuaciones no lineales | Gráfica 1
Matemáticas

La gráfica de  $y = x^2 - 2x - 15$  interseca al eje de las abscisas en dos puntos. Encuéntralos y comprueba que son solución de la ecuación  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .



**Ecuación de segundo grado**

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Sustituyendo x por 1

$$(1)^2 - 2(1) - 15 \neq 0$$

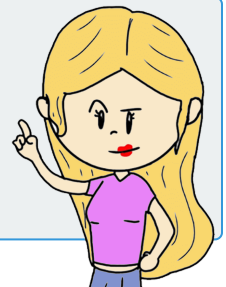
$$-16 \neq 0$$



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



Observemos la solución gráfica de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ .

The image shows a digital interface for solving a quadratic equation graphically. On the left, there is instructional text: "Ingresa los coeficientes a, b, c para ver la solución gráfica oprime 'enter <↵>'". Below this text are three input fields for coefficients 'a', 'b', and 'c', each containing the number '0'. To the right of these fields is a blue button labeled "Inicio". In the center is a large coordinate grid with a horizontal x-axis and a vertical y-axis. In the top right corner of the grid, there are two small square icons with arrows, one pointing up and one pointing right, likely for zooming or scrolling.

### 6.3.2 Otras formas de la ecuación cuadrática

Este tipo de ecuación, es llamada ecuación bicuadrada:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Se resuelve como una ecuación cuadrática haciendo un cambio de variable, cambiando  $x^2$  por  $y$ , por ejemplo:

$$x^4 - 12x^2 + 9 = 0$$

$$(x^2)^2 - 12(x^2) + 9 = 0$$

$$y^2 - 12y + 9 = 0$$

Otra forma de la ecuación cuadrática se puede presentar como:

$$a(f(x))^2 + b(f(x)) + c = 0$$

donde  $f(x)$  es una función de  $x$ , se dice que es una ecuación cuadrática, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5(\sqrt{x})^2 + 7(\sqrt{x}) - 9 &= 0 \\ 5x + 7(\sqrt{x}) - 9 &= 0 \end{aligned}$$

### Como hallar la ecuación cuadrática dadas sus raíces:

La **suma** de las raíces, es igual al negativo del cociente entre los coeficientes de  $x^2$  y  $x$ .

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b$$

El **producto** de las raíces, es igual al cociente del término constante y el coeficiente de  $x^2$ .

$$(x_1)(x_2) = \frac{c}{a} = c$$

La ecuación cuadrática se expresa como:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1)(x_2) = 0$$



**Ejemplo 6.6.** Hallar la ecuación si sus raíces son:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -2.$$

Suma de las soluciones  $\longrightarrow S = x_1 + x_2 = 3 - 2 = 1$

Producto de las soluciones  $\longrightarrow P = x_1 \cdot x_2 = (3)(-2) = 6$

por lo tanto, la ecuación es:  $x^2 - x - 6 = 0$



### Ejercicio 6.5.

Ecuaciones de 2º grado, aplicar los métodos de solución.



### Indicaciones

Solucionar ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

1. Selecciona la cantidad de ejercicios a resolver y el grado de dificultad.
2. Pulsa el botón **ejercicio** para generar la ecuación.
3. Resuelve la ecuación cuadrática, introduce la solución, si la solución no es fracción recuerda colocar un 1 en el denominador y oprime "enter <math>\leftarrow</math>"
4. Pulsa el botón **solución** para ver si lo has hecho bien.

The screenshot shows a user interface for generating exercises. At the top, there are two controls: "Cantidad de ejercicios" (Quantity of exercises) with a dropdown menu set to "1", and "Dificultad" (Difficulty) with a slider set to "0". A small icon in the top right corner of the interface indicates a window or refresh function. Below these controls is a large blue button labeled "Ejercicio".

### 6.3.3 Situación problema con ecuación de 2° grado

Con alguna frecuencia se nos presentan algunos problemas que llevados al lenguaje matemático se plantean las situaciones a través de una ecuación cuadrática o de segundo grado.

**Ejemplo 6.7.** Hallar dos números donde su suma es 25 y su producto 156.

$x$  : Representa uno de los números.

$25 - x$  : Representa el otro número.

Según los datos dados en el problema, se tiene que:

$$\begin{aligned} x(25 - x) &= 156 \\ 25x - x^2 &= 156 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 25x + 156 \end{aligned}$$

Solucionando la ecuación por factorización, se tiene que:

$$(x - 12)(x - 13) = 0$$

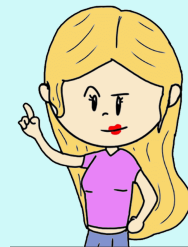
$$x_1 = 12, \quad x_2 = 13$$

$$\text{Si } x = 12 \quad \longrightarrow \quad 25 - x = 25 - 12 = 13$$

$$\text{Si } x = 13 \quad \longrightarrow \quad 25 - x = 25 - 13 = 12$$

Por tanto, las dos soluciones satisfacen la situación problema.

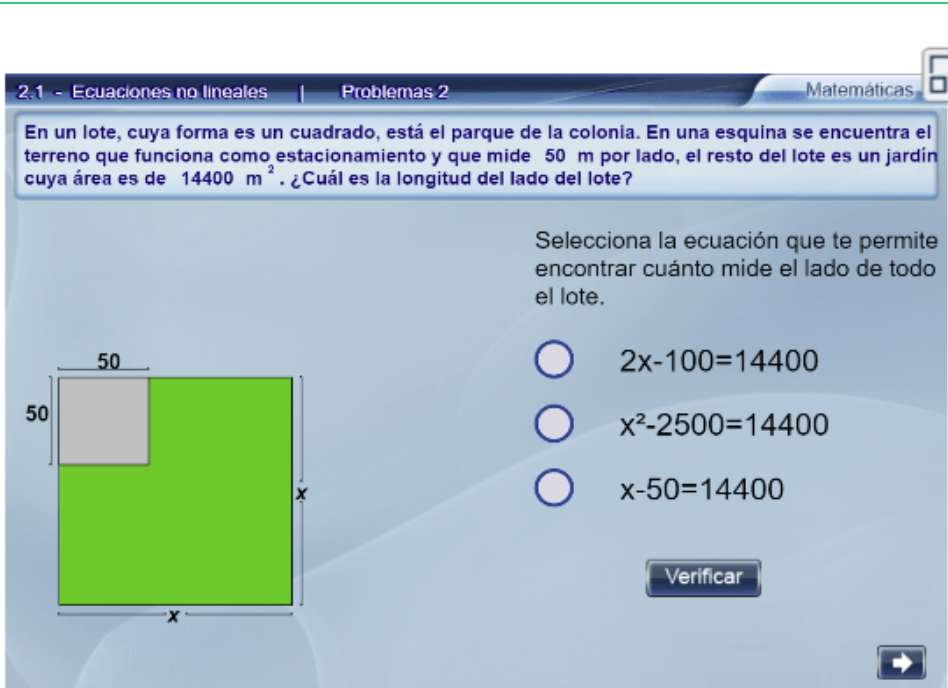
Cuándo se resuelve la ecuación, es posible que alguna de sus raíces no satisfagan las condiciones del problema y en consecuencia debe rechazarse, es conveniente, examinar las raíces y determinar aquellas que resuelvan satisfactoriamente las situaciones planteadas.



## Exploremos.

Situaciones que involucran ecuaciones de 2° grado.

Analiza las dos situaciones problema que se plantean a continuación:



2.1 - Ecuaciones no lineales | Problemas 2 Matemáticas

En un lote, cuya forma es un cuadrado, está el parque de la colonia. En una esquina se encuentra el terreno que funciona como estacionamiento y que mide 50 m por lado, el resto del lote es un jardín cuya área es de  $14400 \text{ m}^2$ . ¿Cuál es la longitud del lado del lote?

Selecciona la ecuación que te permite encontrar cuánto mide el lado de todo el lote.

$2x-100=14400$

$x^2-2500=14400$

$x-50=14400$

Verificar

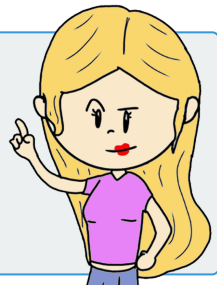
**¡Recuerda!** , las estrategias para enfrentar diferentes situaciones problema ([página 129](#)).



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.





## Ejercicio 6.6. Aplicación de física.

**Situación problema.** Se va a construir un corral con área de forma rectangular, expresada mediante una función cuadrática.



### Indicaciones

Soluciona la siguiente situación problema.

1. Oprime el botón **animar** , realiza los cálculos para luego verificar las respuestas.
2. Ingresa los resultados de las preguntas dadas,
  - a. ¿Cuál es la medida de los lados?
  - b. ¿Cuál es el área máxima?
3. Oprime "enter <math>\leftarrow</math>" y verifica los resultados.



**Animar**

¿Medida de los lados?

¿Área máxima?

Área vs distancia

Se va a construir un corral rectangular para la alimentación de ganado, con 90 m de cerca.  
Área en función de  $x$  mediante la expresión:

$A(x) = -x^2 + 45x$

¿Podrías calcular el **área máxima**?  
¿Y **la medida de los lados** para lograrlo?

## Ejercicio 6.7. Aplicación de física.



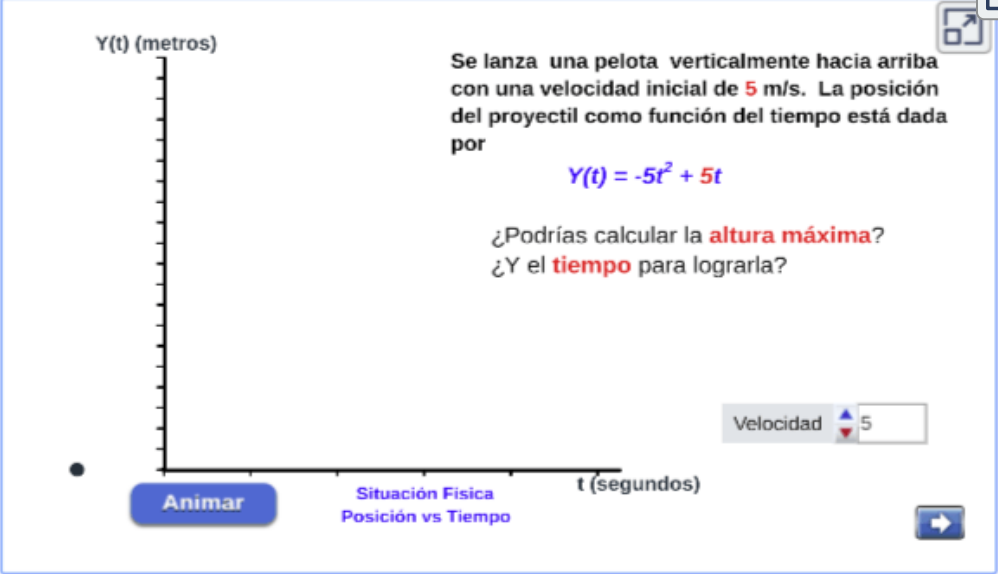
### Situación problema, piensa y analiza.

¿Cómo se debe lanzar una pelota, para que alcance la máxima distancia horizontal?, ¿Cómo se llama esta trayectoria?. ¿Desde las matemáticas, cómo se puede interpretar este movimiento?

1. Observa la curva que se describe, cuando se lanzada verticalmente con una determinada velocidad una pelota. Modifica el control de la velocidad y oprime el botón **Animar**.
2. Modifica el control de la velocidad y oprime **Animar** para ver la trayectoria de la pelota. Ingresa los valores de  $Y_{\max}$  y  $t_{\text{vértice}}$ , oprime "enter <⏏>" para verificar los resultados.



Oprime la botón para avanzar o retroceder en las situaciones.



Y(t) (metros)

Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 5 m/s. La posición del proyectil como función del tiempo está dada por

$$Y(t) = -5t^2 + 5t$$

¿Podrías calcular la **altura máxima**?

¿Y el **tiempo** para lograrla?

Velocidad

**Animar** Situación Física Posición vs Tiempo t (segundos)

## 6.4 Ecuaciones con grado mayor o igual a tres

Para  $n > 2$ , se tiene la siguiente ecuación:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

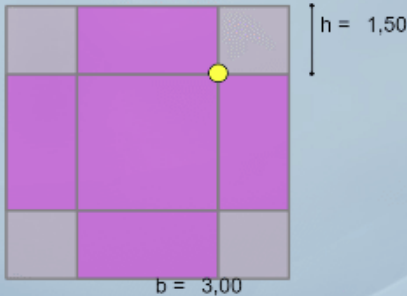
Este tipo de ecuación se puede descomponer en factores de primer y segundo grado, entonces basta igualar a cero cada uno de los factores y resolver las ecuaciones de primer grado y de segundo grado resultantes.

### Exploremos.

Analiza y explora las siguientes escenas interactivas, observa las gráficas de las ecuaciones que se plantean según la situación.

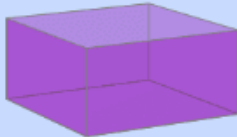
2.1 - Ecuaciones no lineales | Gráfica 2
Matemáticas

De cada una de las esquinas de una lámina de metal se cortan pequeños cuadrados y luego se doblan los bordes para formar una caja abierta. Arrastra el punto amarillo para aumentar la base y disminuir la altura. ¿Cuál es el mayor volumen que puede alcanzar la caja?

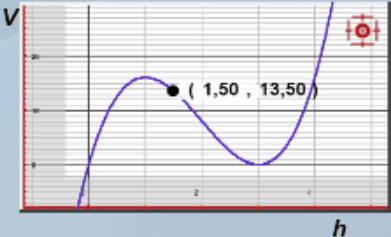


$b = 3,00$

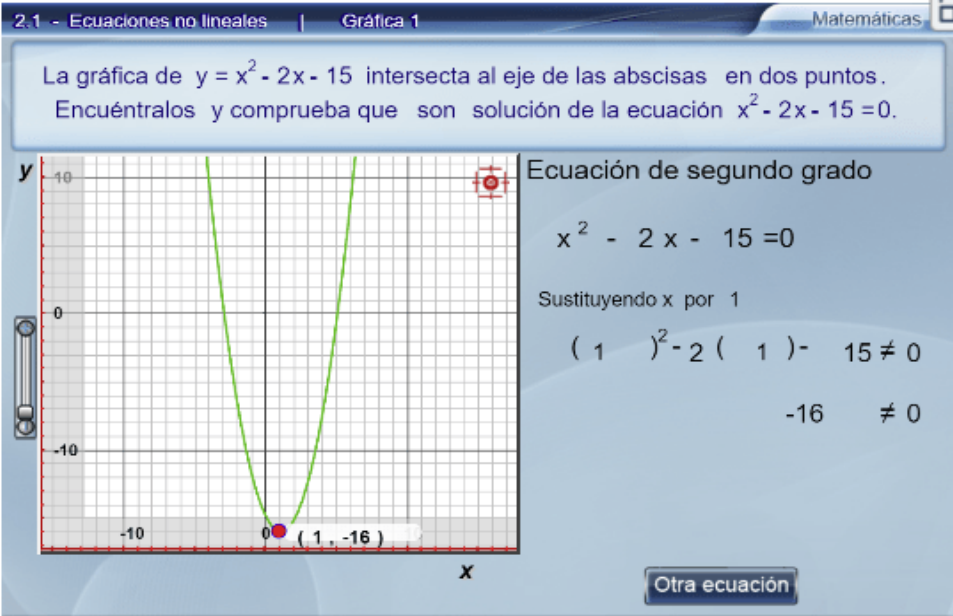
$h = 1,50$



$V = A_{\text{base}} \cdot h$        $V = (3,00)(3,00)(1,50)$   
 $= L^2 \cdot h$                $= 13,5$



¡Recuerda! , las estrategias para enfrentar diferentes situaciones problema ([página 129](#)).



2.1 - Ecuaciones no lineales | Gráfica 1 Matemáticas

La gráfica de  $y = x^2 - 2x - 15$  interseca al eje de las abscisas en dos puntos. Encuétralos y comprueba que son solución de la ecuación  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

Ecuación de segundo grado

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Sustituyendo x por 1

$$(1)^2 - 2(1) - 15 \neq 0$$
$$-16 \neq 0$$

Otra ecuación

The screenshot shows a coordinate plane with a green parabola opening upwards. The x-axis is labeled 'x' and the y-axis is labeled 'y'. The parabola intersects the x-axis at two points, one of which is marked with a red dot and labeled '(1, -16)'. The text above the graph asks to find the other intersection point and verify it is a solution to the equation  $x^2 - 2x - 15 = 0$ . To the right, the equation is shown, followed by a substitution of x=1, resulting in  $-16 \neq 0$ , indicating that x=1 is not a solution.



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.

Modalidad en el sistema Educativo de México.



También, se puede utilizar la **regla de Ruffini**, para reducir polinomios de tercer grado o mayor. A continuación veremos algunos teoremas, que nos servirán para factorizar polinomios y la relación con las raíces del polinomio.

## 6.4.1 Teorema del Residuo y del Factor.

### Teorema del Residuo

Este teorema permite conocer el residuo sin efectuar la división de un polinomio  $P(x)$  entre un binomio de la forma  $(x - a)$ :

"Si el polinomio  $P(x)$  se divide entre  $(x - a)$ , el residuo es igual a  $P(a)$ ."



### Teorema del Factor.

"Si el polinomio  $P(x)$  se anula para  $x = a$ , entonces el polinomio  $P(x)$  es divisible por  $(x - a)$ ."

Esto es, si  $P(a) = 0$  entonces  $(x - a)$  es un factor de  $P(x)$ .

### Ejemplo 6.8.

Usando el teorema del residuo y el teorema del factor, factorice completamente el polinomio.

$$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

Para empezar, debemos buscar los posibles factores de la forma  $(x - a)$  del polinomio dado. Esto equivale a buscar los números  $a$  tales que  $P(a) = 0$ .

Los posibles valores para hacer que el polinomio se anule son precisamente los divisores del término independiente, que en este caso es 6.

Divisores de 6 =  $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ .

Evaluamos con cada divisor el polinomio  $P(x)$ :

- $P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 7(-1)^2 - (-1) + 6 = 0$ :

**SI es un factor del polinomio**  $\rightarrow (x + 1)$

- $P(1) = (1)^4 + (1)^3 - 7(1)^2 - (1) + 6 = 0$

**SI es un factor del polinomio**  $\rightarrow (x - 1)$

- $P(-2) = (-2)^4 + (-2)^3 - 7(-2)^2 - (-2) + 6 = 12 \neq 0$   
 $(x + 2)$  No es un factor del polinomio.

- $P(2) = (2)^4 + (2)^3 - 7(2)^2 - (2) + 6 = 0$

**SI es un factor del polinomio**  $\rightarrow (x - 2)$

- $P(3) = (3)^4 + (3)^3 - 7(3)^2 - (3) + 6 = 48 \neq 0$   
 $(x - 3)$  No es un factor del polinomio.

- $P(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 - 7(-3)^2 - (-3) + 6 = 0$

**SI es un factor del polinomio**  $\rightarrow (x + 3)$

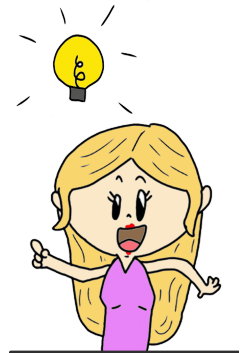
- $P(6) = (6)^4 + (6)^3 - 7(6)^2 - (6) + 6 = 1260 \neq 0$   
 $(x - 6)$  No es un factor del polinomio.

- $P(-6) = (-6)^4 + (-6)^3 - 7(-6)^2 - (-6) + 6 = 840 \neq 0$   
 $(x + 6)$  No es un factor del polinomio.

Entonces, los divisores  $a$  tales que  $P(a) = 0$ , son los factores del polinomio, por tanto:

$$P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$$

$$P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x + 3)$$



## 6.4.2 División Sintética o Método de Ruffini

¿Qué es la regla o método de Ruffini y para que se utiliza?

La regla de Ruffini es un método que permite:

- ✓ Resolver ecuaciones de tercer grado o mayor.
- ✓ Dividir un polinomio entre un binomio de la forma  $(x - a)$ .
- ✓ Factorizar polinomios de tercer grado o mayor.
- ✓ Calcular las raíces de polinomios de grado mayor o igual a 3



**Ejemplo 6.9.** Factorizar:  $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28 = 0$

Aplicamos los siguientes pasos al polinomio organizado de manera ordenada (las variables de mayor a menor grado).

1. Colocamos los coeficientes en una fila. En este caso el polinomio es completo, si no fuera así completaría con ceros los espacios de las variables faltantes, 0.

$$1, \quad -6, \quad -11, \quad 24, \quad 28$$

2. Vemos cuáles son los divisores del último término, término independiente (28):

Los divisores de 28 son:  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 7, \pm 14, \pm 28$

¿Cuáles de estos divisores son válidos aplicando el método?

3. Trazamos una línea vertical por delante del primer coeficiente y en la línea siguiente, a la izquierda de esta línea vertical, un divisor del último término del polinomio. Por debajo de este divisor trazamos una recta horizontal de la anchura ocupada (más o menos) por los coeficientes del polinomio.

$$\begin{array}{r|cccccc}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x & & \\
 & 1 & -6 & -11 & 24 & 28 & \\
 \hline
 1 & & & & & & 
 \end{array}$$

4. Ahora veamos como operar, debajo de la raya horizontal y debajo del primer coeficiente se escribe el mismo coeficiente. Ahora multiplicamos el primer divisor (el 1<sup>a</sup> la izquierda de la raya vertical) por el primer coeficiente del polinomio (el 1 que lo tienes debajo de la raya horizontal) y el resultado del producto lo colocas debajo del segundo coeficiente (el -6).

Se Suma  $-6 + 1 = -5$ , este resultado lo colocamos debajo de la línea horizontal y a la altura del segundo coeficiente, realizamos los mismos pasos hasta llegar al termino independiente.

$$\begin{array}{r|cccccc}
 & 1 & -6 & -11 & 24 & 28 & \\
 & 1 & -5 & -16 & 8 & 36 & \\
 \hline
 1 & & & & & & 
 \end{array}$$

Diagram annotations:  
 - A blue box highlights the '1' in the second row, second column and the '-6' in the first row, second column.  
 - A blue arrow labeled 'Se baja' points from the '-6' to the '1'.  
 - A blue arrow labeled 'Resultado' points from the '1' to the '-5'.  
 - A blue box highlights the '-5' in the second row, second column.  
 - A blue arrow labeled 'Resultado de la suma' points from the '-5' to the '-16' in the second row, third column.  
 - A blue box highlights the '36' in the second row, fifth column.  
 - A blue arrow labeled 'Este valor debe ser cero' points from the '36' to the '36'.  
 - A blue box highlights the '1' in the second row, first column.  
 - A blue arrow labeled 'Se multiplican' points from the '1' to the '1' in the second row, second column.

El divisor (1), no es solución porque la última suma es 36 y para que sea raíz o solución debe ser igual CERO.



Se realiza el mismo proceso con cada divisor, hasta encontrar como resultado en su última operación el CERO.

5. Realicemos el mismo procedimiento con el divisor 2:

	1	-6	-11	24	28
2	↓ Se baja	2	-8	-38	-28
	1	-4	-19	-14	0

↓  
Resultado de la suma
↓  
Este valor verifica que es raíz

Esta vez comprobamos que obtengo al final un cero, lo que significa que el divisor es una raíz, o sea.  $(x - 2)$

6. Todos los nuevos coeficientes que he obtenido debajo de la raya horizontal son positivos, tomo otro divisor de 28 que sea negativo, por ejemplo,  $(-2)$  y haciendo las mismas operaciones que en los pasos anteriores, se obtiene:

	1	-6	-11	24	28
2		2	-8	-38	-28
	1	-4	-19	-14	0
-2		-2	12	14	
	1	-6	-7	0	
	$x^2$	$x$			

Lo que significa que el divisor  $(-2)$  es una raíz, o sea.  $(x + 2)$

Por lo tanto, tenemos:  $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 6x - 7)$

Además, con los últimos coeficientes obtenemos un trinomio, el cual podemos factorizar directamente:

$$x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$$

Por lo tanto, la factorización del polinomio es:

$$x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28 = (x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 7)$$

Se puede comprobar que al sustituir a  $x$  por  $-2$ ,  $-1$ ,  $2$  y  $7$  obtenemos como resultado el cero en la ecuación.

Observemos la solución gráfica en la siguiente figura:

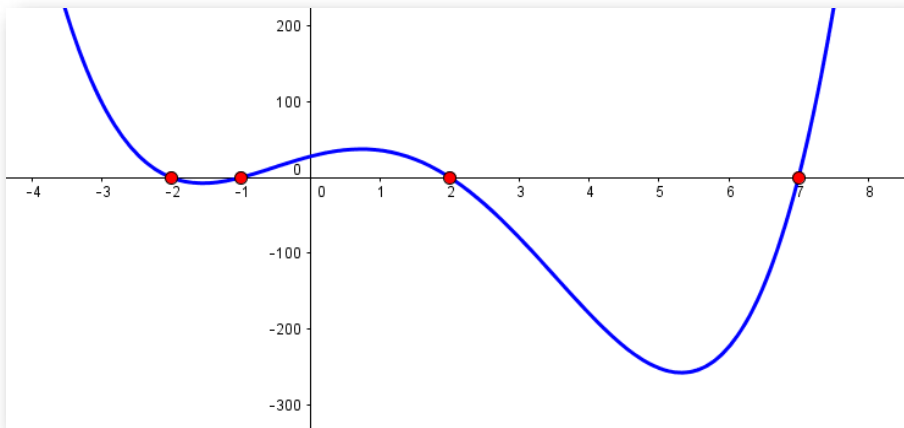


Figura 6.3. Gráfica del polinomio  $x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28$ .

Esto quiere decir que los valores  $-2$ ,  $-1$ ,  $2$  y  $7$  son las raíces del polinomio de cuarto grado ya que cumplen con las condiciones de la ecuación y son los puntos de corte con el eje  $x$ .



### Ejercicio 6.8.

Encuentra las raíces del polinomio propuesto.



#### Indicaciones

Aplicamos la Regla de Ruffini o uno de los métodos de solución.

1. Soluciona la ecuación dada según su grado, pulsa el botón **solución** para ver y comparar con tus resultados.
2. Pulsa el botón **ejercicio** para generar una ecuación. Debes indicar, sin resolverla, el número de soluciones que tiene.

**Factorizar.** Regla de Ruffini

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12$$

Solución

**Piensa.** ¿Se pueden resolver ecuaciones que contengan logaritmos o expresiones exponenciales?

## 6.5 Ecuaciones con logaritmos y exponenciales.

La expresión exponencial es la inversa de la función logarítmica, y se representa en función de  $x$  de la forma:

$$x = \log_b(a) \quad \Longleftrightarrow \quad a = b^x$$

**¿Cómo se resuelve una ecuación logarítmica o exponencial?**

Para hallar el valor de  $x$  en una ecuación logarítmica o exponencial, es conveniente seguir los siguientes pasos:

1. Si tiene expresiones exponenciales, se despeja la expresión a un lado de la ecuación y aplicamos el logaritmo a ambos lados de la ecuación con la base más conveniente (por lo general se elige la misma base que tiene la expresión logarítmica o exponencial), sino, aplicamos las leyes de los logaritmos para simplificar y reorganizamos la ecuación despejando la incógnita.
2. Por último, se hace cambio de base y con una calculadora se da el valor exacto de la incógnita.

Cuándo se resuelven ecuaciones de tipo algebraicas, normalmente se basan en la idea de que se puede cambiar en ambos lados de la ecuación de la misma manera y obtener una ecuación válida.

Esto también aplica para los logaritmos y exponenciales, no importa cual sea la base  $b$ , si:

$$x = y \quad \longrightarrow \quad \log_b(x) = \log_b(y).$$

$$x = y \quad \longrightarrow \quad b^x = b^y.$$

**Ejemplo 6.10.** ¿Cómo hallar el valor de  $x$ ?  $2^{x+3} = 126$

Tomamos logaritmos en base 2 a ambos lados de la ecuación:

$$\log_2 (2^{x+3}) = \log_2 (126)$$

$$(x + 3)\cancel{\log_2 (2)} = \log_2 (126)$$

$$x + 3 = \log_2 (126)$$

$$x = \log_2 (126) - 3$$



Si deseamos encontrar el valor exacto de la incógnita, se hace un cambio de base y se evalúa en calculadora.

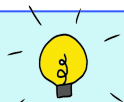
$$x = \log_2 (126) - 3$$

$$x = \frac{\log (126)}{\log (2)} - 3$$

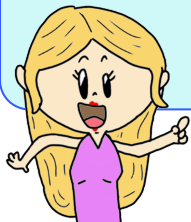
$$x = 3,9773$$

Para verificar el resultado, se sustituye el valor hallado en la ecuación inicial.

$$2^{(3,9773)+3} = 126$$



**¡Recuerda!** , siempre se puede verificar el resultado sustituyendo el valor encontrado de la incógnita en la ecuación inicial, y se debe cumplir la igualdad.



**Ejemplo 6.11.** Como hallar el valor de  $x$  en la ecuación:

$$\log(x + 3) - 5 = \log(x + 2)$$

Despejamos los logaritmos a un solo lado de la ecuación aplicando las leyes para simplificar:

$$\log(x + 3) - \log(x + 2) = 5$$

$$\log\left(\frac{x + 3}{x + 2}\right) = 5$$

Para eliminar el logaritmo, aplicamos la base en forma exponencial a ambos lados de la ecuación, simplificando así el logaritmo.

$$10^{\log\left(\frac{x+3}{x+2}\right)} = 10^5$$

$$\frac{x + 3}{x + 2} = 10^5$$

$$x + 3 = 10^5(x + 2)$$

$$x + 3 = 10^5x + (2)10^5$$

$$x - 10^5x = (2)10^5 - 3$$

$$x(1 - 10^5) = 200000 - 3$$

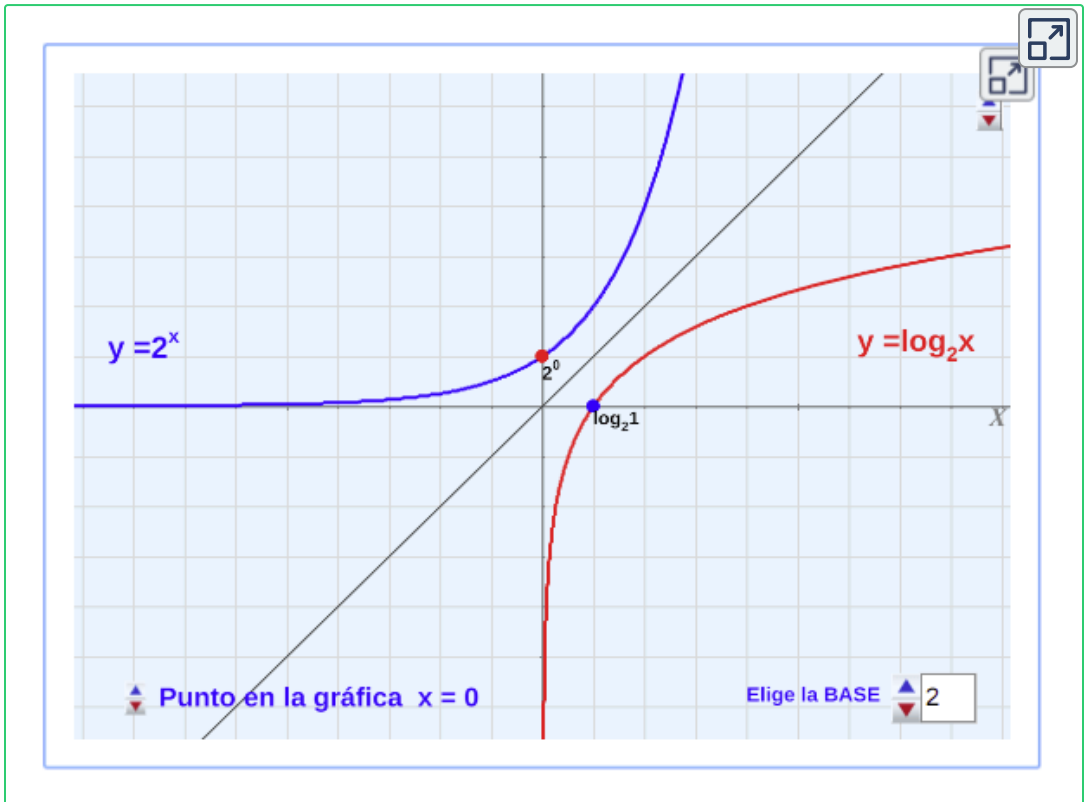
$$x = \frac{199997}{1 - 10^5}$$

$$x \approx -1,99999$$



## Exploremos.

Observa la gráfica de una función logarítmica y exponencial:



### Piensa y analiza

Analicemos, las gráficas de las expresiones logarítmicas  $y = \log_b(x)$  y exponencial  $y = b^x$  (estas expresiones llamadas funciones).

1. Se observa que ¿La exponencial es la inversa de la función logarítmica?
2. ¿Que sucede en ambas ecuaciones si  $b = 1$ ?
3. ¿Que pasa si  $x = 0$ ?
4. ¿Puede ser  $y < 0$ ?



## 6.6 Practiquemos



### Ejercicio 1.

Pongamos en práctica lo visto en esta sección



### Indicaciones

Soluciona ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1. Digita la cantidad de ejercicio a resolver.
2. Pulsa el botón **ejercicio** para generar la ecuación.
3. Resuelve la ecuación lineal.
4. Introduce la solución, si la solución no es fracción recuerda colocar un 1 en el denominador.
5. Pulsa el botón **solución** para ver si lo has hecho bien.

**Ecuaciones de Primer Grado**

Indica la cantidad de ejercicios a resolver

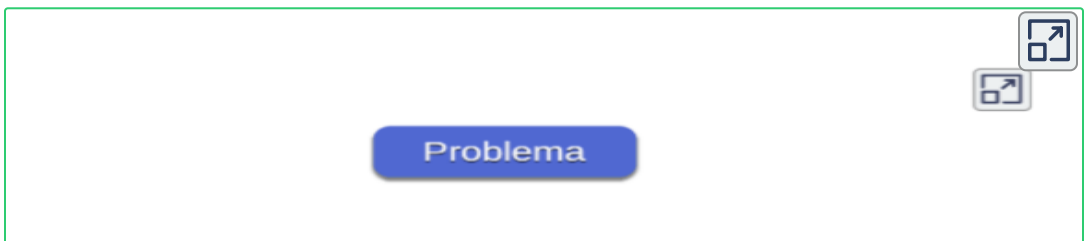
**Inicio** **Ejercicio**



## Ejercicio 2. Situaciones problema de 1° grado

Analiza, plantea y resuelve las siguientes situaciones problema.

1. Dividir 62 en dos partes tales que el doble de la menor, sea 6 unidades más que la mayor.
2. Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 32.
3. Dividir 964 en dos partes tales que una exceda a la otra en 100.
4. La suma de un número y 5 veces el mismo es 564. Hallar el número.
5. Hallar 3 números enteros consecutivos impares, tales que la suma del primero y el segundo sea igual al tercero más 22.
6. La suma de 3 números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Hallar los números.
7. La suma de 2 números es 120 y su diferencia 40.
8. Dentro de 12 años la edad de un hombre es el doble de la edad hace 4 años. Hallar su edad actual.
9. Oprime el botón **problema** , y genera una situación problema aleatoria.



**Actividad complementaria.**

[Situaciones problemas para imprimir](#)

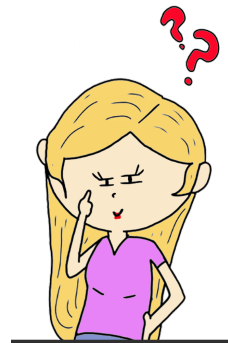


## Ejercicio 2. Situaciones problema de 2º grado.



Pongamos en práctica lo visto en esta sección, analiza, plantea y resuelve las siguientes situaciones problema.

1. Hallar dos números pares consecutivos sabiendo que su producto es 838.
2. La suma de las edades de un padre y su hijo es 10 años y la cuarta parte de su producto excede a la edad del padre en 240 años. ¿Cuáles son las edades respectivas?
3. Un desagüe vacía un tanque en 4 horas menos que un segundo desagüe. Si ambos desagües abiertos simultáneamente vacían el tanque en  $2\frac{2}{3}$  horas, determinar el tiempo en que cada desagüe por separado vacía el tanque.
4. Dividir el número 10 en dos partes tales que su producto añadido a la suma de sus cuadrados sea igual a 76.
5. El perímetro de un rectángulo es 28 m y su área  $48 m^2$ . ¿Cuáles son sus dimensiones?
6. El lado de un cuadrado es 3 metros menor que el largo de un rectángulo y 4 metros mayor que su ancho. Encontrar las dimensiones si el área del cuadrado es el doble del área del rectángulo.
7. Un cuadrado tiene  $33 m^2$  más que otro y este un metro menos de lado que el primero. Hallar los lados de los cuadrados.



**Actividad complementaria.**

[Situaciones problemas para imprimir](#)




### Ejercicio 3.

Resuelve las siguientes ecuaciones con logaritmos.

#### Indicaciones

1. Primero resuelve la ecuación logarítmica o exponencial propuesta teniendo en cuenta lo aprendido en esta sección y verifica tus respuestas.
2. Pulsa el botón **solución** para ver y comparar las respuestas.



Resolvamos las siguientes ecuaciones

a) $\text{Log}_5 5^{(x+7)} = 164$	<a href="#" style="background-color: #4a7ebb; color: white; border-radius: 10px; padding: 5px 15px;">solución</a>
b) $7^{(x+8)} - 58 = 0$	<a href="#" style="background-color: #4a7ebb; color: white; border-radius: 10px; padding: 5px 15px;">solución</a>
c) $9^8 - \frac{203}{9^x} = 0$	<a href="#" style="background-color: #4a7ebb; color: white; border-radius: 10px; padding: 5px 15px;">solución</a>
d) $9^x = 10^{(x+1)}$	<a href="#" style="background-color: #4a7ebb; color: white; border-radius: 10px; padding: 5px 15px;">solución</a>

**¡Recuerda!** , revisar la solución, que no existe el logaritmo de un número negativo, por lo que debemos verificar de que la solución en la ecuación inicial obtenemos un número positivo. De lo contrario, se descartar esta solución.




## Evaluamos lo aprendido.

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:



Conecta la columna izquierda con las expresiones correctas de la columna derecha

$x^2 - 4$	<input type="checkbox"/>	$x = -1, x = 1$
$x^2 + 2x + 1$	<input type="checkbox"/>	$x = -1, x = -1$
$2x^2 - 4x + 2$	<input type="checkbox"/>	$x = 2, x = 1$
$2x^2 - 6x + 4$	<input type="checkbox"/>	$x = 1, x = 1$
$2x^2 + 5x + 2$	<input type="checkbox"/>	$x = -2, x = 0,5$
		$x = 2, x = -2$
		$x = 2, x = 0,5$
		$x = -2, x = -0,5$

1/0

 **Evaluación - 5x2 preguntas con límite de tiempo - (20 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.

**Capítulo VI: Ecuaciones.**  
Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).

  
 **Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo VI](#)

Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.

[\[4\]](#) Plantillas con Descartes-JS



"Ningún empleo puede ser controlado sin aritmética,  
ninguna invención mecánica sin geometría".

Benjamin Franklin



# Capítulo VII

## Sistemas de Ecuaciones



## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

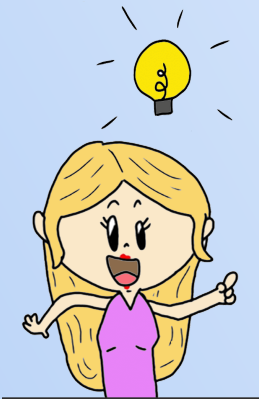
**DBA.1.** Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.8.** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 9°.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico

**1.2 M.IV** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. DBA 1, 2.

#### Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

**5.1 M.IV** Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. DBA8, 9

**5.5 M.IV** Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. DBA2, 8.

El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.



## 7.1 Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones esta formado por dos o más ecuaciones con varias incógnitas en la que deseamos encontrar una solución común, se tomará la ecuación donde  $a, b, c$  son los coeficientes y las incógnitas  $x, y$  expresada de la forma:

$$ax + by = c$$

Los sistemas de solución de ecuaciones, también conocidos como:

- ✓ Sistema 2 x 2 (2 ecuaciones 2 incógnitas).
- ✓ Sistema 3 x 3 (3 ecuaciones 3 incógnitas).

Para resolver un sistema (compatible determinado) necesitamos tener al menos tantas ecuaciones como incógnitas.

Resolver un sistema de ecuaciones, es encontrar el valor de cada incógnita para que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema, estas aparecen en varias de las ecuaciones, pero no necesariamente en todas, lo que hacen estas ecuaciones es relacionar las incógnitas entre sí.

Se presentan algunos métodos de solución como son:

- ✓ Reducción
- ✓ Sustitución
- ✓ Igualación
- ✓ Gráficamente, entre otros.



## 7.2 Métodos de solución.

Como resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por diferentes métodos de solución [5].

El sistema 2 x 2 está formado por dos ecuaciones así:

$$ax + by = c \quad (1)$$

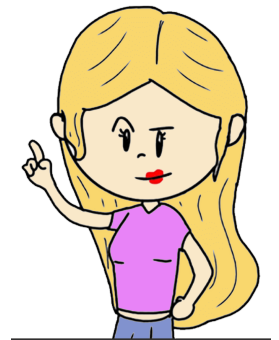
$$dx + ey = f \quad (2)$$

donde su solución, corresponde a la intersección de dos rectas en un punto  $(x, y)$ .

### 7.2.1 Método Gráfico.

Cuándo se soluciona un sistema de ecuaciones utilizando el método gráfico, para este caso, un sistema 2 x 2 se tiene que:

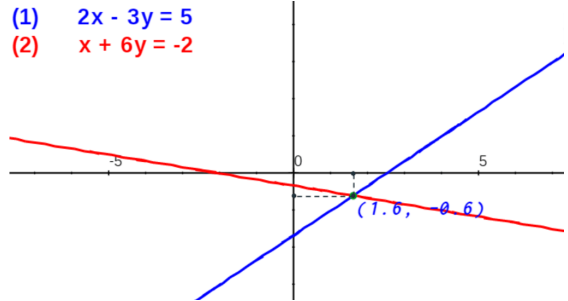
- ✓ Cada ecuación representa una recta en el plano.
- ✓ Las variables  $x$  y  $y$  son las incógnitas, que nos darán como solución un punto de intersección o corte  $(x, y)$  entre las ecuaciones gráficas.
- ✓ Los valores  $a, b, d, e$  son los coeficientes correspondientes a cada variable en la ecuación y  $c, f$  los términos independientes.



El método gráfico puede presentar las siguientes soluciones: Única solución, no tener solución o infinitas soluciones.

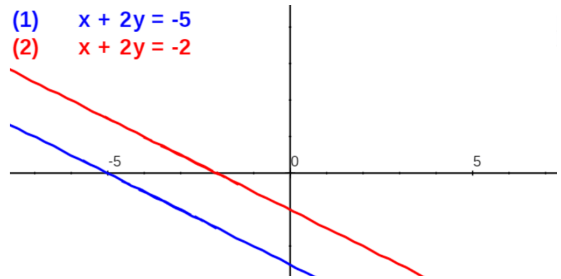
✓ **Secantes:**  
**Solución única.**

Si las rectas se intersecan, tendrán un sólo punto en común por lo tanto habrá una única solución en el punto  $(x, y)$ .



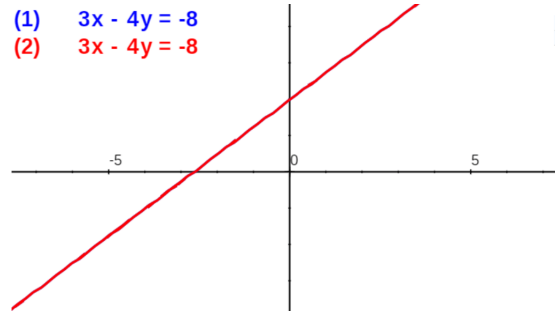
✓ **Paralelas:**  
**No tiene solución.**

Si las rectas no se interceptan porque son paralelas, entonces el sistema no tiene solución.



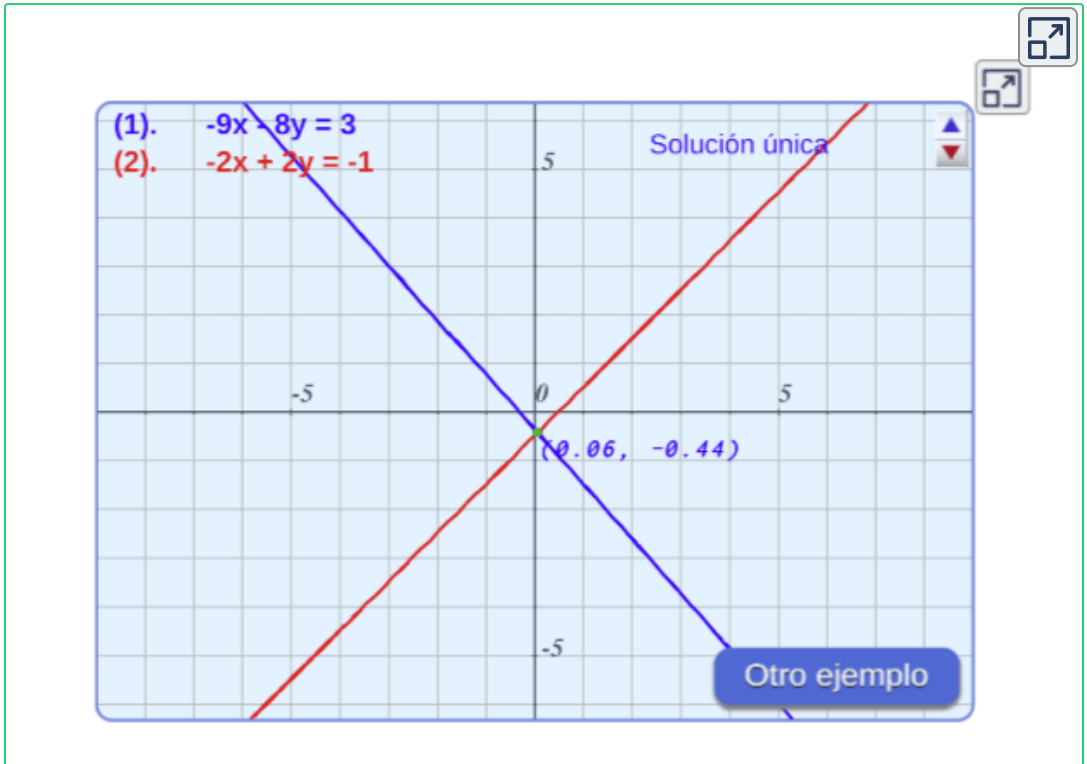
✓ **Coincidentes:**  
**Infinitas soluciones.**

Si las rectas coinciden, entonces habrán infinitas soluciones.



## Exploremos.

Veamos la solución gráfica de un sistema lineal de ecuaciones  $2 \times 2$ , para ver diferentes ejemplos, oprime el botón **otro ejemplo**.



Si quieres comprobar la **solución**, sustituye los valores del punto  $(x, y)$  en cada ecuación, comprueba que los resultados satisfacen el sistema de ecuaciones.

Como es de esperar, en el método gráfico se representan las gráficas asociadas a las ecuaciones del sistema para deducir su solución ahora veamos, como resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma analítica.



## 7.2.2 Método de Reducción.

El método consiste en multiplicar una ó las dos ecuaciones por un número de modo que obtengamos un sistema en que los coeficientes de  $x$  o de  $y$  sean iguales con signo contrario, para eliminar dicha incógnita al sumar las dos ecuaciones.

Sistema de Ecuaciones 2x2

Reducción

Multiplicando:

$$(1) \times -8 \quad 80x + 24y = 48$$

$$(2) \times -10 \quad 80x + 90y = 100$$

$$\underline{\hspace{10em}} \\ -66y = -52 \quad \leftarrow \text{restando término a término.}$$

$$\text{De donde: } y = \frac{-52}{-66}$$

Sustituyendo el valor de  $y$ , en (1):

$$-10x - 3\left(\frac{-52}{-66}\right) = -6$$

Multiplicando por  $-66$ , queda:

$$660x + 156 = 396$$

De donde:

$$660x = 240$$

$$\text{Es decir: } x = \frac{240}{660}$$

Otro ejemplo

No olvidemos que si multiplicamos una ecuación por un número diferente de 0, la ecuación inicial y la obtenida son equivalentes. Esto quiere decir que ambas ecuaciones tienen las mismas soluciones y, por tanto, podemos trabajar con una u otra.

## 7.2.3 Método de Sustitución.

El método consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y reemplazar este valor en la otra ecuación, de esta forma se llega a una ecuación de primer grado con una incógnita.

Sistema de Ecuaciones 2x2

$$(1) \quad -x + 5y = 8$$

Sustitución

$$(2) \quad 2x + 2y = -1$$

Despejando la incógnita  $x$  de la ec. (1), se tiene que:

$$-x = -5y + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5y - 8 \quad (4)$$

Remplazando (3) en la ec.(2) , se tiene que:

$$2(5y - 8) + 2y = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 10y + 2y = -1 + 16$$

donde:  $y = \frac{15}{12}$

Sustituyendo el valor de  $y$ , en (1):  $-x + 5\left(\frac{15}{12}\right) = 8$

Multiplicando por 12, queda:

$$-12x + 75 = 96$$

De donde:

$$-12x = 21$$

Es decir:  $x = -\frac{21}{12}$

Otro ejemplo



**¡Recuerda!** , si quieres comprobar la **solución**, sustituye los resultados de  $x, y$  y comprueba que satisface cada ecuación.



## 7.2.4 Método de Igualación.

El método consiste en una pequeña variación del método de sustitución, para resolver el sistema de ecuaciones hay que despejar una incógnita, la misma, en las dos ecuaciones e igualar el resultado de ambos despejes, con lo que se obtiene una ecuación de primer grado con una incógnita.

Sistema de Ecuaciones 2x2

$$(1) \quad -4x - 6y = -3$$

Igualación

$$(2) \quad -9x + 5y = -1$$

Despejando la incógnita  $x$  de la ec. (1), se tiene que:

$$-4x = 6y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{6}{4}y + \frac{3}{4} \quad (3)$$

Despejando la incógnita  $x$  de la ec. (2), se tiene que:

$$-9x = -5y - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{9}y + \frac{1}{9} \quad (4)$$

Igualando (3) y (4), se tiene que:

$$-\frac{6}{4}y + \frac{3}{4} = \frac{5}{9}y + \frac{1}{9} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{6}{4}y - \frac{5}{9}y = \frac{1}{9} - \frac{3}{4}$$

donde:  $y = \frac{23}{74}$

Sustituyendo el valor de  $y$ , en (1):  $-4x - 6\left(\frac{23}{74}\right) = -3$

Multiplicando por 74, queda:

$$-296x - 138 = -222$$

De donde:

$$-296x = -84$$

Es decir:  $x = \frac{84}{296}$

Otro ejemplo

## Exploremos.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales analítica y gráficamente paso a paso.

## Indicaciones.

Resuelve primero y luego verifica la respuesta, oprime las flechas para obtener los coeficientes  $a, b, c, d, e, f$  de cada variable del sistema de ecuaciones.

Da valores distintos de cero a las constantes  $a, b, c, d, e$  y  $f$  para definir un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\x + y &= 2\end{aligned}$$

Resolver

$a$   $b$   $c$   $d$   $e$   $f$



Proyecto Descartes.org.

[3] Tomada de Telesecundaria.



Modalidad en el sistema Educativo de México.






 **Ejercicio 7.1.**

Oprime el botón **ejercicio** para generar un sistema de ecuaciones lineales, utiliza uno de los métodos para solucionar el sistema.

 Verifica la solución por medio del método gráfico, ingresa los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $e$ ,  $d$  y las constantes  $c$  y  $f$  respectivamente.


Oprime el botón **solución** para verificar la solución gráfica.


Ecuación 1

a	-10	b	-4	c	8
---	-----	---	----	---	---

Ecuación 1

d	-8	e	6	f	-6
---	----	---	---	---	----





## 7.2.5 Método de Determinantes.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales existe también un método, llamado método de determinantes.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones 2 x 2:

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (2)$$

El número real  $\Delta = a_1.b_2 - a_2.b_1$ , se llama **determinante** ( $\Delta$ ) de orden 2 y se esquematiza de la forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1.b_2 - a_2.b_1$$

Donde la primera columna corresponde a los coeficientes de la incógnita  $x$  y la segunda columna a los coeficientes de la incógnita  $y$ .

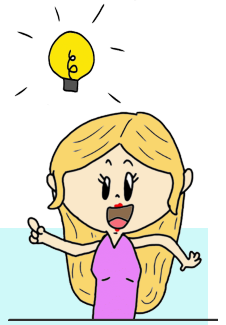
Para hallar  $x$  y  $y$ , se pueden expresar como cocientes de determinantes de la siguiente forma:

$$x = \frac{c_1.b_2 - c_2.b_1}{a_1.b_2 - a_2.b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{a_1.c_2 - a_2.c_1}{a_1.b_2 - a_2.b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Según las expresiones anteriores, se tiene lo siguiente:

1. El denominador es el determinante formado por los coeficientes de  $x$  y  $y$  en el sistema. Los representamos por  $\Delta$ .
2. El numerador de  $x$  se obtiene reemplazando en  $\Delta$  los coeficientes de  $x$  por los términos independientes  $c_1$  y  $c_2$ .
3. El numerador de  $y$  se obtiene reemplazando en  $\Delta$  los coeficientes de  $y$  por los términos independientes  $c_1$  y  $c_2$ .



Este método de solución utilizando el determinante es conocido como **Regla de Cramer**.

Sistema de Ecuaciones 2x2

$$(1) \quad -4x - 10y = -4$$

Regla de Cramer

$$(2) \quad 6x - 7y = -9$$

El determinante del sistema, esta representado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = (-4)(-7) - (-10)(6) = (28) - (-60) = 88$$

donde:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -9 & -7 \end{vmatrix}}{88} = \frac{(-4)(-7) - (-10)(-9)}{88} = \frac{(28) - (90)}{88} =$$

$$x = \frac{-62}{88} = -0.7$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}}{88} = \frac{(-4)(-9) - (6)(-4)}{88} = \frac{(36) - (-24)}{88} =$$

$$y = \frac{60}{88} = 0.68$$



Otro ejemplo



Para resolver un sistema de ecuaciones  $3 \times 3$ , se puede utilizar cualquiera de los métodos ya vistos en esta sección.



Para resolver un sistema de  $3 \times 3$ , necesitamos tener al menos tantas ecuaciones como incógnitas, el sistema está formado por (3) ecuaciones, (3) incógnitas, así:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$$

Apliquemos la Regla de Cramer para resolver el sistema, donde la solución es una terna ordenada de la forma  $(x_1, y_1, z_1)$ :

El **determinante** ( $\Delta$ ) de orden 3 se esquematiza de la forma:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

La solución del sistema se determina por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Se observa que cada incógnita es una fracción cuyo denominador es el determinante  $\Delta$  y el numerador es el determinante que se obtiene cambiando la columna de los coeficientes de la incógnita por los términos independientes, veamos diferentes ejemplos de un sistema 3x3 utilizando Regla de Cramer:

Sistema de Ecuaciones 3x3      (1)  $10x + 9y - 7z = 8$   
 Regla de Cramer                      (2)  $9x - 9y + 4z = -9$   
     (3)  $-8x - 6y + 8z = -10$



El determinante del sistema 3x3 es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 9 & -7 \\ 9 & -9 & 4 \\ -8 & -6 & 8 \end{vmatrix} = (10) \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} - (9) \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -8 & 8 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} 9 & -9 \\ -8 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (10)(-48) - (9)(104) + (-7)(-126) = -534 \Rightarrow \Delta = -534$$

Hallemos las incognita x, y, z:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 9 & -7 \\ -9 & -9 & 4 \\ -10 & -6 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{156}{-534} = -0.29 \Rightarrow x = -0.29$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 8 & -7 \\ 9 & -9 & 4 \\ -8 & -10 & 8 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-18}{-534} = 0.03 \Rightarrow y = 0.03$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 9 & -9 & -9 \\ -8 & -6 & -10 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{810}{-534} = -1.52 \Rightarrow z = -1.52$$

Por tanto, la terna ordenada es:  $(-0.29, 0.03, -1.52)$

Otro ejemplo



## Ejercicio 7.2.

Solución de un sistema por la Regla de Cramer.



1. Oprime el botón **sistema** y generar un sistema de ecuaciones lineales 2x2, soluciona y verifica tus respuestas.



Sistema

Ingresa los coeficientes, oprime el botón **solución** y observa.



a

-6

b

-5

c

-1

d

8

e

7

f

-9

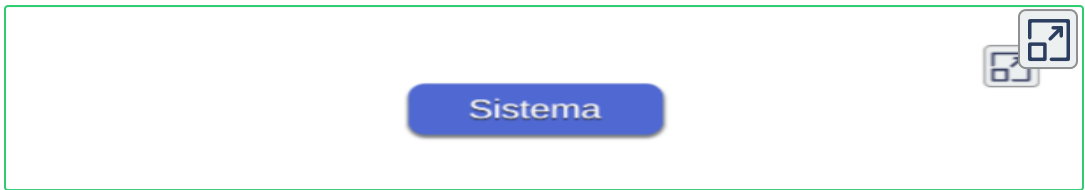
Ingresa los coeficientes de cada ecuación del sistema 2x2:

$$ax + by = c \quad (1)$$

$$dx + ey = f \quad (2)$$

Solución

2. Oprime el botón **sistema** y generar un sistema ecuaciones de 3x3.



A screenshot of a software interface for solving a system of three linear equations. At the top right, there are two small icons: one showing a square with an arrow pointing out, and another showing a square with an arrow pointing in. Below these icons is a light blue horizontal bar containing input fields for coefficients and constants. The fields are arranged in three groups, each with a label above it:  $a_1, b_1, c_1, d_1$ ;  $a_2, b_2, c_2, d_2$ ; and  $a_3, b_3, c_3, d_3$ . The values entered in the fields are 8, 7, -1, -5; 6, -4, -5, 5; and -6, -8, -3, 9 respectively. Below the input fields, the text "Ingresa los coeficientes de cada ecuación del sistema 3x3:" is displayed. Underneath, three equations are listed:  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  (1),  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  (2), and  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$  (3). At the bottom right, there is a blue rounded rectangular button with the word "Solución" written in white text.

Ingresa los coeficientes de cada ecuación del sistema 3x3:

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$$

## 7.3 Situaciones problema

Es conveniente estar familiarizado con la forma de expresar algebraicamente gran cantidad de expresiones que con frecuencia se presentan en la cotidianidad.

Con alguna frecuencia se nos presentan algunos problemas que llevados al lenguaje matemático se plantean las situaciones a través de un sistema de ecuaciones.

**Ejemplo 7.1.** Aplicando sistemas de ecuaciones lineales.

Dos números suman 25 y el doble de uno de ellos es 14. ¿Cuales son los números?

$x$  : Es un número

$y$  : El otro número

- La suma de dos números es 25:  $\longrightarrow x + y = 25$
- El doble de uno de los números es 14:  $\longrightarrow 2x = 14$

Entonces el sistemas de ecuaciones es:

$$x + y = 25 \quad (1)$$

$$2x + 0y = 14 \quad (2)$$

Verifica que la solución es:  $x = 7$ ,  $y = 18$

**¡Recuerda!** , las estrategias para enfrentar diferentes situaciones problema ([página 129](#)).





**Ejercicio 7.3.**

Problemas que generan ecuaciones lineales.



**Situaciones problema**, que generan sistemas de ecuaciones lineales de  $2 \times 2$ , intenta resolverlos antes de ver su solución.

Para ver el planteamiento y su respuesta, oprime el botón **solución**, para un nuevo problema, oprime el botón **ejercicio**.

El área de un rectángulo de 1024 m de largo es igual al área de un cuadrado de 32 m de lado. Encuentre el ancho del rectángulo.

Solución

**¡Recuerda!**, si quieres comprobar la **solución**, sustituye los resultados de  $x$ ,  $y$  y comprueba que satisface cada ecuación.

## 7.4 Practiquemos

### Ejercicio 1. Situaciones problema.

1. Hallar dos números cuya suma sea 182 y su diferencia sea 86.
2. La diferencia entre dos números es 6 y la suma del doble del menor con el mayor es 38, determinar los números.
3. Hallar dos números, suman 150 y el doble de uno de ellos es 10.
4. La diferencia de dos números es 32 y  $\frac{1}{9}$  de su suma es 10. Hallar los números.
5. La edad de A excede en 8 años a la de B y el duplo de la edad de B excede en 10 a la edad de A. Hallar ambas edades.
6. La edad de A excede en 22 años a la edad de B, y si la edad de A menos 12 años es igual al triplo de la edad de B. Hallar las edades.
7. La suma de las cifras de un número de dos cifras es 15 y si al número se resta 9, las cifras se invierten. Hallar el número.
8. La suma de las cifras de un número mayor que 10 y menor que 100 es 12. Si las cifras de las decenas se disminuye en 2 y la cifra de las unidades se aumenta en 2, las cifras se invierten. Hallar el número.
9. Hallar tres números tales que el primero más el segundo sumen 50, el primero más el tercero suman 30; y el segundo más el tercero suman 40.
10. La medida del ángulo interior mayor de un triángulo es el doble de la medida del ángulo menor y la medida del mediano excede a la del menor en  $20^\circ$ . Hallar los ángulos.



**Actividad complementaria.**

[Situaciones problemas para imprimir](#)




## Ejercicio 2. Sistemas de ecuaciones lineales

Pongamos en práctica lo visto en esta sección.



Oprime el botón para generar un ejercicio aleatorio, utiliza uno de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones.



1). Resuelve el sistema 2 x 2 de ecuaciones lineales.

[Sistema 2x2](#)


2). Resuelve el sistema 3 x 3 de ecuaciones lineales.

[Sistema 3x3](#)

3). Situación problema con sistema de ecuaciones.

Resuelve el problema aleatorio que se plantean a continuación, oprime el botón **problema**.

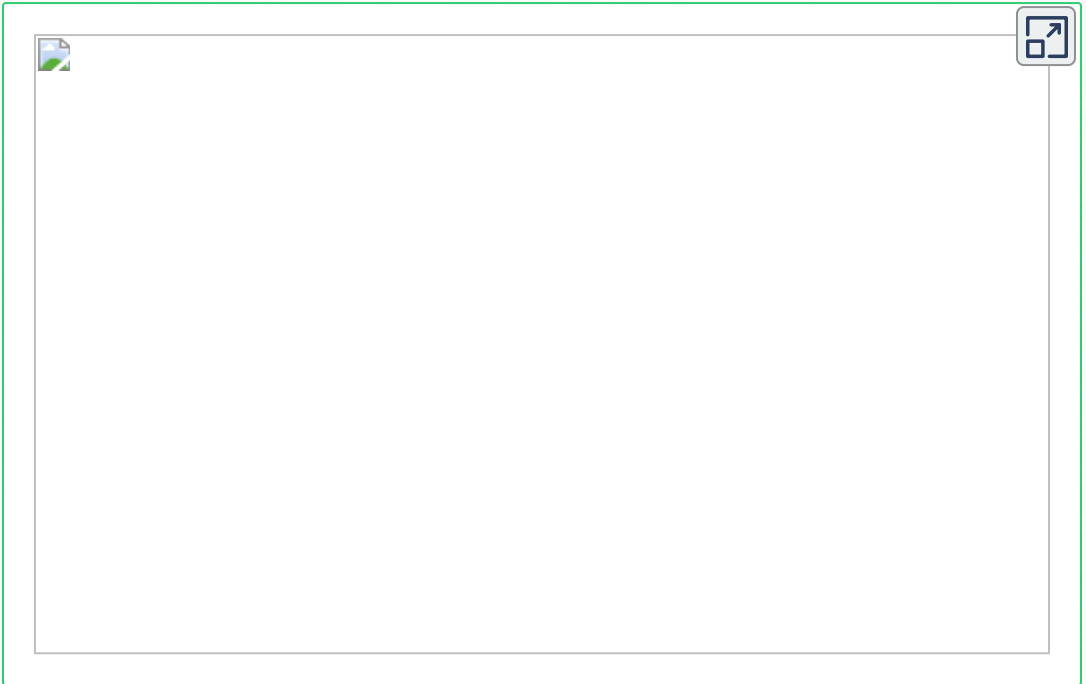
[Problema](#)



[Imprimir](#)  
[Ejercicio](#)

## Evaluamos lo aprendido.

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:



 **Evaluación - 10 preguntas con límite de tiempo - (10 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.

### Capítulo VII: Sistemas de Ecuaciones.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).



**Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo VII](#)

[4]. Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.  
Plantillas con Descartes-JS



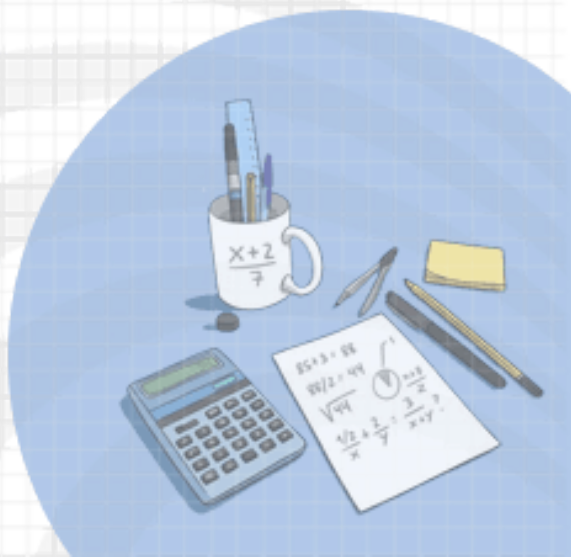
"La única forma de aprender matemáticas es hacer matemáticas".

Paul Halmos



# Capítulo VIII

## Inecuaciones



## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

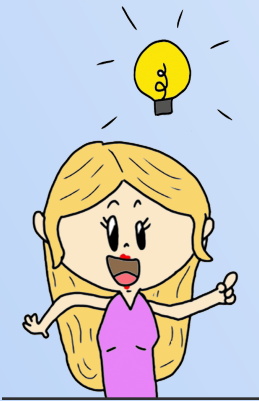
**DBA.1.** Reconoce la existencia de los números irracionales como números no racionales y los describe de acuerdo con sus características y propiedades.

**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.8.** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 9°.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico

**1.2 M.IV** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. DBA 1, 2.

#### Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

**5.1 M.IV** Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. DBA8, 9

**5.5 M.IV** Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. DBA2, 8.

El desarrollo de estos Estándares Básicos de Competencia permitirá fortalecer los procesos de formulación, modelación y resolución de problemas.



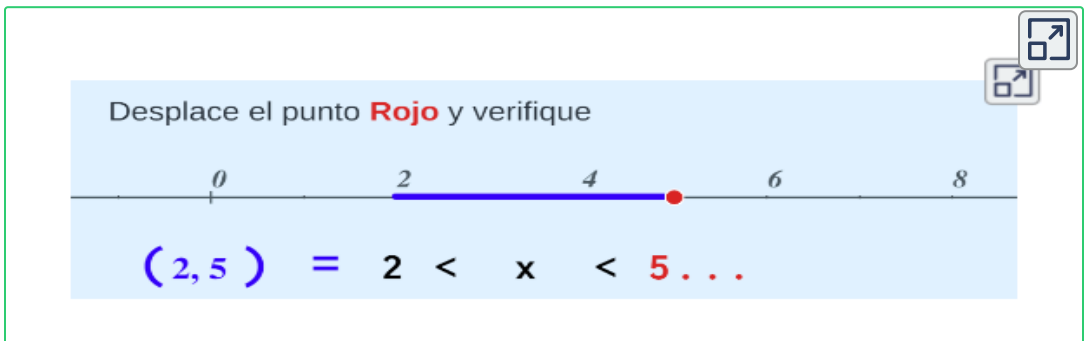
## 8.1 ¿Que es una inecuación?

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, donde su solución posee infinitas soluciones, como es el caso:

$$4 < x + 2 < 7$$

$$2 < x < 5$$

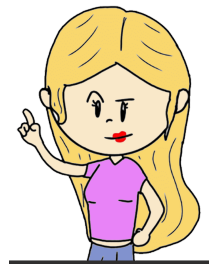
Todos los valores de  $x$  entre 2 y 5 verifican la desigualdad, por tanto el conjunto solución de la desigualdad puede verse intuitivamente como el tramo de la recta real entre 2 y 5.



### 8.1.1 Desigualdades

¿Qué es una desigualdad?

Una desigualdad es un enunciado matemático que compara dos expresiones (numéricas o algebraicas) usando algún signo de desigualdad  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  o  $\leq$ .







En una desigualdad, una expresión de la desigualdad puede ser más grande o más chica que la otra expresión, se utilizan símbolos especiales en estos enunciados.

Dados los números reales  $a, b$  que cumplen  $a < b$  o  $a > b$ , donde el símbolo " $<$ " o " $>$ " indican que no incluye el límite dado y el símbolo " $\leq$ " o " $\geq$ " indican que incluye los límites, se definen así:

 **Exploramos.**

**Intervalos Acotados.**

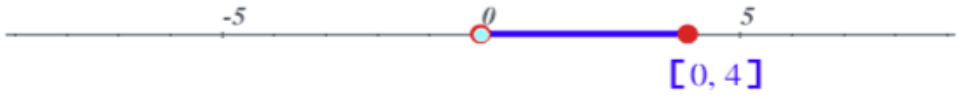
Es el conjunto de los números comprendidos entre los límites  $a$  y  $b$ :

Intervalo	Desigualdad $x \in \mathbb{R}$	Gráfico
Abierto $(a, b)$	$a < x < b$	
Cerrado $[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
Abierto izquierda $(a, b]$	$a < x \leq b$	
Abierto derecha $[a, b)$	$a \leq x < b$	

**Intervalo acotado cerrado**

Intervalo:  $[0, 4]$       Desigualdad:  $0 \leq x \leq 4$

Desplace el punto **Azul** y verifique       $0 \leq x \leq 4$



$[0, 4]$

Selecciona el tipo de intervalo

Cerrado ▼

Otro ejemplo

## Exploremos.

### Intervalos no Acotados.

Este tipo de intervalos aparece cuando se conoce solo uno de los extremos y el otro es el infinito, al no poderse incluir el infinito en el intervalo, estos se consideran siempre abiertos en el infinito:

Intervalo	Desigualdad $x \in \mathbb{R}$	Gráfico
Abierto izquierda $(a, +\infty)$	$a < x$	
Cerrado izquierda $[a, +\infty)$	$a \leq x$	
Abierto derecha $(-\infty, b)$	$x < b$	
Cerrado derecha $(-\infty, b]$	$x \leq b$	
Todos los $\mathbb{R}(-\infty, +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	

**Intervalo no acotado abierto a izquierda**

Intervalo:  $(4, +\infty)$       Desigualdad:  $4 < x$

Desplace el punto **Azul** y verifique  $4 < 4$

Extremo Derecho



Selecciona el tipo de intervalo

Otro ejemplo

### Ejercicio 8.1.

Organizar la desigualdad o el intervalo dado.


1. Oprime el botón **ejercicio** para generar un intervalo o desigualdad, arrastra el círculo al recuadro de manera organizada.
2. Oprime el botón **solución** para ver si lo has hecho bien, repite los pasos hasta finalizar el el ejercicio completo.




Organice la desigualdad o el intervalo en los recuadros según el ejercicio

Correcto: 0  
Incorrecto: 0

Arrastre el círculo correspondiente al recuadro según el ejercicio dado





**Ejercicio**

## 8.1.2 Propiedades de las desigualdades.

Sean  $a, b, c$  números  $\mathbb{R}$ , se cumple que:

- $a^2 \geq 0$
- Si  $a > 0$  y  $b > 0 \longrightarrow a \leq b \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .
- Si  $a > 0 \longrightarrow \frac{1}{a} > 0$ .
- Si  $a < 0 \longrightarrow \frac{1}{a} < 0$ .
- Si  $a \leq b$  y  $c \leq d \longrightarrow a + c \leq b + d$ .
- Si a los dos miembros de una desigualdad se suma o resta un mismo número obtenemos otra con el mismo sentido.



$$a \leq b \Leftrightarrow a \pm c \leq b \pm c$$

- Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un número positivo obtenemos otra equivalente.

$$c > 0 \longrightarrow a \leq b \Leftrightarrow ca \leq cb.$$

$$c > 0 \longrightarrow a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}.$$

- Si los dos miembros de una desigualdad se multiplican o dividen por un número negativo la desigualdad cambia de sentido.

$$c < 0 \longrightarrow a \leq b \Leftrightarrow ca \geq cb.$$

$$c < 0 \longrightarrow a \leq b \Leftrightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}.$$

El sentido de una desigualdad se conserva al multiplicar o dividir sus dos miembros por un mismo número positivo, se invierte si dicho número es negativo.

## 8.2 Inecuaciones lineales con una incógnita

Resolver una desigualdad o inecuación es encontrar todos los valores que tiene  $x$  para que la desigualdad se cumpla.

Si  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$ , cualquiera de las siguientes expresiones se llama inecuación lineal de una variable, inecuaciones del tipo:

$$ax + b < 0, \quad x > b, \quad ax < b, \quad ax \geq b, \quad ax \leq b$$

 **Exploramos.**

Pasos para resolver una inecuación lineal.

Primero se aísla la incógnita en un lado de la desigualdad, dejando en el otro solo números, para ello debe tenerse en cuenta las propiedades de las desigualdades, luego se procede de igual forma que al resolver una ecuación lineal con una incógnita.

Oprime el botón **Siguiente paso** y observa los ejemplos:



The screenshot shows a math problem interface with a green border. In the top right corner, there are two small icons: one with a square and an arrow pointing out, and another with a square and an arrow pointing in. The equation  $4x + 18 \leq 15x + 1$  is displayed in the center. At the bottom right, there is a blue button with the text "Siguiente paso".

$$4x + 18 \leq 15x + 1$$

Siguiente paso

## Exploremos.

Ejemplos de inecuaciones lineales.

### Indicaciones

1. Oprime alguno de los botones de **ejemplo** , observa los ejemplos paso a paso de la solución de una inecuación lineal.
2. Para practica la solución de una inecuación, oprime el botón **ejercicio** , realiza el apareamiento, resuelve la inecuación y luego selecciona la respuesta correcta.



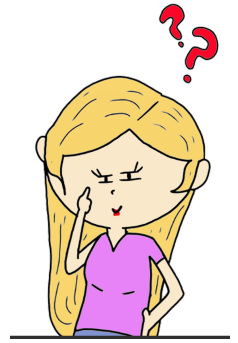
Ejemplo 1      Ejemplo 2      Ejemplo 3      Ejercicio



La inecuación posee infinitas soluciones que se representan geoméricamente por medio de puntos de una semirecta.



Veamos los siguientes ejemplos de la solución de una inecuación, encontrando los valores de  $x$  que cumplen la desigualdad y la representación de su solución gráfica:



### Ejemplo 8.1.

Resolver la inecuación no acotada  $3x - 10 > 5$

$$3x > 5 - 10$$

$$x > \frac{-5}{3}$$

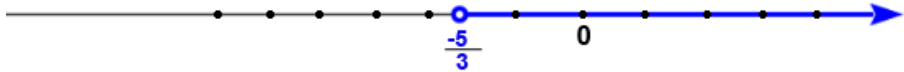


Figura 8.1. Gráfica de la solución:  $x > \frac{-5}{3} \rightarrow (\frac{-5}{3}, +\infty)$ .

### Ejemplo 8.2.

Resolver la inecuación acotada  $2 < 3x - 7 \leq \frac{2x - 7}{4}$

$$2 < 3x - 7 \wedge 3x - 7 \leq \frac{2x - 7}{4}$$

$$9 < 3x \wedge 12x - 28 \leq 2x - 7$$

$$3 < x \wedge x \leq \frac{21}{10}$$



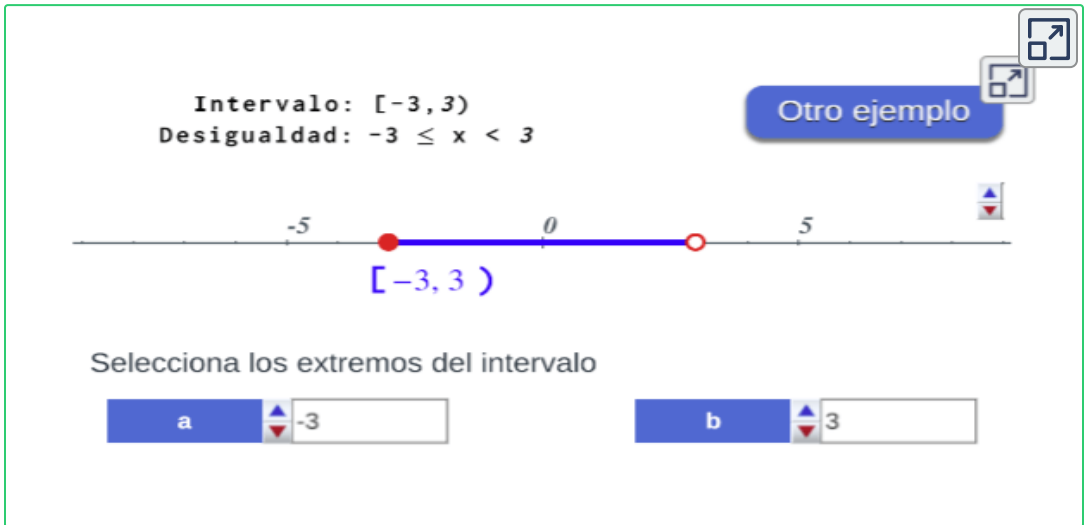
Figura 8.2. Gráfica de la solución.



## Exploremos.

Ejemplos de soluciones de inecuaciones lineales.

Observa la representación de un intervalo acotado, la desigualdad y su representación gráfica, oprime el botón **otro ejemplo** para ver diferentes ejemplos.



Los puntos de color rojo, representan los extremos del intervalo:

- → **No se incluye el extremo, intervalo abierto ( ).**
- → **Si se incluye el extremo, intervalo cerrado [ ].**



Se sugiere ilustrar la solución de una inecuación con una gráfica, si la solución incluye algún extremo del intervalo, en la gráfica representamos dicho extremo con un círculo relleno; pero, si la solución no incluye el extremo, lo representamos mediante un círculo sin relleno.



### Ejercicio 8.2.

Resuelve las siguientes inecuaciones lineales acotadas,

Resuelve el ejercicio planteado, verifica con el botón **solución**, para generar un nuevo ejercicio, oprime el botón **ejercicio**, veamos primero el siguiente ejemplo:

$$-10 < 2x - 2 \leq -2$$

$$2 - 10 < 2x \leq -2 + 2$$

$$-8 < 2x \leq 0$$

$$\frac{-8}{2} < x \leq \frac{0}{2}$$

$$-4 < x \leq 0$$



Figura 8.3. Gráfica de la solución:  $-4 < x \leq 0 \rightarrow (-4, 0]$

Resuelve las siguientes inecuaciones acotadas:

$$-6 \leq \frac{2x + 9}{5} \leq 6$$

Solución

**Ejercicio 8.3.**

Resuelve las siguientes inecuaciones lineales no acotadas.

Se plantean 4 inecuaciones lineales a continuación:

1. Primero, resuelva los ejercicios propuestos.
2. Luego, para verificar las respuestas, oprima el botón **solución**, observa la respuesta de cada inecuación, la desigualdad obtenida y la representación del intervalo.



**Inecuaciones lineales**

a)  $\frac{x+10}{3} < 6 + \frac{x}{8}$

Solución

b)  $\frac{7x-10}{3} - \frac{x-6}{8} > \frac{x+2}{4} - 5$

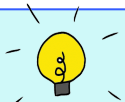
Solución

c)  $\frac{x+10}{3} - \frac{x-6}{8} \geq 7 + \frac{2x+4}{5}$

Solución

d)  $\frac{x-10}{3} \leq \frac{x-6}{8}$

Solución

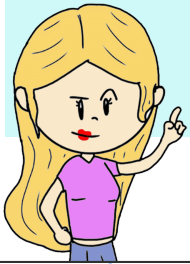


**¡Recuerda!**, este tipo de intervalos aparece cuando se conoce solo uno de los extremos y el otro es el infinito, al no poderse incluir el infinito en el intervalo, estos se consideran siempre abiertos en el infinito:

## 8.3 Inecuaciones cuadráticas con una incógnita

Primero que debemos hacer, recordemos las propiedades de las ecuaciones de 2° grado, teniendo en cuenta sus diferentes soluciones analizando el discriminante  $d = b^2 - 4ac$  que indica que tipo de solución tiene la ecuación ([página 129](#)):

$$ax^2 + bx + c = 0$$



Esta información será de utilidad, ya que nos permitirá realizar un proceso muy simple para conocer la solución de inecuaciones de 2° grado.

Con la información anterior obtenida, el proceso de solución de la inecuación consiste en:

- ✓ Encontrar las soluciones de la ecuación cuadrática, se resuelve igualando a cero la ecuación.
- ✓ Ubicarlas las soluciones en la recta numérica e identificar los intervalos que se generan. Con los valores obtenidos, en la recta colocamos círculos vacíos para identificar que en la inecuación no se permite la igualdad con cero ( $< o >$ ) o círculos rellenos que identifican que se permite el cero en la inecuación ( $\leq o \geq$ ). Estos puntos son los extremos de los intervalos que se generan.
- ✓ Identificar el signo del polinomio en cada una de los intervalos generados. Sustituimos un valor de cada intervalo en la inecuación para obtener el signo que determina cada intervalo.
- ✓ Buscar la solución de la inecuación según los signos obtenidos y según la desigualdad dada.

**Ejemplo 8.3.** Encontrar la solución de la inecuación cuadrática:

$$x^2 - x - 42 < 0$$

$$(x - 7)(x + 6) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \wedge \quad x + 6 = 0$$

$$x = 7 \quad \wedge \quad x = -6$$

Ubicamos los valores encontrados y identificamos los intervalos generados, sustituimos un valor de cada intervalo en el factor para obtener el signo que se determina.

Observemos el signo del factor  $x - 7$ :

$$\text{Si } x < 7, \text{ sustituimos } x \text{ por } 1 \longrightarrow 1 - 7 = -6 \longrightarrow (-).$$

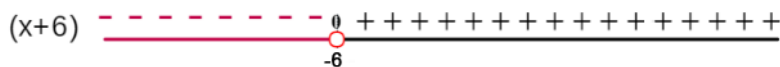
$$\text{Si } x > 7, \text{ sustituimos } x \text{ por } 9 \longrightarrow 9 - 7 = 2 \longrightarrow (+).$$



Observemos el signo del factor  $x + 6$ :

$$\text{Si } x < -6, \text{ sustituimos } x \text{ por } -8 \longrightarrow -8 + 6 = -2 \longrightarrow (-).$$

$$\text{Si } x > -6, \text{ sustituimos } x \text{ por } 2 \longrightarrow 2 + 6 = 8 \longrightarrow (+).$$



¿Que sucede en el caso que la ecuación no tenga solución real?

Por tanto la solución de la inecuación  $x^2 - x - 42 < 0$ , son los valores donde los intervalos son negativos:

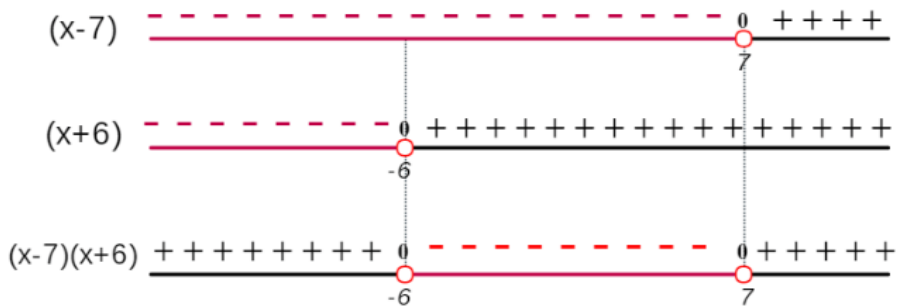


Figura 8.4. Solución gráfica de la desigualdad.

por tanto, la solución es:  $-6 < x < 7 = (-6, 7)$

Si la inecuación fuera  $x^2 - x - 42 \leq 0$ , significa que ahora se admiten valores que al evaluar el polinomio el resultado sea cero:

$$(-6)^2 - (-6) - 42 \leq 0$$

$$(7)^2 - (7) - 42 \leq 0$$

Por tal motivo, se incluye  $-6$  y  $7$  en la solución:  $[-6, 7]$ .

Podemos expresar la solución de la inecuación mediante una representación gráfica o un intervalo.

**¡Recuerda!**

Si la desigualdad tiene este signo  $< \text{ó} >$ , los valores en la recta son un círculo vacío y se ubica en paréntesis en la solución.

Si la desigualdad tiene este signo  $\geq \text{o} \leq$ , los valores en la recta son un círculo relleno y se ubica en corchetes en la solución.

## Exploremos.

Ejemplos de la solución de una inecuación cuadrática.

Comprueba la solución, toma un valor de cada intervalo, reemplaza en el polinomio inicial y verifica el signo del resultado obtenido.

Seleccione el signo de la desigualdad para cambiar la inecuación, oprime el botón **ejemplo** para ver diferentes ejemplos.

$x^2 - 4x - 32 \leq 0$   
 $(x - 8)(x + 4) \leq 0$

Seleccione el signo de la desigualdad

Menor o Igual ▼

$(x-8)$	0	++++	8	++++
$(x+4)$	0	++++	-4	++++
$(x-8)(x+4)$	0	++++	-4	++++

Sol.  $[-4,8] = -4 \leq x \leq 8$

Ejemplo

Responde a la siguiente pregunta:

¿La solución de la inecuación  $x^2 + 2x - 63 < 0$  es?

Respuesta

## 8.4 Inecuaciones racionales con una incógnita

Cuándo tenemos inecuaciones con expresiones racionales se realizan los siguientes pasos:

1. Hallamos las raíces del numerador y del denominador.
2. Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas, ¿sabes porque?
3. Tomamos un punto de cada intervalo, evaluamos en la inecuación inicial y observamos el signo en cada intervalo.
4. La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que la fracción polinómica.

### Exploremos.

Observa ejemplos de inecuaciones con expresiones racionales:

Inecuación  $\frac{(x-1)}{(x+7)} \geq 0$  Seleccione el signo de la desigualdad  
Mayor o Igual


(x-1)	- - - - -	0	+	+	+	+									
(x+7)	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
(x-1)(x+7)	+	+	+	+	+	+	+	+	0	- - - - -	+	+	+	+	

Solución:  $(-\infty, -7) \cup [1, +\infty) = x < -7 \wedge x \geq 1$

Ejemplo



## 8.5 Practiquemos

 **Ejercicio.**



Resuelve las siguientes inecuaciones cuadráticas y racionales.




**Indicaciones**

Analiza la inecuación propuesta.

1. Resuelve el ejercicio propuesto y verifica tus respuestas, oprime el botón **ver solución**.
2. Para una nueva inecuación, oprime el botón **ejercicio** y repite los pasos anteriores.

1). Inecuación  $\frac{(x - 8)}{(x + 2)} \geq 0$

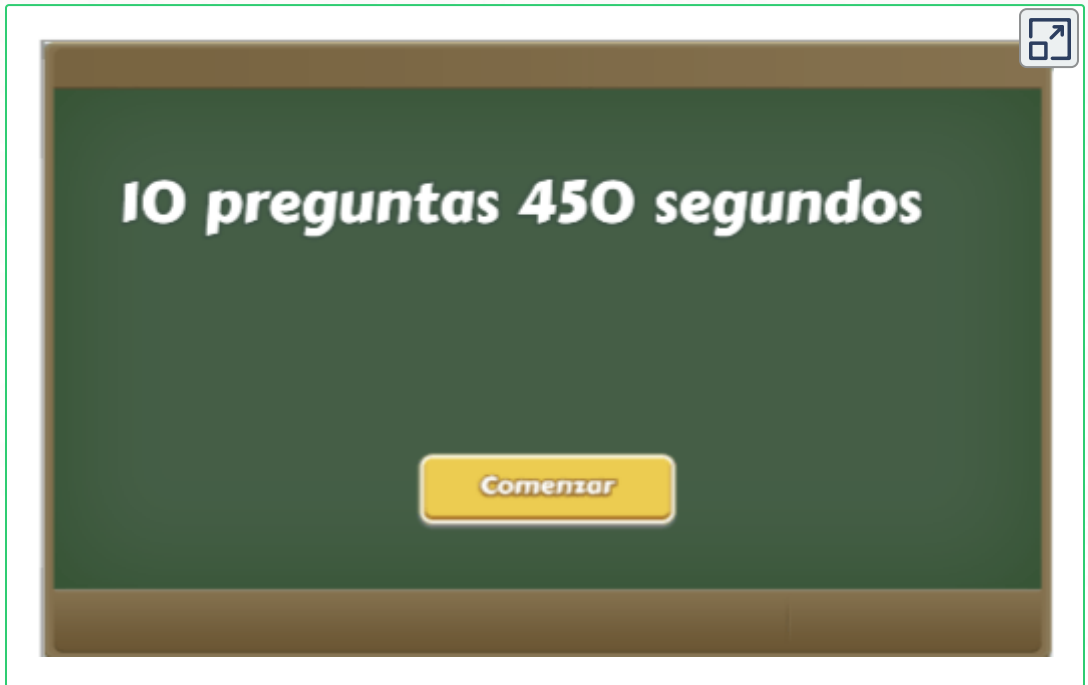





Comprueba la solución de forma gráfica, toma un valor de cada intervalo y replázalo en el polinomio inicial y comprueba el signo con el resultado obtenido y realiza la gráfica.

## Evaluamos lo aprendido.

Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:




 **Evaluación - 10 preguntas con límite de tiempo - (10 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.



### Capítulo VIII: Inecuaciones.

Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).

 **Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo VIII](#)

Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.

[\[4\]](#) Plantillas con Descartes-JS



"Las matemáticas son la ciencia de lo que está claro por sí mismo".

Carl Gustav Jacob Jacobi



# Capítulo IX

## Números Complejos



## DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE (DBA)

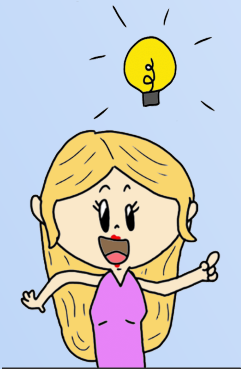
**DBA.2.** Construye representaciones, argumentos y ejemplos de propiedades de los números racionales y no racionales.

**DBA.5.** Utiliza teoremas, propiedades y relaciones geométricas (teorema de Tales y el teorema de Pitágoras) para proponer y justificar estrategias de medición y cálculo de longitudes.

**DBA.8.** Identifica y analiza relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relaciona la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación.

**DBA.9.** Propone, compara y usa procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos.

[7] Derechos Básicos de Aprendizaje - Grado 9°.



### DESEMPEÑOS / ESTÁNDAR

#### Pensamiento numérico

**1.2 M.IV** Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. DBA 2.

#### Pensamiento espacial

**2.4 M.IV** Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas. DBA 5.

#### Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

**5.1 M.IV** Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. DBA8, 9

**5.5 M.IV** Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales. DBA2, 8.

## 9.1 Introducción

Si se llega a la siguiente situación al resolver una ecuación, donde:

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

Este tipo de ecuación o similar, no tiene solución en el conjunto de los números reales ( $\mathbb{R}$ ).

En esta sección se analizará el estudio de números no reales que provienen de una raíz par de un número negativo, para esto, veamos la siguiente definición:



### 9.1.1 Número Imaginario ( $\mathbb{I}$ )

Un número Imaginario ( $\mathbb{I}$ ) puede describirse como el producto de un número real por la unidad imaginaria  $i$ , es decir, la expresión  $bi$ , donde  $i = \sqrt{-1}$  llamada **unidad imaginaria**. Este número Imaginario  $i$  se le conoce también como constante imaginaria, ejemplos:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

$$-\sqrt{-25} = -5i, \quad \sqrt{-\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}i, \quad \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$$

Este tipo de números se conocen como números imaginarios puros y se representan también como una pareja ordenada de la forma  $(0, b)$ , donde la primera componente es nula.

$$3i = (0, 3)$$

## Análisis de las potencias de $i$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = (\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = 1$$

$$i^5 = (\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^3 = (-1)(-\sqrt{-1}) = \sqrt{-1} = i$$

$$i^6 = (\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^4 = (-1)(1) = -1$$

$$i^7 = (\sqrt{-1})^7 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^5 = (-1)(\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1} = -i$$

$$i^8 = (\sqrt{-1})^8 = (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^6 = (-1)(-1) = 1$$

Observa que cada cuatro potencias vuelve y repite el resultado, por tanto, podemos decir que:

$$i = i^5 = i^9 = i^{13} \dots = i \quad \longrightarrow \quad \text{Múltiplos de 4 más 1}$$

$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} \dots = -1 \quad \longrightarrow \quad \text{Múltiplos de 4 más 2}$$

$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} \dots = -i \quad \longrightarrow \quad \text{Múltiplos de 4 más 3}$$

$$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} \dots = 1 \quad \longrightarrow \quad \text{Múltiplos de 4}$$

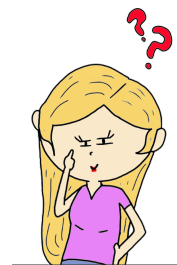
$$\text{Si } n \text{ es par } (-1)^n = 1$$

$$\text{Si } n \text{ es impar } (-1)^n = -1$$

**Ejemplo 9.1.** Para potencias de exponentes muy grandes:

$$i^{47} = (i^2)^{23} \cdot i = (-1)^{23} \cdot i = (-1) \cdot i = -i = -\sqrt{-1}$$

$$i^{80} = (i^2)^{40} = (-1)^{40} = (1)$$

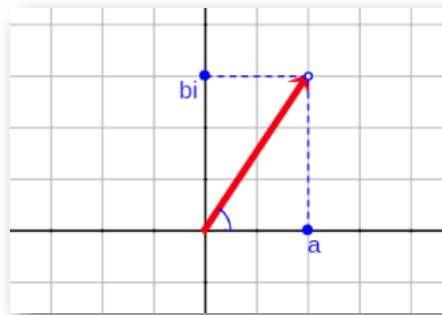




## 9.2 Número Complejo ( $\mathbb{C}$ )

Los números complejos ( $\mathbb{C}$ ), están formados por una parte real " $a$ " y una parte imaginaria " $bi$ ", donde  $a, b$  son números  $\mathbb{R}$  que representan una pareja ordenada  $(a, b)$  y se expresan en forma binómica:

$$z = (a, b) = a + bi$$



**Figura 9.1.** Representación en el plano del número complejo  $z = (a, b) = a + bi$ .

En el caso en que  $b = 0$ , se tendrá un número de la forma  $a + 0i$ , el cual corresponde a un número  $\mathbb{R}$ , por lo que se puede concluir que todos los números  $\mathbb{R}$  son también números Complejos, donde la parte imaginaria sería cero, observa la escritura de algunos números complejos:

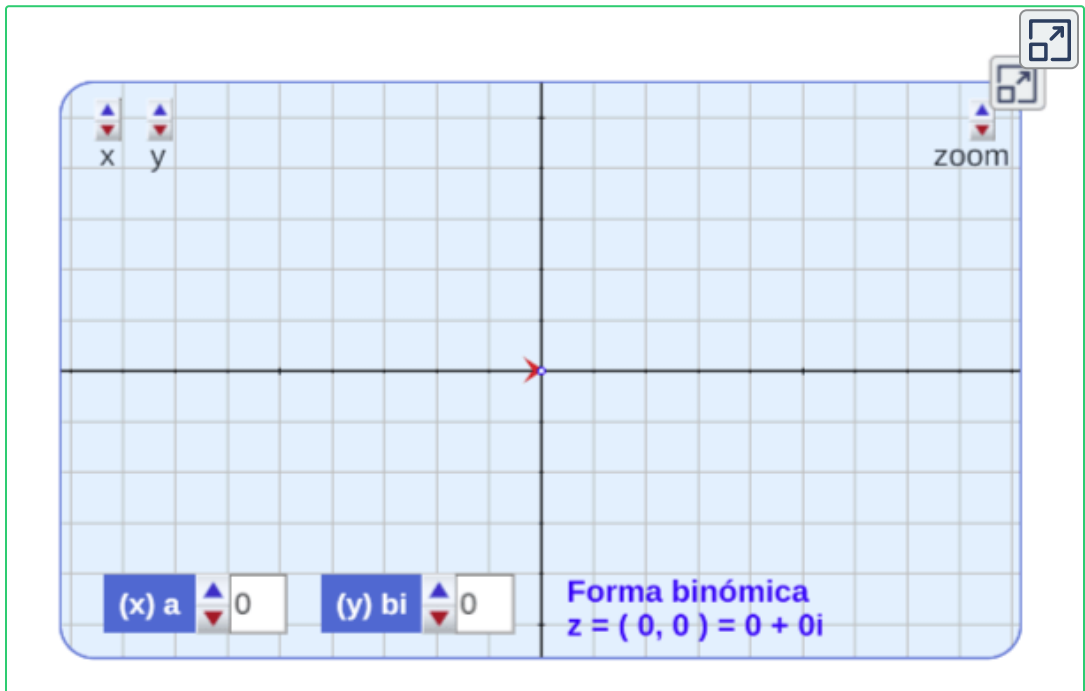
Número Complejo ( $\mathbb{C}$ )	Parte Real ( $a$ )	Parte Imaginaria ( $bi$ )
$3 + 2i$	3	2
5	5	0
$(3, 5)$	3	5
$-6i$	0	-6
$(0, -3)$	0	-3

Los números complejo se pueden ubicar en el plano, que es llamado **Plano de Argand**, donde el eje real es el eje  $x$  y el eje imaginario es el eje  $y$ , es decir, se toma la parte real del complejo y se dibuja en el eje  $x$ , la parte imaginaria en el eje  $y$  luego, se trazan paralelas a los ejes que pasen por cada uno de los puntos dibujados y la intersección de dichas paralelas es la representación del número  $\mathbb{C}$ .

Generalmente un número complejo se representa por medio de un vector, veamos en el plano la representación de un número Complejo  $(a, b)$  y su forma binómica  $z = a + bi$ :

### 🔍 Exploremos.

Mueve el control o ingresa los valores para cada componente, observa el vector que se genera del complejo  $z = (a, b) = a + bi$ .



## 9.3 Operaciones con números Complejos

### 9.3.1 Suma o diferencia de números Complejos

Para sumar o restar números complejos se suman o se restan las partes reales y las partes imaginarias, si se tienen dos números complejos en forma binómica, entonces la suma o resta será:

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di$$

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

#### Ejercicio 9.1.

Sumas o diferencias entre números complejos.



Ingresa los valores para cada componente del número complejo, observa la suma de los números.

Ingresa los valores reales e imaginarios de cada número

<b>a (Parte Real)</b>	<input type="text" value="6"/>	<b>c (Parte Real)</b>	<input type="text" value="4"/>
<b>b (Parte imaginaria)</b>	<input type="text" value="3"/>	<b>d (Parte imaginaria)</b>	<input type="text" value="8"/>

$$z_1 = 6 + 3i$$

$$z_2 = 4 + 8i$$


---


$$z_{1+2} = 10 + 11i$$

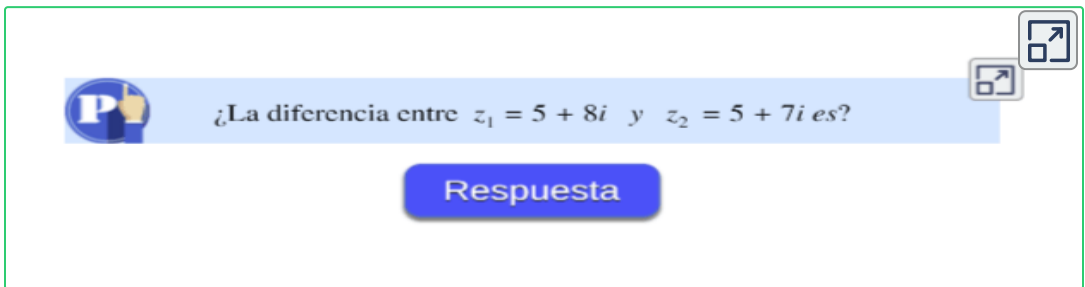
Si los números complejos están en forma de pareja ordenada, su suma o diferencia se expresa similar a la forma binómica.

Si los números están como pareja ordenada, la primera componente es la suma o resta de las partes reales ( $a_1 \pm a_2$ ) y la segunda componente es la suma o resta de las partes imaginarias ( $b_1 \pm b_2$ ) $i$ .

$$z_1 \pm z_2 = (a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

$$(3, 5) + (2, -3) = (3 + 2, 5 + (-3)) = (5, 2) = 5 + 2i$$

Responde a la siguiente pregunta:



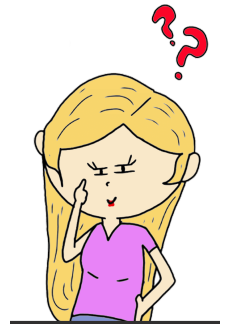
¿La diferencia entre  $z_1 = 5 + 8i$  y  $z_2 = 5 + 7i$  es?

Respuesta

## Representación de operaciones en el plano

Para sumar dos vectores gráficamente de manera sencilla, es utilizado el **método del paralelogramo**.

Consiste en colocar los dos vectores iniciales con su magnitud, dirección y sentido en el origen, de manera que los dos vectores inicien en el mismo punto.



Los dos vectores forman dos lados adyacentes del paralelogramo, los otros lados se construyen trazando líneas paralelas a los vectores opuestos de igual longitud.

El vector suma resultante se representa mediante un vector dado por la diagonal del paralelogramo, partiendo del origen en el que se unen los vectores hasta la intersección de las paralelas trazadas.

**Exploremos.**

Método del paralelogramo para sumar números complejos.

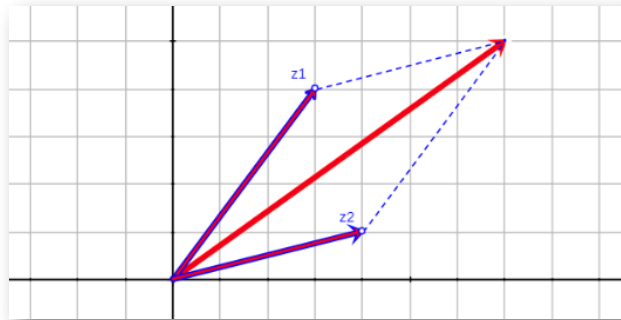


Figura 9.2. Representación gráfica del método del paralelogramo.



Ingresa los valores para cada componente del número complejo, observa su gráfica.

▲▼

▲▼

▲▼

a (x)

c (x)

bi (y)

di (y)

## 9.3.2 Multiplicación de números Complejos

Para realizar la multiplicación de números complejos, se opera como una multiplicación entre binomios, se aplica la propiedad distributiva. Si se tienen dos números complejos, entonces la multiplicación será:



$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Si  $z = a + bi$ , entonces el **inverso multiplicativo** de un número  $\mathbb{C}$  esta dado por la expresión:

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

**Ejemplo 9.2.** Inverso multiplicativo de  $z = -3 + 5i$

Componente real:  $a = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{-3}{(-3)^2 + 5^2} = \frac{-3}{34}$

Componente imaginario:  $bi = \frac{-b}{a^2 + b^2} = \frac{-5}{(-3)^2 + 5^2} = \frac{-5}{34}$

Por lo tanto, el inverso multiplicativo es:  $z^{-1} = -\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i$

## Ejercicio 9.2.

Multiplicación entre números complejos.



Ingresa los valores para cada componente del número complejo, observa las respuestas.

Ingrese los valores reales e imaginarios de cada número

a (Parte Real)	<input type="text" value="6"/>	c (Parte Real)	<input type="text" value="4"/>
b (Parte imaginaria)	<input type="text" value="3"/>	d (Parte imaginaria)	<input type="text" value="8"/>

$$z_1 = 6 + 3i$$

$$z_2 = 4 + 8i$$


---


$$z_1 \cdot z_2 = 0 + 60i$$

El sistema de los números complejos tiene la propiedad de la existencia del inverso multiplicativo o recíproco para todo número distinto de cero. La propiedad del inverso multiplicativo se refiere a que para cada número  $z$ , distinto de cero, existe un número, llamado el inverso, denotado por  $z^{-1}$ , que cumple:

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

¿El inverso multiplicativo de  $z = 6 + 9i$  es?

**Respuesta**


### 9.3.3 La conjugada de un número Complejo

El complejo conjugado, o simplemente la conjugada, de un número complejo  $z = a + bi$ , es otro complejo, y esta dado por la expresión:

$$\bar{z} = a - bi = (a, -b)$$

**Ejemplo 9.3.** La conjugada de  $z = -3 + 5i$

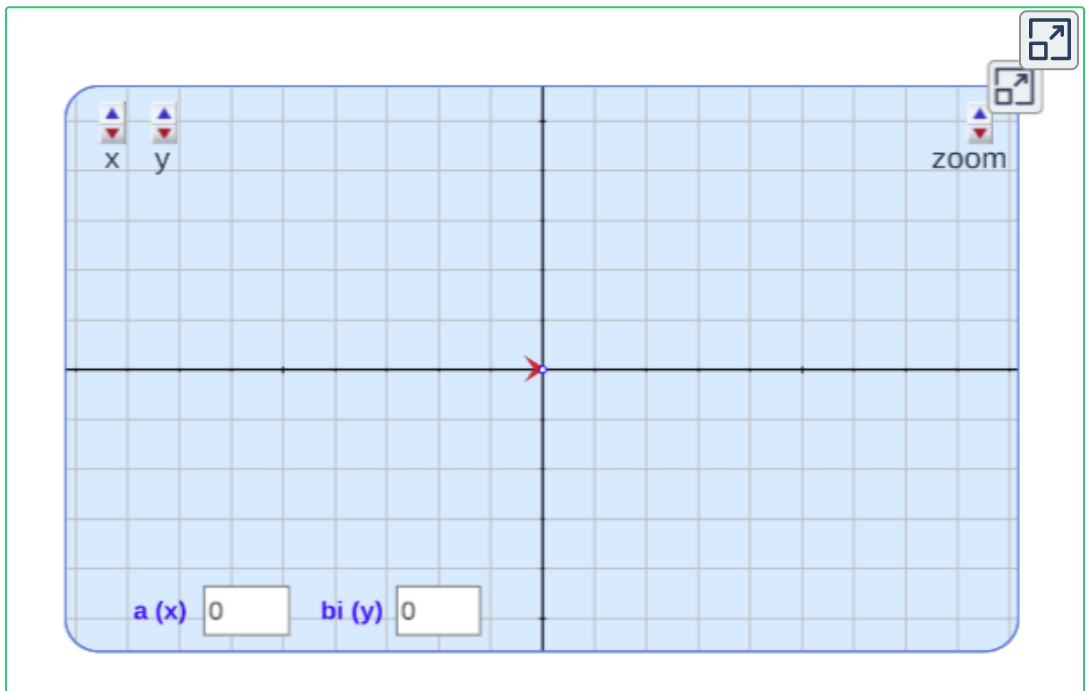
La conjugada es:  $\bar{z} = -3 - 5i = (-3, -5)$

 **Exploramos.**

Observa un número complejo y su conjugada:



Ingresa los valores para cada componente del número complejo, observa la conjugada.





Cuándo se multiplica un número complejo  $z$  por su conjugada  $\bar{z}$ , se esta aplicando una diferencia de cuadrados, por tanto:

$$(c + di) \cdot (c - di) = c^2 - (di)^2$$

donde  $i^2 = (-1)$ , entonces, se tiene que:

$$c^2 - d^2(i)^2 = c^2 - d^2(-1) = (c^2 + d^2) \in \mathbb{R}$$



### Ejemplo 9.4.

Multiplicación del número  $z = 5 + 2i$  por su conjugada  $\bar{z}$ .

Conjugada de  $z = 5 + 2i \longrightarrow \bar{z} = 5 - 2i$

$$z \cdot \bar{z} = (5 + 2i)(5 - 2i) = 5^2 + 2^2 = 14$$

## 9.3.4 División de números Complejos

Para dividir por un número complejo, se multiplica el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, veamos el siguiente proceso en la división de dos números:

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

Conjugada del divisor  $\longrightarrow \bar{z}_2 = c - di$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

**Ejemplo 9.5.** Sean  $z_1 = 3 - 6i$ ,  $z_2 = 2 + i$ , encontrar  $z = \frac{z_1}{z_2}$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 6i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{6 - 3i - 12i + 6i^2}{4 - i^2} = \frac{(6 - 6) + (-3 - 12)i}{4 + 1}$$

$$z = -\frac{14}{5}i$$

Para este ejemplo, se tiene que la parte real es cero, por tanto, el número complejo se representa como:

$$z = \left(0, -\frac{14}{5}\right) = 0 - \frac{14}{5}i$$

Responde a la siguiente pregunta:



¿El resultado de dividir  $z_1 = 7 + 7i$  por  $z_2 = 5 + 1i$  es?

Respuesta



**¡Recuerda!** , que al multiplicar un número complejo por su conjugada, se obtiene un número real, la parte imaginaria es cero.

$$z \cdot \bar{z} = (c + di) \cdot (c - di) = c^2 + d^2$$

## 9.4 Practiquemos

### Ejercicio.

Operaciones entre números complejos-



Resuelve los 6 ejercicios propuestos con número complejos y verifica tus respuestas, oprime el botón **solución**.



1. ¿La diferencia entre  $z_1 = 5 + 8i$  y  $z_2 = 2 + i$  es?

Solución

2. ¿La diferencia entre  $z_1 = 2 + 3i$  y  $z_2 = 3 + 2i$  es?

Solución

3. ¿El inverso multiplicativo de  $z = 2 + 4i$  es?


Solución

4. ¿El inverso multiplicativo de  $z = 6 + 9i$  es?

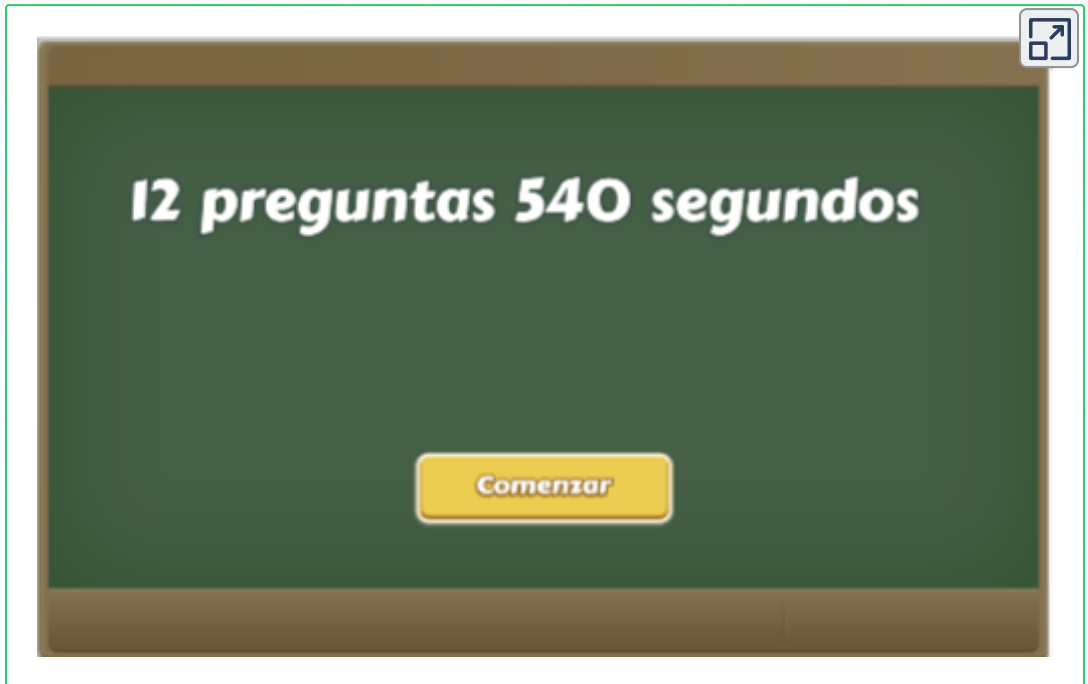
Solución

5. ¿El resultado de dividir  $z_1 = 1 + 5i$  por  $z_2 = 2 + 7i$  es?

Solución

 **Evaluamos lo aprendido.**


Prepárate para la evaluación y mide tus conocimientos de lo aprendido en este capítulo, responde las preguntas a continuación:




12 preguntas 540 segundos

Comenzar

 **Evaluación - 12 preguntas con límite de tiempo - (12 minutos)**  
Clic en el link, responde y envía los resultados por e-mail.



**Capítulo IX: Números Complejos.**  
Evalúa lo aprendido en el capítulo y envía a tu profesor(a).

 **Envía tu evaluación**  
[Evaluación: Capítulo IX](#)

[4]. Tomada de la Red Educativa Digital Descartes.  
Plantillas con Descartes-JS



"La naturaleza está escrita en lenguaje matemático".

Galileo Galilei



# Bibliografía

- [1] **Rojas Hincapié, C.A.** (2018). *Matemáticas Básicas*. 1.<sup>a</sup> Ed. Medellín, Colombia. Institución Universitaria Pascual Bravo. Recuperado de: [Matematicas Basicas-JS](#)
- [2] **Garcia, M., Galo. J.** *Proyecto "EDAD" (Educación Digital con Descartes)*. Recuperado de: <https://proyectodescartes.org/EDAD/>
- [3] **Abreu, J., Galo, J. y Rivera, J.** *Proyecto Telesecundaria*. México. Recuperado de: <https://proyectodescartes.org/Telesecundaria/>
- [4] **Rivera, J. y Galo, J.** *Plantillas con Descartes JS*. La Red Educativa Digital Descartes, proyectodescartes.org. Recuperado de: <https://proyectodescartes.org/plantillas/>
- [5] **Rojas, C.** (2020). *Función Lineal y Cuadrática*. (1.<sup>a</sup> ed.). Editorial Red Educativa Digital Descartes, Córdoba (España). Recuperado de: [Función lineal y cuadrática](#).
- [6] **Quintero, L.** (2020). *Estrategias de Mejoramiento de Componentes Curriculares*. Cali: 1<sup>o</sup> Ed. [Los Tres Editores S.A.S.](#) 56 pag.
- [7] **Ministerio de Educación Nacional (MEN).** (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. V2<sup>o</sup>. Panamericana Formas E Impresos S.A. Recuperado de: [DBA matemáticas.pdf](#). 88 pag.
- [8] **Uribe, J.** (1989). *Elementos de Matemáticas*. Medellín: 2<sup>o</sup> Ed. Ediciones Bedout. 401 pag.
- [9] **Guarin, H. Wills, D. y Takeuchi, Y.** (1983). *Hacia la Matemática 4*. Medellín, Colombia. 2<sup>o</sup> Ed. Grupo Editorial Andino. 480 pag.

- [10] **Rodríguez S, Benjamín y otros** (1996). *Matemáticas con Tecnología Aplicada*. Bogotá: Ediciones Prentice Hall. 220 pag.
- [11] **Barnett, A.** (1989). *Álgebra y Geometría*. Bogotá: 2º Ed. Ediciones MC Graw-Hill. 384 pag.
- [12] **Uribe, J.** (1989). *Elementos de Matemáticas*. Medellín: 2º Ed. Ediciones Bedout. 401 pag.



