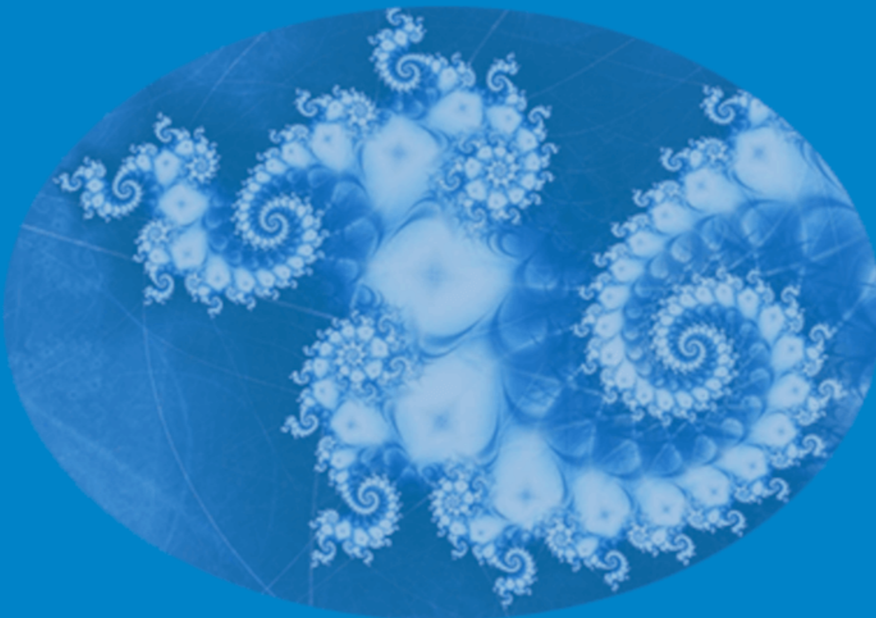


Los números complejos

Libro interactivo

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
PASCUAL BRAVO

DESCARTES
matemáticas interactivas

Los números complejos

María José García Cebrian
Red Educativa Digital Descartes, España

Fondo Editorial Pascual Bravo

Medellín

Título de la obra:
Los números complejos

Autora:
María José García Cebrian

Actualización: Joel Espinosa Longi
Diseño de cubierta: Diana María Velásquez García
Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interactivos: DescartesJS
Fuente: Lato
Fórmulas matemáticas: $\KaTeX$
Núcleo del libro interactivo: septiembre 2023

Fondo Editorial Pascual Bravo
Calle 73 73A-226
PBX: (574) 4480520
Apartado 6564
Medellín, Colombia
www.pascualbravo.edu.co

ISBN: 978-958-56476-0-2

Tabla de contenido

Introducción **5**

1. La forma binómica **7**

1.1 ¿Por qué los números complejos? 9

1.2 Parte real y parte imaginaria 10

1.3 Operaciones con complejos: sumar y restar 12

1.4 Operaciones con complejos: producto y cociente 14

2. La forma polar **17**

2.1 Módulo y argumento de un número complejo 19

2.2 Producto y cociente de complejos en forma polar 20

2.3 Potencias de complejos en forma polar 22

2.5 Ejercicios para practicar 25

3. Algunas aplicaciones **27**

3.1 Operaciones con complejos y transformaciones geométricas 29

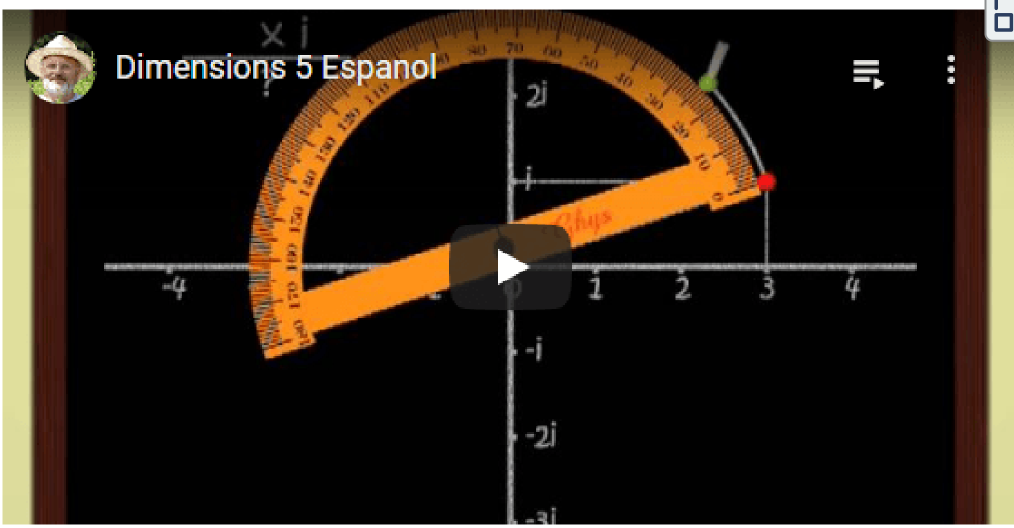
4. Autoevaluación **33**

Introducción

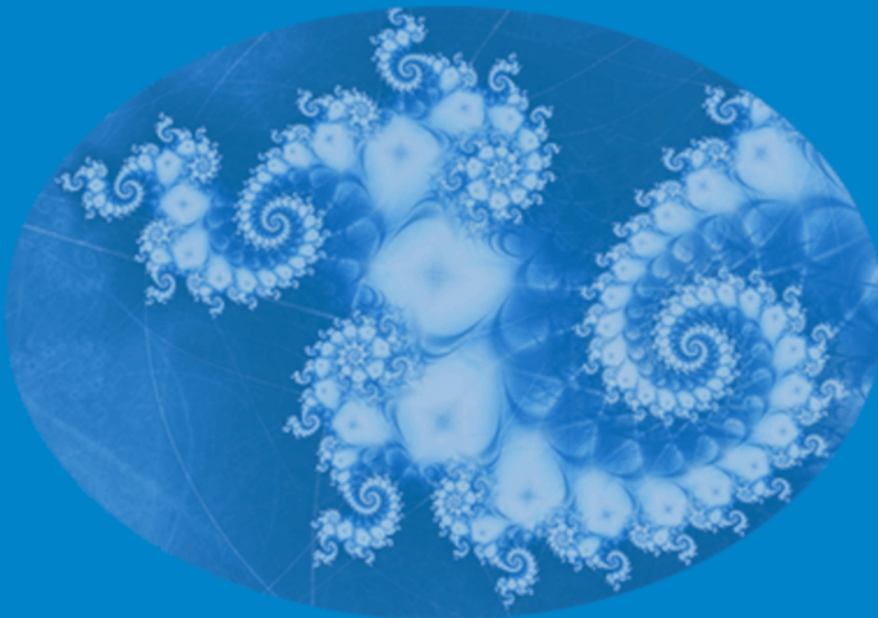
Los números complejos se introducen para dar sentido a la raíz cuadrada de números negativos. De esta forma ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$ pueden ser resueltas y se abre la puerta a un sorprendente mundo en el que todas las operaciones (salvo dividir entre 0) son posibles.

Aquí se abordan los contenidos a nivel del Bachillerato de Ciencias de España pero puede ser válido para cualquier estudiante que quiera adentrarse en el estudio de estos fascinantes números.

En el siguiente video[1] puedes ver una interesante introducción a los números complejos y sus aplicaciones.



[1] Capítulo 5 del video "DIMENSIONS, un paseo a través de las Matemáticas", www.dimensions-math.org/Dim_ES.htm



Capítulo I

La forma binómica

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO

1.1 ¿Por qué los números complejos?

Las soluciones[2] de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los puntos de corte de la función $y = ax^2 + bx + c$ con el eje de abscisas.

Estas soluciones vienen dadas por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Y según sea el signo del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ puede ocurrir que haya dos, una o ninguna solución real.

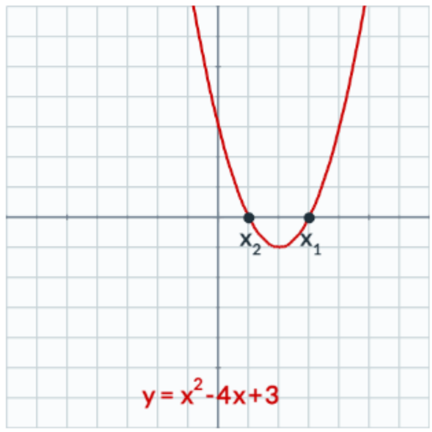
Pero si se trata de que exista solución en todos los casos, ¿qué hacer cuando el discriminante es negativo?, esto es cuando tenemos la raíz cuadrada de un número negativo que sabemos no es un número real.

Si hacemos $i = \sqrt{-1}$, la unidad **imaginaria**, ya podremos resolver la ecuación en cualquier caso.

$1\, x^2 + -4\, x + 3 = 0$

- $\Delta = 4 > 0$ Dos soluciones reales:

  $x_1 = 3 \quad x_2 = 1$



Un poco de historia[3]

Aunque la primera referencia conocida de raíces cuadradas de números negativos proviene de los matemáticos griegos, no es hasta el siglo XVI cuando Girolamo Cardano propone estos números. Posteriormente Descartes en 1637 les puso el nombre de imaginarios.

Fueron Wessel en 1799 y Argand en 1806, con la propuesta del plano complejo quienes sentaron las bases de los números complejos, hasta que, finalmente, Gauss (1777-1855) les dio nombre y los definió rigurosamente.

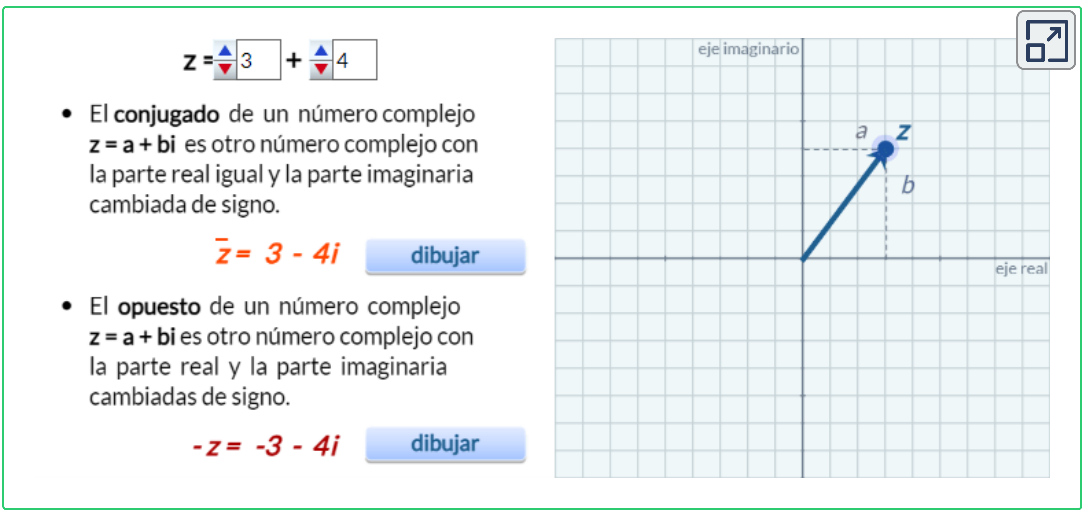
[2] Basado en una página de la unidad Números Complejos de Ángela Núñez Castaín para Red Educativa Digital Descartes.

[3] De la Wikipedia es.wikipedia.org/wiki/Número_complejo.

1.2 Parte real y parte imaginaria

Si consideramos la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ y la representamos en el punto $(0, 1)$ del plano, podemos situar de la misma forma los números $2i, 3i, \ldots, -i, -2i, \ldots$ en el eje vertical, es decir los números bi que llamaremos imaginarios. Entonces un punto cualquiera del plano (a, b), con a y b números reales, puede escribirse como $(a, 0) + (0, b)$, esto es como la suma de un número real y un número imaginario.

- Los números complejos son de la forma $a + bi$, donde a es la parte real y b es la parte imaginaria. Cada número complejo z se puede representar en el plano mediante el punto $Z(a, b)$ llamado **afijo** o bien mediante el vector OZ.
- Dos números complejos son iguales si lo son las partes reales y las partes imaginarias respectivas.



Para practicar

Ejercicio 1

Averigua el valor de a y de b para que $a+6i$ sea el conjugado de $-10+bi$

$a =$ ☐ $b =$ ☐

comprobar

Ejercicio 2

Halla las soluciones de la ecuación: $z^2 - 14z + 85 = 0$

☐ $\pm$ ☐ i

comprobar

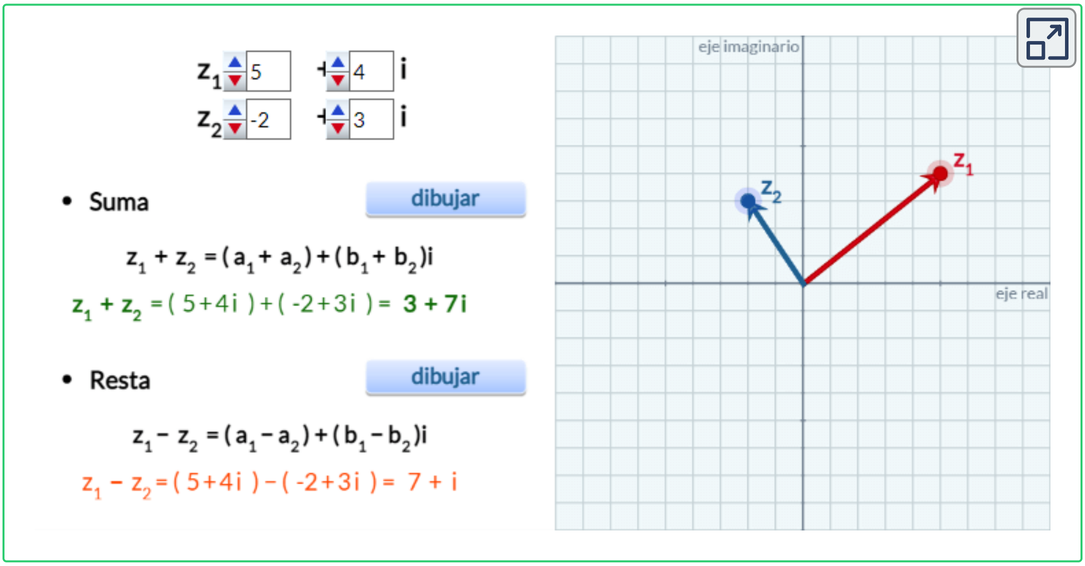
1.3 Operaciones con complejos: sumar y restar

Los números complejos se pueden sumar o restar siguiendo las reglas de las operaciones con números reales.

- Para **sumar** dos números complejos se suman respectivamente las partes reales y las partes imaginarias. Así dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ su suma es:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

- Como en los números reales para **restar** dos complejos hay que sumar al minuendo el **opuesto** del sustraendo.



Para practicar

Ejercicio 3

Efectúa las siguientes operaciones: $(-7-6i)+\frac{1}{3}(6-9i)-(-4+6i)$

$\square + \square i$

comprobar

Ejercicio 4

Calcula los números complejos z_1 y z_2 que cumplen $z_1+z_2= 4+5i$ y $z_1-z_2=-6-7i$

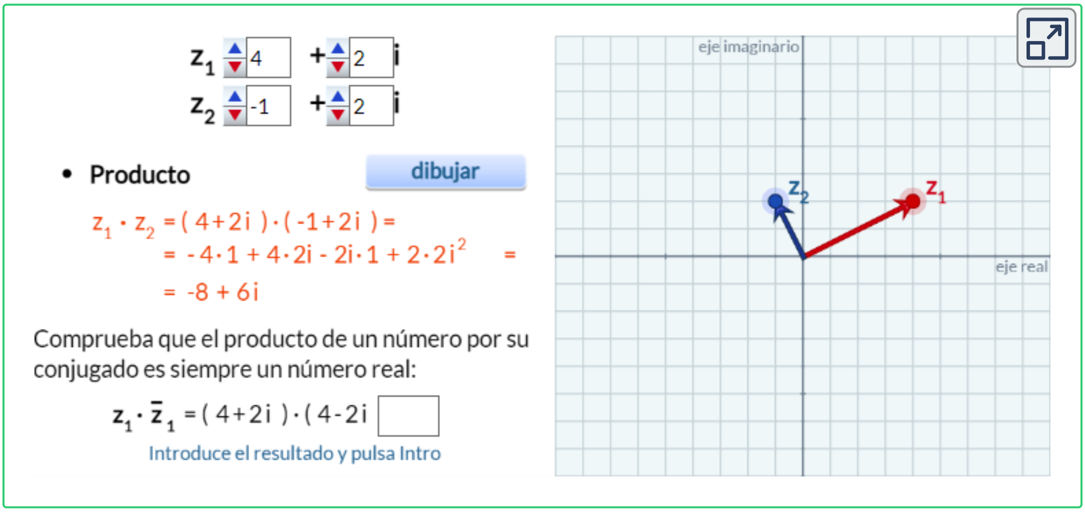
$z_1 = \square \; \square$ $z_2 = \square \; \square$

comprobar

1.4 Operaciones con complejos: producto y cociente

Los números complejos se pueden multiplicar siguiendo las reglas de las operaciones con números reales y teniendo en cuenta que $i \cdot i = i^2 = -1$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot b_2 i + b_1 \cdot a_2 i + b_1 \cdot b_2 i^2 \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) i \end{aligned}$$



Ejercicio 5

Calcula el valor de **b** para que el producto **(-3+i) · (-5+bi)** sea un número imaginario puro.

***b* =**

comprobar

Inverso de un número complejo

El inverso de un número complejo **z = a + bi** es otro complejo $\frac{1}{z}$ que debe cumplir $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

Para calcularlo observa que el producto de **z = a + bi** por su conjugado $\bar{z}$ **= a - bi** resulta:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$$

Y si se dividen los dos miembros de esta igualdad por a^2+b^2 se obtiene:

$$\frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2} = (a+bi)\cdot\left(\frac{a-bi}{a^2+b^2}\right) = (a+bi)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right) = 1$$

Con lo que el inverso de **z = a + bi** es: $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$

Cociente de complejos

Para dividir dos números complejos, al igual que con los números reales, se multiplica el numerador por el inverso del denominador. Como regla práctica multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

z_1 = -8 6

z_2 = -1 2

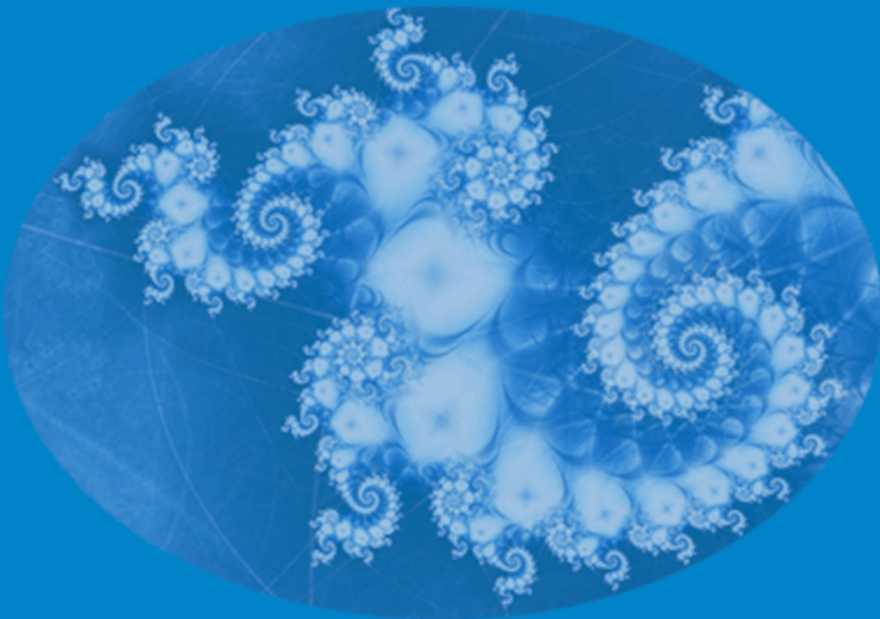
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-8+6i}{-1+2i} = \frac{(-8+6i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{8\cdot1+8\cdot2i-6i\cdot1-6\cdot2i^2}{1-4i^2} = \frac{20+10i}{5} = 4+2i$$

Ejercicio 6

Calcula el valor de **b** para que el afijo del cociente $\frac{-3+bi}{4+3i}$ esté en la bisectriz del primer cuadrante.

b =

comprobar

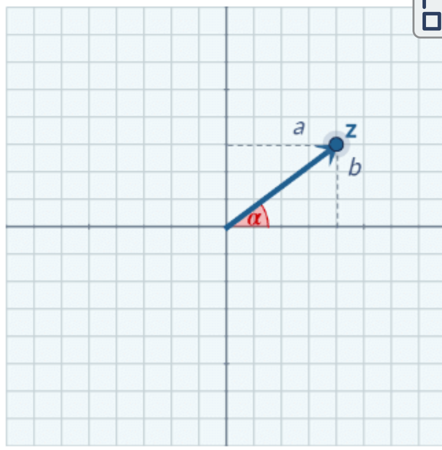


Capítulo II

La forma polar

2.1 Módulo y argumento de un número complejo

Sea el número complejo **z** = 4 3



- El **módulo** de **z** es la distancia del afijo al origen de coordenadas.

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

- El **argumento** es el ángulo que forma el segmento $\overline{OZ}$ con el semieje positivo real medido en sentido contrario a las agujas del reloj entre 0° y 360°.

$$\alpha = \arg(z) = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{3}{4} = 36{,}9°$$

Se puede expresar el número complejo **z** mediante su módulo y su argumento en **forma polar**:

$$r_\alpha = 5_{36{,}9°}$$

Observa que: $a = r \cdot \cos\alpha$ y $b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$, así se puede expresar **z** en forma **trigonométrica**, a la vez que sirve para pasar de la forma polar a la forma binómica.

$$z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) = 5(\cos 36{,}9° + i \operatorname{sen} 36{,}9°)$$

Ejercicio 7

a) Pasa a forma binómica: $7_{45°} =$ ___ + ___

Introduce los valores con su signo redondeados a centésimas

comprobar

b) El conjugado del número complejo $2_{75°}$ *es:* ___ ___ °

comprobar

2.2 Producto y cociente de complejos en forma polar

La relación entre la forma polar de dos números complejos y la de su producto y cociente, nos permite multiplicar y dividir de forma muy sencilla.

Si expresamos los complejos en forma trigonométrica y operamos:

$$r_\alpha = r(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \qquad r'_\beta = r'(cos\ \beta + isen\ \beta)$$

El **producto**:

$$\begin{gathered} r(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \cdot r'(cos\ \beta + isen\ \beta) = \\ r \cdot r' \cdot [(cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta) + (cos\ \alpha \cdot sen\ \beta + sen\ \alpha \cdot cos\ \beta)i] = \\ r \cdot r' \cdot (cos(\alpha + \beta) + isen(\alpha + \beta)) \end{gathered}$$

Observamos que el módulo del número complejo resultante es el producto de los módulos de los factores y el argumento **la suma de los argumentos**.

El **cociente**:

$$\begin{gathered} \frac{r(cos\ \alpha + isen\ \alpha)}{r'(cos\ \beta + isen\ \beta)} = \frac{r}{r'} \cdot \frac{(cos\ \alpha + isen\ \alpha) \cdot (cos\ \beta - isen\ \beta)}{(cos\ \beta + isen\ \beta) \cdot (cos\ \beta - isen\ \beta)} = \\ \frac{r}{r'} \cdot \frac{(cos\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \alpha \cdot cos\ \beta) + (sen\ \alpha \cdot cos\ \beta - cos\ \alpha \cdot sen\ \beta)i}{cos^2\ \alpha + sen^2\ \beta} = \\ \frac{r}{r'} \cdot (cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta)) \end{gathered}$$

Y el resultado del cociente es un número complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento **la diferencia de los argumentos**.

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha+\beta}$$

Sean los números complejos $z = r_\alpha$ y $z' = r'_\beta$

$z =$ 5 120 º $z' =$ 2 90 º

- **Producto** dibujar

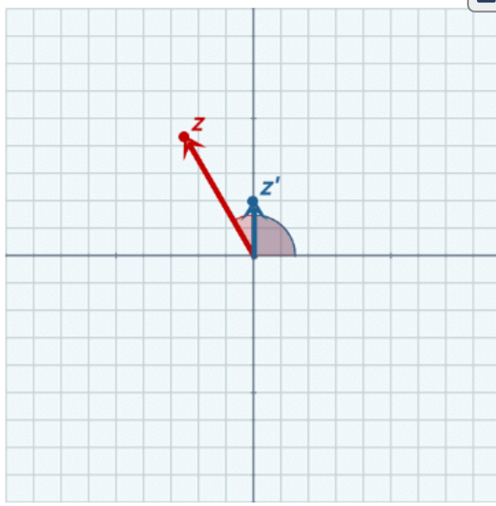
  Para multiplicar dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

  $z \cdot z' = 5_{120^\circ} \cdot 2_{90^\circ} = 10_{210^\circ}$

- **Cociente** dibujar

  Para dividir dos números complejos en forma polar se dividen los módulos y se restan los argumentos.

  $\frac{z}{z'} = \frac{5_{120^\circ}}{2_{90^\circ}} = 2{,}5_{30^\circ}$



Ejercicio 8

a) Dado el número complejo $z = 5_{55^\circ}$ calcula $z \cdot \bar{z}$ y $z/\bar{z}$

$z \cdot \bar{z} =$ ___ ___ º $z/\bar{z} =$ ___ ___ º

comprobar

b) Averigua dos números complejos tales que su producto sea 75_{205° y su cociente 3_{35°

$z_1 =$ ___ ___ º $z_2 =$ ___ ___ º

comprobar

2.3 Potencias de complejos en forma polar

Para calcular una potencia de exponente natural, **n**, de un número complejo expresado en forma polar, basta elevar el módulo a **n** y multiplicar el argumento por **n**.

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

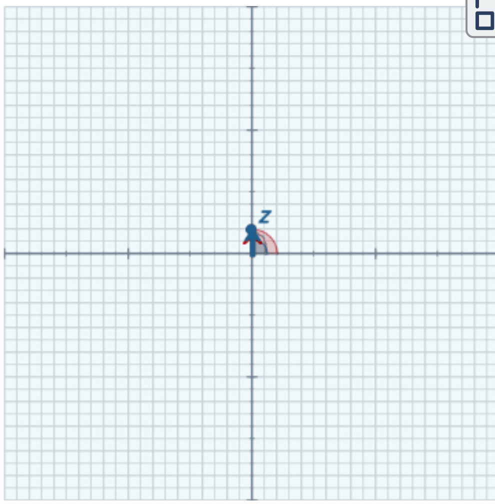
Sea el número complejo: $\mathbf{z = r_\alpha}$ = 2 90 °

n = 1 $(2_{90})^1 = 2^1{}_{1\cdot 90°} = 2_{90°}$

Se puede expresar $\mathbf{z^n}$ en forma trigonométrica:

$$[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha)$$

y haciendo en esta expresión r = 1 obtenemos la **fórmula de Moivre**, útil en trigonometría para calcular **sen nα** y **cos nα** a partir de sen α y cos α.



La fórmula de Moivre

$$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\,\text{sen}\,2\alpha$$

Desarrollando la potencia por el binomio de Newton resulta:

$$(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\, i + \text{sen}^2\alpha\, i^2 =$$
$$= \cos^2\alpha + 2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\, i - \text{sen}^2\alpha$$

Agrupando términos e igualando la parte real y la parte imaginaria tenemos que:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$$
$$\text{sen}\,2\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$$

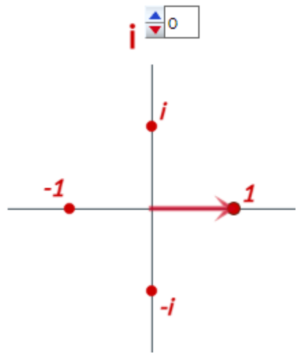
Potencias de i

Un caso particular lo encontramos al calcular las potencias sucesivas de i.
Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, será:

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = -i$
$i^4 = i^3 \cdot i = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^5 \cdot i = -1$	$i^7 = i^6 \cdot i = -i$

y asi sucesivamente, con lo que observamos que se repiten de cuatro en cuatro. Luego para hallar una potencia de i, se divide el exponente entre 4 y se calcula la potencia de exponente el resto de la división.

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = -i$



Ejercicio 9

a) Averigua el valor de **n** y de **a** (a>0) para que $(-a\sqrt{3} + ai)^n = 1296_{240°}$

$n =$ ☐ $a =$ ☐

comprobar

b) Selecciona el valor de la potencia de i.

$i^{100} =$ ☐

comprobar

2.4 Raíces de números complejos

Sea el número complejo: $\mathbf{z} = \mathbf{r}_\alpha = 8_{90}{}^\circ$

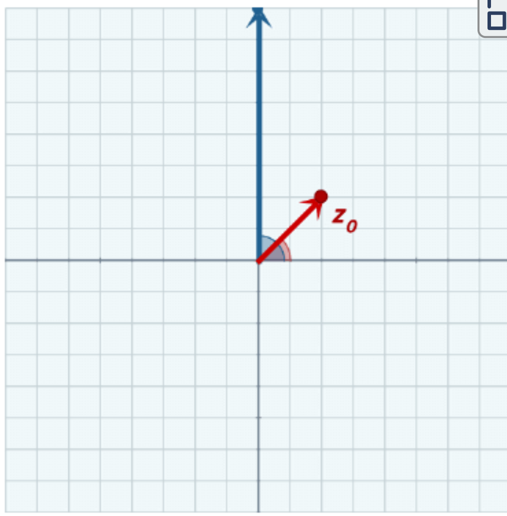
- La raíz **n**-ésima de **z** es otro complejo $\mathbf{m}_\beta$ que debe cumplir: $(\mathbf{m}_\beta)^n = \mathbf{r}_\alpha$

  luego: $\mathbf{m}^n = \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m} = \sqrt[n]{\mathbf{r}}$

  y $\beta \cdot n = \alpha + k \cdot 360^\circ \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{360^\circ \cdot k}{n}$

$n = 2$ $\quad z_k = \sqrt{8_{90^\circ}} = 2{,}8_{45^\circ + \frac{360^\circ}{2}k}$

$z_0 = 2{,}8_{45^\circ}$ $\quad k = 0$



Observa que:

> Todo número complejo tiene n raíces n-ésimas. Los afijos de estas n raíces están situados sobre una circunferencia y son los vértices de un polígono regular de n lados.

Ejercicio 10

Calcula: $\sqrt{\dfrac{1+i}{-1-i}}$ *(Sugerencia: Primero se debe pasar el radicando a forma polar)*

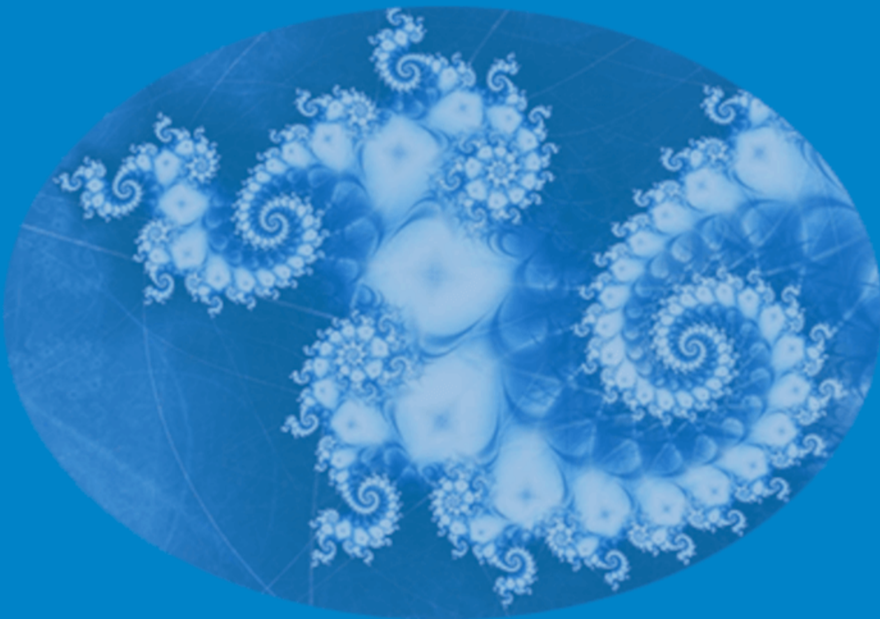
$z_0 = \square_{\square}{}^\circ \quad z_1 = \square_{\square}{}^\circ$

comprobar

2.5 Ejercicios para practicar

A continuación se presentan más ejercicios[4] para practicar las operaciones con complejos. Puedes elegir el tipo en el menú. De todos ellos se ofrece la solución.

[4] Adaptación de una escena de Consolación Ruiz Gil para [Red Educativa Digital Descartes](#).



Capítulo III

Algunas aplicaciones

3.1 Operaciones con complejos y transformaciones geométricas

Traslación

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

A (-4, -2) B (2, -5) C (-1, 1)

Si sumamos a los tres vértices el número complejo:

z = 3 + 5 i

¿Qué le ocurre al triángulo?. Compruébalo:

A → (-4 - 2i) + (3 + 5i) ☐ + ☐ i

B → (2 - 5i) + (3 + 5i) ☐ + ☐ i

C → (-1 + i) + (3 + 5i) ☐ + ☐ i

Efectúa las operaciones y pulsa Intro

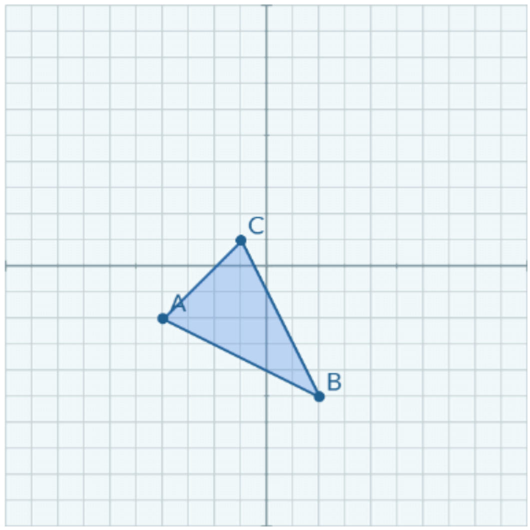


Figura 3.1. Detalle de la obra de M. C. Escher "Bird/Fish", tomada de wikiart.org.

Giro de centro el origen

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

A (0,0)   B (0,0)   C (0,0)

Si se multiplican los tres vértices por el número complejo de módulo 1 y argumento 90º. ¿Qué le ocurre al triángulo?.

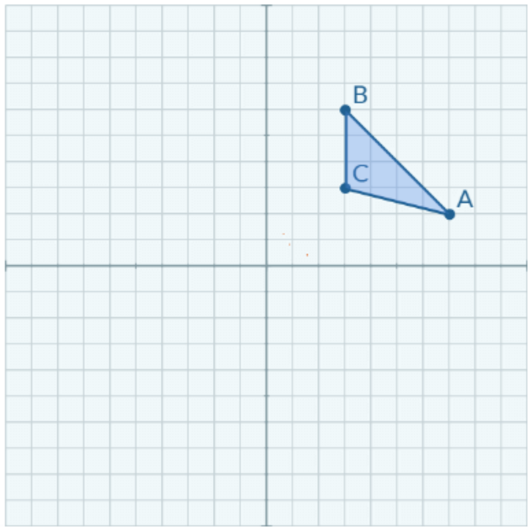
1 90 °

Expresamos primero los vértices en forma polar:

A: $7+2i = \sqrt{53}\ {}_{15,9^\circ} \to 7,3_{15,9^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 7,3$

B: $3+6i = \sqrt{45}\ {}_{63,4^\circ} \to 6,7_{63,4^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 6,7$

C: $3+3i = \sqrt{18}\ {}_{45^\circ} \to 4,2_{45^\circ} \cdot 1_{90^\circ} = 4,2$



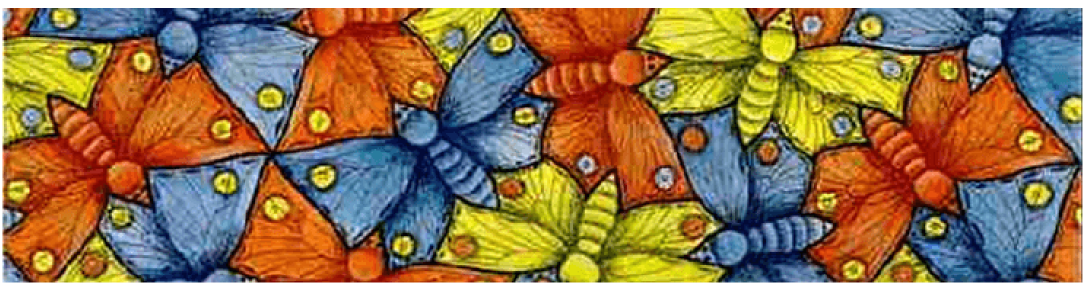


Figura 3.2. Detalle de la obra de M. C. Escher "Butterfly", tomada de wikiart.org.

Homotecia y giro

Considera el triángulo de la figura situado en el plano complejo de vértices:

A (0, -4) **B (4, -3)** **C (1, -1)**

Si multiplicamos los tres vértices por el número complejo $\mathbf{r}_\alpha$:

$\mathbf{r}_\alpha = 2_{60}$ °

¿Qué le ocurre al triángulo?. Compruébalo:

A: $0 - 4i = \sqrt{16}_{\ 270^\circ} \rightarrow 4_{270^\circ} \cdot 2_{60^\circ} =$

B: $4 - 3i = \sqrt{25}_{\ 323{,}1^\circ} \rightarrow 5_{323{,}1^\circ} \cdot 2_{60^\circ} =$

C: $1 - i = \sqrt{2}_{\ 315^\circ} \rightarrow 1{,}4_{315^\circ} \cdot 2_{60^\circ} =$

Utiliza para las operaciones los valores redondeados a décimas que aparecen

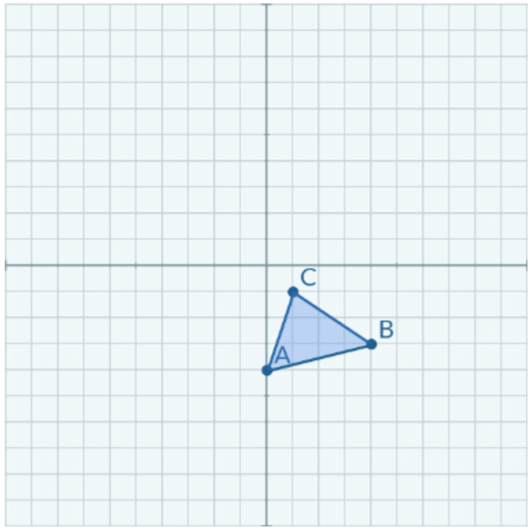
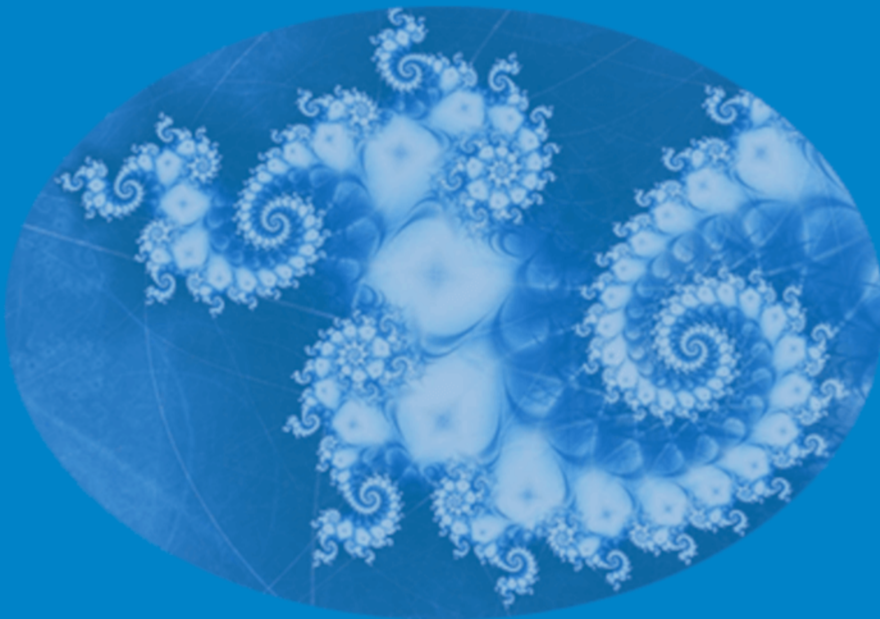


Figura 3.3. Detalle de la obra de M. C. Escher "Smaller and smaller", tomada de wikiart.org.



Autoevaluación

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA PASCUAL BRAVO

Autoevaluación

DESCARTES
matemáticas interactivas