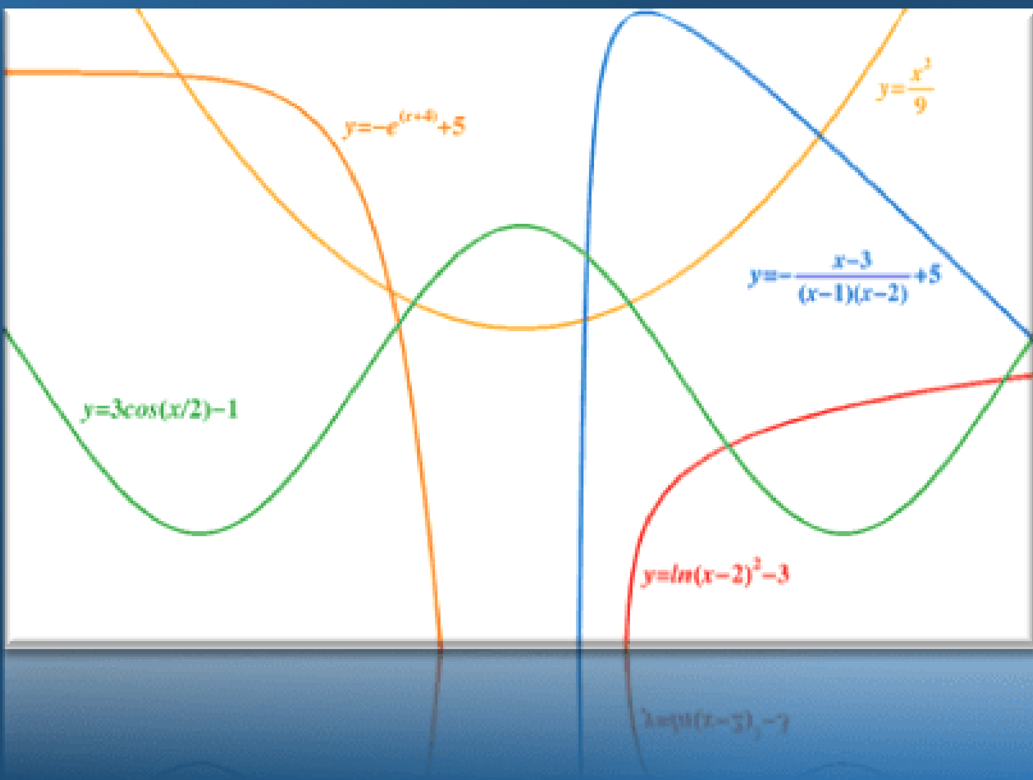
Funciones

Libro Interactivo



Norma Patricia Apodaca Alvarez

FUNCIONES

LIBRO INTERACTIVO

NORMA PATRICIA APODACA ALVAREZ
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Fondo Editorial RED Descartes

Córdoba (España)
2022

Título de la obra:
Funciones

Autora:
Norma Patricia Apodaca Alvarez

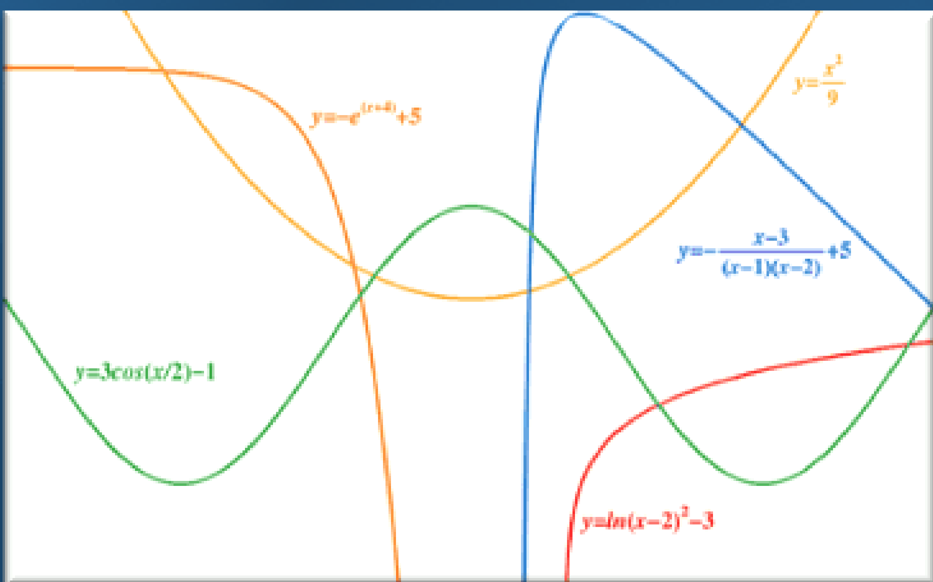
Código JavaScript para el libro: Joel Espinosa Longi, IMATE, UNAM.
Recursos interactivos: DescartesJS
Fuentes: SourceSansPro, SourceSerifPro y UbuntuMono
Núcleo del libro interactivo: septiembre 2023

Red Educativa Digital Descartes
Córdoba (España)
descartes@proyectodescartes.org
https://proyectodescartes.org

Proyecto iCartesiLibri
https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/index.htm
https://prometeo.matem.unam.mx/recursos/VariosNiveles/iCartesiLibri/

ISBN: 978-84-18834-56-1

Tabla de contenido



Prefacio **11**

1. Introducción **17**

1.1 La palabra función 19

1.2 La palabra matemáticas 20

1.3 Definición de Matemáticas 22

1.4 Evolución de las Matemáticas 23

2. Conjuntos **27**

2.1 La palabra conjunto 29

2.2 Definición 30

2.3 Notación y descripción 32

2.4 Representación gráfica 33

2.5 Relaciones básicas 36

2.6 Conjuntos universal y vacío 38

2.7 Álgebra de conjuntos 39

2.7.1 Unión 40

2.7.2 Intersección 40

2.7.3 Diferencia 42

2.7.4 Diferencia simétrica 42

2.7.5 Complemento 43

2.7.6 Producto cartesiano 44

2.8 Definición conjuntista de función 45

3. Números reales **49**
3.1 Concepto de número 51
3.2 Origen 52
3.3 Definición 53
3.4 Clasificación 54
3.5 Propiedades algebraicas 56
3.5.1 De la suma 56
3.5.2 De la multiplicación 56
3.5.3 De la suma y la multiplicación 57

4. Concepto de función **59**
4.1 Evolución del concepto 61
4.1.1 Edad Antigua 62
4.1.2 Edad Media 65
4.1.3 Edad Moderna 67
4.1.4 Edad Contemporánea 70
4.2 Regla de correspondencia 76
4.3 Notación 77
4.4 Representación 78
4.4.1 Descripción verbal 80
4.4.2 Diagrama 80
4.4.3 Expresión analítica 80
4.4.4 Tabla de valores 81

5. Función de una variable real 83
5.1 Definición 85
5.2 Criterio de la recta vertical 86
5.3 Propiedades de una función de una variable real 88
5.3.1 Acotación 88
5.3.2 Concavidad y convexidad 90
5.3.3 Continuidad 92
5.3.4 Funciones par e impar 94
5.3.5 Monotonía 96
5.3.6 Periodicidad 98
5.3.7 Simetría 100
5.4 Clasificación 102

6. Funciones polinomiales 105
6.1 Definición 107
6.2 Función polinomial de grado cero 108
6.3 Función polinomial de grado uno 110
6.4 Función polinomial de grado dos 114
6.4.1 Forma general 118
6.4.2 Forma estándar 120
6.5 Función polinomial de grado tres 122
6.6 Función polinomial de grado cuatro 124
6.7 Funciones polinomiales y sus gráficas 126

7. Funciones racionales **129**
7.1 Definición 131
7.2 Casos particulares 132
7.3 Función racional de proporcionalidad inversa 134
7.4 Función racional de proporcionalidad inversa trasladada 136
7.5 Función racional homográfica o racional lineal 138
7.6 Función racionales y sus gráficas 140

8. Funciones exponenciales **143**
8.1 Definición 145
8.2 Número e 146
8.3 Funciones exponenciales y sus propiedades 148
8.4 Funciones exponenciales transformadas 150
8.5 Funciones exponenciales y sus gráficas 152

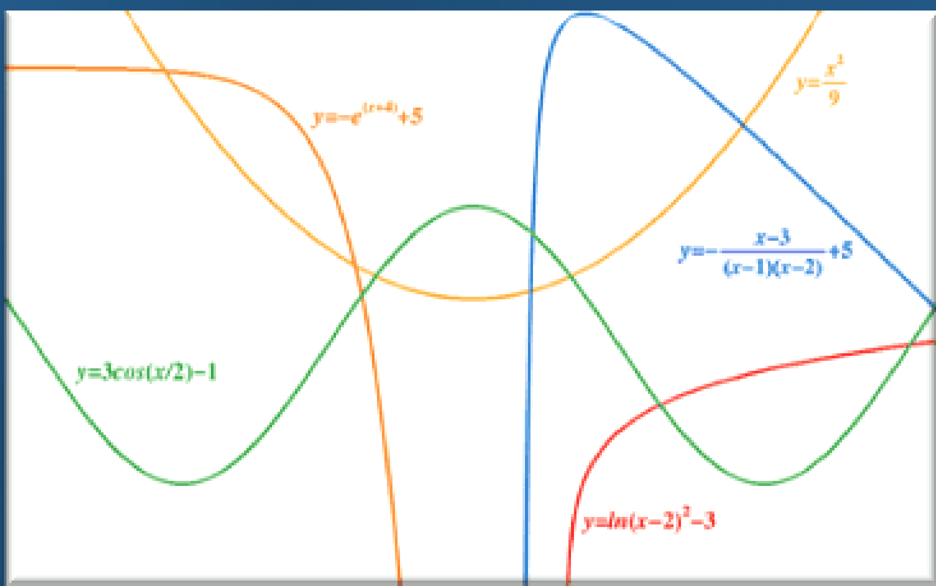
9. Funciones logarítmicas **155**
9.1 Concepto de logaritmo 157
9.2 Definición 158
9.3 Funciones logarítmicas y sus propiedades 160
9.4 Funciones logarítmicas transformadas 162
9.5 Funciones logarítmicas y sus gráficas 164

10. Funciones trigonométricas **167**
10.1 Definición 169
10.2 Clasificación 169
10.3 Función seno 172
10.4 Función coseno 174
10.5 Función tangente 176
10.6 Función cotangente 178
10.7 Función secante 180
10.8 Función cosecante 182
10.9 Funciones trigonométricas y sus parámetros 184
10.10 Funciones trigonométricas y sus gráficas 186

11. Utilización **189**

Fuentes **195**

Prefacio



Un elemento fundamental en *Matemáticas* lo constituyen las *funciones*, concepto en el que se ha basado el desarrollo de otras áreas de este campo del conocimiento, entre las cuales se puede mencionar el *Análisis Matemático*.

El objetivo de este libro es introducir el tema, de manera que al terminarlo se tenga una visión general del mismo y de su utilidad.

De inicio, se hace referencia a nociones generales sobre *funciones* y *matemáticas*.

Dada la relación existente entre los conceptos de *función* y *conjunto*, se incorporan las nociones básicas sobre conjuntos:

- Definición.
- Notación y descripción.
- Representación gráfica.
- Relaciones básicas.
- Conjuntos especiales (universal y vacío).
- Álgebra de conjuntos.

Asimismo, se incluye la *definición conjuntista de función*.

Como el *dominio* y el *codominio* de las *funciones de una variable real* están en los *números reales*, se consideró pertinente incluir un capítulo sobre ellos, presentando de manera breve datos sobre:

- El origen de la noción de *número*.
- Su clasificación.
- Sus propiedades.

Ya entrando en el tópico del libro, se expone el concepto de *función*, presentando su:

- Evolución.
- Regla de correspondencia.
- Notación.
- Representación.

A continuación se explica la *función de una variable real*, indicando su clasificación y propiedades:

- Acotación.
- Concavidad y convexidad.
- Continuidad.
- Funciones par e impar.
- Monotonía.
- Periodicidad.
- Simetría.

También se introduce el *criterio de la recta vertical* mediante el cual, de manera visual, se puede verificar si una relación es una *función de variable real* o no.

Enseguida se describen sus diferentes tipos:

- Polinomiales.
- Racionales.

- Exponenciales.
- Logarítmicas.
- Trigonométricas.

Finalmente, se dan algunos ejemplos de sus aplicaciones en la vida cotidiana.

Para una mejor comprensión de las *funciones de una variable real*, a partir del quinto capítulo se incluyen escenas interactivas, creadas con la herramienta de autor DescartesJS, que tienen controles mediante los cuales se pueden manipular las opciones o parámetros pertinentes. Dichos controles se muestran en la parte inferior, en forma de pulsadores.

Estas escenas se pueden desplegar en una ventana aparte, mediante el símbolo que se encuentra en la esquina superior derecha.

Asimismo, cabe indicar que las imágenes pueden ampliarse pulsando sobre las mismas.

Para terminar el libro, en *Fuentes* se incluyen referencias de consulta y del origen de las imágenes empleadas.

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 La palabra *función*

Proveniente del *latín*, generalmente se emplea para hacer referencia a un proceso, cuyos pasos llevan a la consecución de un objetivo determinado.

Este término es usado en varios ámbitos, por ejemplo para indicar:

- Una capacidad de actuar propia de los seres vivos.
- Un proceso cuyos pasos llevan al logro de un objetivo determinado.
- La representación de un espectáculo, ya sea teatral o cinematográfico.
- Un acto solemne, en especial de carácter religioso.
- La conmemoración de un hecho histórico.
- Las actividades asignadas a una institución o entidad.
- Las responsabilidades de una persona, asociadas al puesto de trabajo.
- Una tarea realizada por algún aparato o sistema, por ejemplo el teléfono que sirve para la comunicación y transmisión de información.

Cotidianamente es empleada en varias disciplinas: *Biología*, *Computación*, *Ingeniería*, *Lingüística*, *Matemáticas*, *Música*, *Química*, *Sociología*; con un significado específico para cada una. Así, en *Ingeniería* se refiere a una acción determinada que un sistema puede realizar, en tanto que en *Música*, describe la relación de un acorde a un centro tonal.

Este libro está enfocado a dar respuesta a las preguntas:

- ¿Qué son las *funciones* en *Matemáticas?*
- ¿Para qué sirven?
- ¿En dónde son aplicadas?

1.2 La palabra *matemáticas*

Antes de entrar en materia, convendría plantearse:

¿Qué son las *Matemáticas* o la *Matemática*?

La palabra *matemática* proviene del griego μαθηματικά (*mathēmatiká*), que quiere decir *lo que se aprende*, y que a su vez se origina en el vocablo perteneciente al griego antiguo μάθημα (*máthēma*), que significa *campo de estudio o instrucción.*

MATEMÁTICA	MATEMÁTICAS
➢ Del griego antiguo **máthēma** (μάθημα) *campo de estudio o instrucción*	➢ Del latín **mathematĭca** *conocimiento*
➢ Del griego **mathēmatiká** (μαθηματικά) *lo que se aprende*	➢ Del griego τα μαθηματικά (**ta mathēmatiká**) *todas las cosas matemáticas*

En general, se emplea más en su forma plural, *matemáticas*, que viene del latín *mathematǐca*, basado a su vez en la forma plural del griego, τα μαθηματικά (*ta mathēmatiká*), que se refiere a *todas las cosas matemáticas*.

Este término ya era utilizado en el siglo VI a. C. por los *pitagóricos*, seguidores del *pitagorismo*, movimiento filosófico-religioso fundado por *Pitágoras de Samos*.

Sin embargo, su significado más técnico y reducido de *estudio matemático*, por requerir un esfuerzo de aprendizaje, se dio en la época de *Aristóteles* (siglo IV a. C.).

Es probable que, en la literatura científica moderna, se extendiera el uso de esta palabra a partir del siglo XV, pasando del latín a las lenguas romances.

1.3 Definición de *Matemáticas*

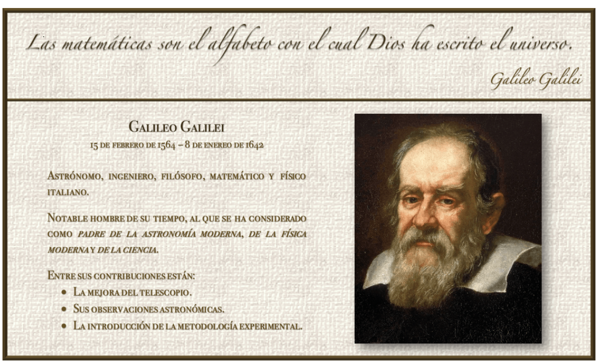
Esta disciplina se define como la *ciencia formal* y *exacta* que, con base en los principios de la *Lógica*, estudia tanto las propiedades como las relaciones existentes entre *entes abstractos*, refiriéndose por tales a números, símbolos y figuras geométricas.

Es *ciencia*, considerando esa palabra en su acepción de *campo de conocimiento*.

Es *formal* ya que sus objetos de estudio son abstractos, no reales.

Es *exacta* porque en sus procesos de razonamiento no hay lugar para la interpretación, la subjetividad o la duda.

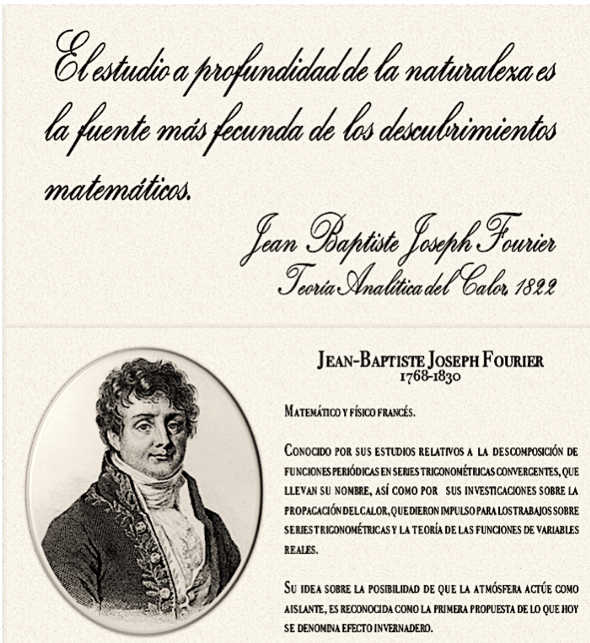
Su método consiste en el análisis de dichos entes abstractos, generando tanto hipótesis como conjeturas, y realizando deducciones rigurosas con el fin de alcanzar el conocimiento matemático.



Tiene tres pares de elementos básicos:

- La lógica y la intuición.
- El análisis y la construcción.
- La generalidad y la particularidad.

Sin embargo, hay quienes consideran que más que una ciencia, con su objeto y su método, debe entenderse como un lenguaje formal, seguro y eficiente que permite comprender la naturaleza.



1.4 Evolución de las *Matemáticas*

La evolución de esta disciplina ha estado basada en contar, calcular y medir, así como en estudiar sistemáticamente la forma y movimiento de los objetos físicos.

Cabe mencionar que hasta antes de los babilonios y los egipcios, alrededor del año 3000 a. C., no se dieron mayores avances en esta área del conocimiento.

En realidad, puede decirse que las *Matemáticas Modernas* comenzaron aproximadamente en el siglo XVII, en los inicios del *Cálculo* con la utilización, aún no del todo precisa, de dos conceptos: *variable* y *función*, que son característicos de ellas.

El hecho de que en una parte considerable de la *Teoría Matemática* se hallen involucradas dos colecciones de objetos relacionados, ha conducido a la noción de *función*, y consecuentemente a la elaborada rama de las matemáticas conocida como *Teoría de Funciones.*

Si bien, desde sus inicios esta disciplina tuvo un enfoque práctico, pues se trataba de resolver cuestiones como la división de un terreno, hoy se tienen dos vertientes: *Matemáticas Puras* y *Matemáticas Aplicadas.*

La primeras se desarrollan desde el punto de vista de la investigación, generando conocimiento nuevo.

En tanto que las segundas se emplean para la solución de problemas del día a día, y se utilizan en varios campos, entre ellos:

- La vida cotidiana con mediciones y comparaciones.
- Las ciencias exactas y naturales.
- Las ciencias sociales.
- Otras disciplinas y artes.

Por ejemplo, el análisis de las redes sociales se basa en la *Teoría de Gráficas*.

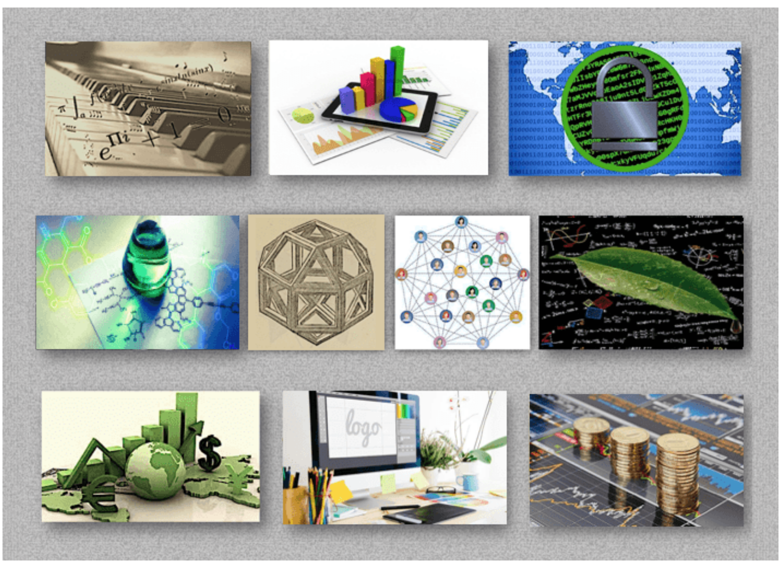
Tanto el *Álgebra Lineal* como la *Probabilidad* son elementos básicos para el algoritmo empleado por los buscadores en Internet.

La *Teoría de Juegos*, la *Probabilidad*, el *Cálculo*, los *Sistemas no Lineales y Caóticos*, se utilizan en *Psicología*.

Para el área financiera son importantes y el *Análisis*, la *Probabilidad* y el *Movimiento Browniano*.

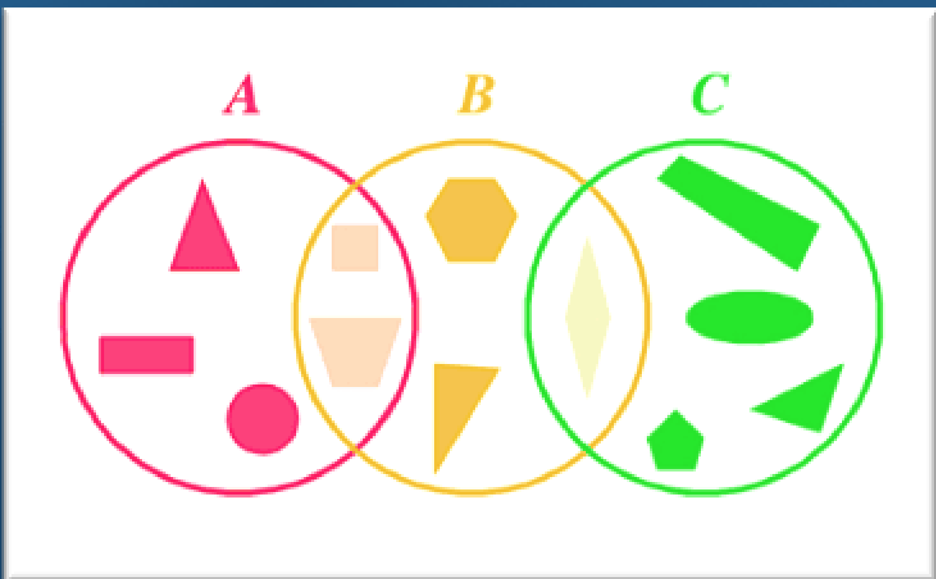
En la *Criptografía* son usadas la *Teoría de los Campos Finitos*, la *Combinatoria*, la *Probabilidad* y la *Teoría de Retículas*.

Así, las *Matemáticas* se hallan presentes en diversas actividades del quehacer humano.



CAPÍTULO 2

Conjuntos



2.1 La palabra *conjunto*

Como se indicó en el *Prefacio*, se incluye este tema, de manera breve, debido a la relación que existe entre las nociones de *conjunto* y *función*. Asimismo, esto permite introducir al final del capítulo la *definición conjuntista de función*.

Por lo que respecta a su etimología, la palabra *conjunto* tiene su origen en el latín *coniunctus*, cuyo significado es estar unido, contiguo o combinado con algo.

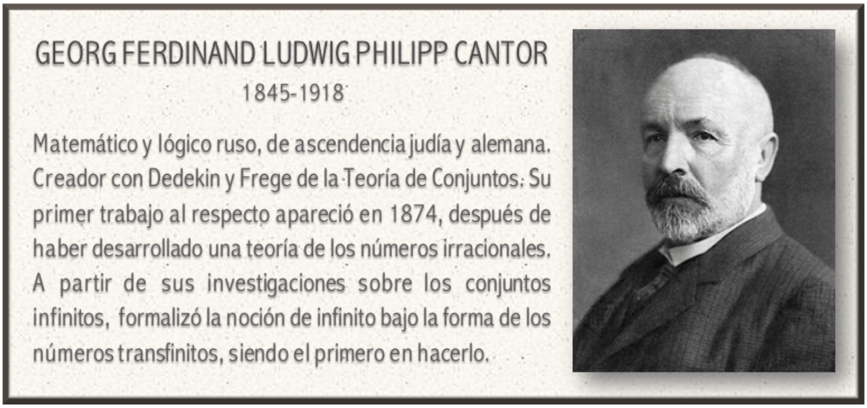
En general, es empleada para designar a una agrupación de cosas o personas que tienen algo en común, como un:

- Grupo de músicos o cantantes.
- Juego de prendas de vestir.
- Grupo de objetos, como cajas o vasos.

Según sea su conformación, un conjunto puede ser: *finito*, *infinito*, *unitario*, *vacío*, *homogéneo*, *heterogéneo*. Entre los conjuntos finitos se encuentra el de los meses del año, y entre los conjuntos infinitos está el de los números.

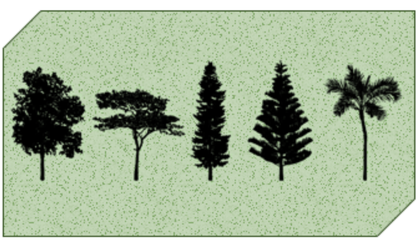
2.2 Definición

De acuerdo a la definición de *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*, un conjunto es: *"una colección en un todo, de determinados y distintos objetos de nuestra percepción o nuestro pensamiento, llamados los elementos del conjunto".*

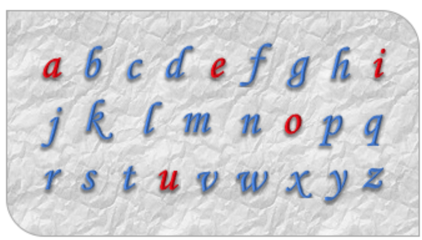


Dichos elementos tienen características similares, carácter individual y son únicos. Pueden ser concretos o abstractos. Entre los primeros se tienen personas, animales, muebles. En tanto, que entre los segundos están números, letras, colores, figuras.

CONJUNTOS



CONJUNTO DE ÁRBOLES

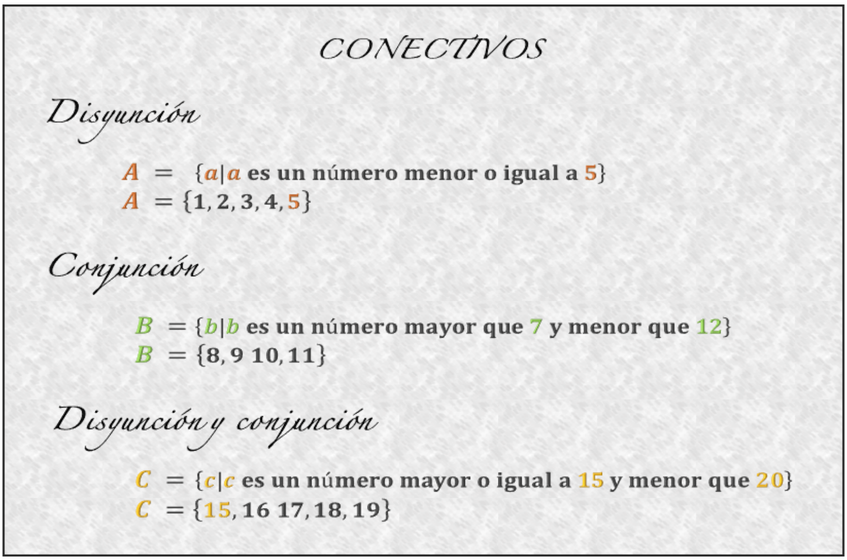


CONJUNTO DE LAS LETRAS DEL ALFABETO

En caso de que los elementos deban satisfacer más de una condición, se utilizan los conectivos disyunción (letra o) y conjunción (letra y).

Un ejemplo es el conjunto de *libros* escritos en *español* o en *inglés*, cuyos elementos deben cumplir las dos condiciones:

1. Pertenecer al conjunto de libros.
2. Que el idioma sea español o inglés.

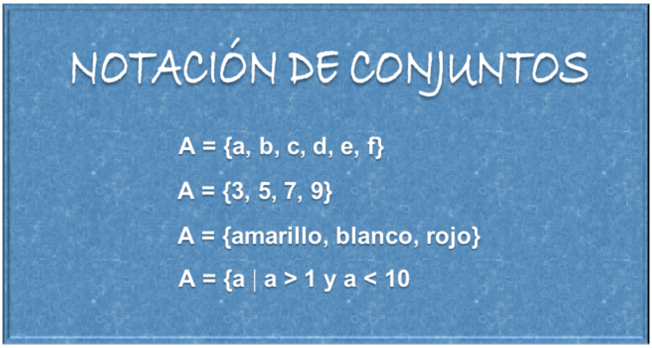


Se conoce como *subconjunto* a aquel conjunto que se halla incluido dentro de otro más amplio. Así, si el conjunto B está contenido en el conjunto A, entonces B es un subconjunto de A.

Considerando que A sea el conjunto de las letras del alfabeto y B sea el conjunto de las vocales, se tiene que B es subconjunto de A.

2.3 Notación y descripción

Para denotar un *conjunto* se usan por lo general letras mayúsculas, en tanto que sus elementos pueden ser representados por letras minúsculas, dígitos, nombre o característica, escritos entre los símbolos $\{\}$ y separados por comas, como se muestra en la imagen a continuación.



Se tienen dos maneras para describir un conjunto: por extensión y por comprensión, como se ilustra en la siguiente imagen.

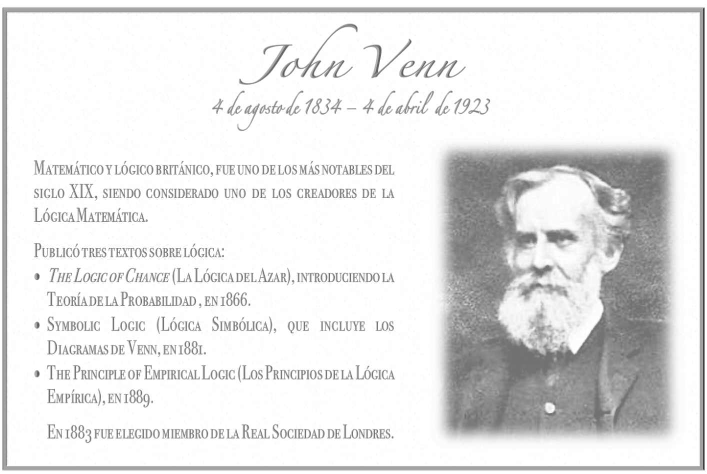
En el primer caso, se escriben uno a uno todos los elementos del conjunto. Si el conjunto tiene muchos elementos, pueden utilizarse puntos suspensivos, como en el caso del conjunto B.

En el segundo, sólo se menciona una característica común a todos sus elementos, como se indica en el conjunto D, y que se lee: “el conjunto D está formado por elementos d tales que d es un libro”, o bien como en el conjunto E donde se indica que sus elementos son aquéllos en los que la condición $G(e)$ es verdadera.

2.4 Representación gráfica

Para representar de forma gráfica a los conjuntos se utilizan los *Diagramas de Venn*, en los que se muestran los elementos del conjunto dentro de una línea cerrada.

Llevan el nombre de su creador *John Venn*, matemático y lógico británico, quien en julio de 1880, los presentó en la revista *Philosophical Magazine and Journal of Science*, bajo el título de *On the Diagrammatic and Mechanical Representation of Propositions and Reasonings* (De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos). Trabajo de gran repercusión en el campo de la *Lógica Formal*.



Estos diagramas permiten una comprobación de la validez o invalidez de un silogismo.

Al paso del tiempo, y con el surgimiento de la Teoría de Conjuntos, se les consideró adecuados para visualizar, tanto los conjuntos como sus operaciones básicas.

Así, se tienen dos tipos de diagramas de Venn:

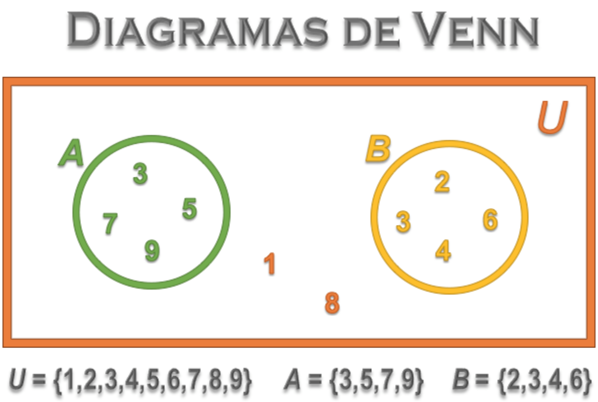
- Los que muestran elementos reunidos por líneas cerradas.
- Los que simplemente indican enunciados o conceptos.

En general, el universo de que se trate se representa mediante un rectángulo, y para los conjuntos se utilizan círculos u óvalos.

En el primer tipo, los elementos se colocan dentro de la forma del conjunto si pertenecen a él, de no ser así se ponen fuera, como se puede apreciar en la imagen superior derecha.

Permiten identificar de manera visual:

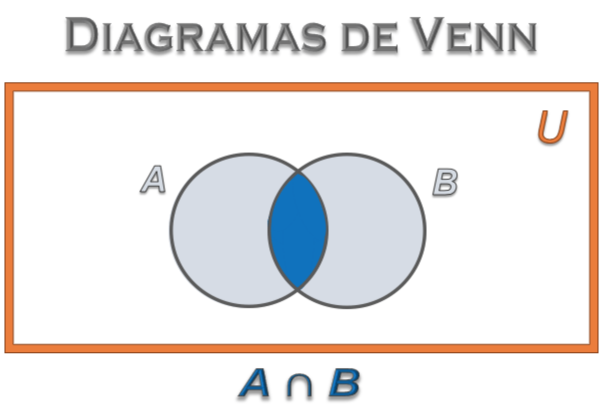
- Los diferentes conjuntos que haya dentro de un universo dado (U).
- El conjunto al que pertenece cada uno de los elementos, si se muestra más de uno (A, B).
- Los elementos que estén incluidos en dos o más conjuntos.
- Los elementos que siendo parte del universo en cuestión, no forman parte de algún conjunto.



Los del segundo tipo, se emplean para visualizar las operaciones entre conjuntos, y suelen utilizarse colores.

En el caso de que se trate de dos conjuntos, se tiene el código de dos colores, que en un sistema binario puede asociarse al primer color el valor 0 y al segundo el valor 1, con lo que los resultados de las operaciones pueden digitalizarse.

Como ejemplo, en la imagen a continuación se muestra la intersección de los conjuntos A y B.



2.5 Relaciones básicas

Se consideran tres relaciones básicas entre conjuntos: *pertenencia*, *igualdad* e *inclusión,* esquematizadas en la imagen de la derecha para los conjuntos A, B y C mostrados en ella.

La *pertenencia* de un objeto a un conjunto dado, siempre está bien definida por medio de alguna propiedad que todos sus elementos poseen.

Para indicar que un objeto a pertenece al conjunto A, la notación utilizada es $a \in A$.

En tanto que para señalar que no pertenece a él, se emplea $a \notin A$.

La *igualdad* entre conjuntos se da si y sólo si están formados por los mismos elementos. También se le conoce como *principio de extensionalidad*, y establece que un conjunto es definido sólo por sus elementos.

Se escribe como $A = B$. Para indicar que ambos conjuntos son diferentes se emplea $A \neq B$.

La *inclusión* dice que si un conjunto A es igual al conjunto B o es una subcolección de éste, sus elementos son un subconjunto de B, y se denota como $A \subseteq B$.

En caso contrario: $A \nsubseteq B$. Si se considera un tercer conjunto C del cual B es un subconjunto, entonces A es también un subconjunto de C.

Relaciones Básicas

$a =$ azul
$b =$ gris

$A =$ {amarillo, azul, rojo}
$B =$ {amarillo, azul, gris, naranja, rojo}
$C =$ {amarillo, azul, blanco, gris, naranja, rojo, verde}

Pertenencia

$$a \in A$$
$$b \notin A$$

Igualdad

$$A \neq B$$

Inclusión

$$A \subseteq B$$
$$B \subseteq C$$
$$A \subseteq C$$

2.6 Conjuntos universal y vacío

Existen dos conjuntos de mención especial: el *conjunto universal* y el *conjunto vacío*. El primero, como su nombre lo indica, consta de todos los elementos de estudio en el contexto de que se trate. Como ejemplos de conjunto universal se pueden citar:

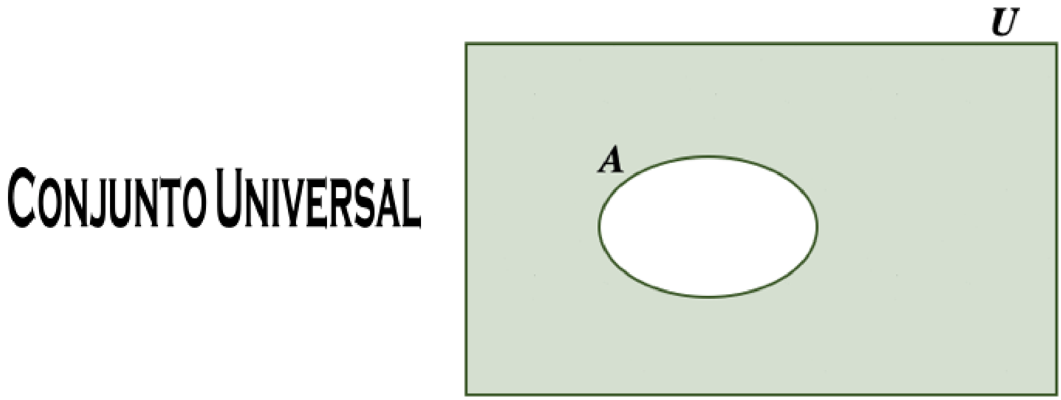
- La población de un país.
- La tabla periódica de los elementos químicos.
- Los nombres que empiecen con la letra E.

Así, se establece una clara distinción entre sus elementos y los conjuntos formados por dichos elementos, que son subconjuntos del conjunto universal. Se denota por la letra U, y tiene las siguientes propiedades:

- Todo conjunto A es subconjunto de U, $A \subseteq U$.
- La unión de un conjunto A con el conjunto universal U es igual a U.
- La intersección de un conjunto A con el conjunto universal resulta en el mismo conjunto A.

El segundo, es único y no tiene elementos. Su símbolo es la letra $\emptyset$. Sus propiedades son:

- El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo.
- El número de elementos o cardinal del conjunto vacío es cero.
- En particular, el conjunto vacío es un conjunto finito.



2.7 Álgebra de conjuntos

Al estudio de las operaciones básicas que pueden realizarse con conjuntos, se le conoce como *Álgebra de Conjuntos*. Estas operaciones son:

- Unión.
- Intersección.
- Diferencia.
- Diferencia simétrica.
- Complemento.
- Producto cartesiano.

Las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento, tienen similaridad tanto con el *Álgebra de Boole*, como con los conectores lógicos de la *Lógica Proposicional.*

Además, la unión y la intersección son conmutativas y asociativas.

2.7.1 Unión

La unión de dos conjuntos A y B, resulta en un tercer conjunto C que contiene todos los elementos de ambos conjuntos.

En el caso de que haya un elemento repetido, forma parte de la unión sólo una vez.

Así, un elemento x pertenece al conjunto C, si y sólo si pertenece al conjunto A o al conjunto B.

Para representarla se utiliza el símbolo $\cup$, denominado copa:

$$C = A \cup B.$$

Esta operación puede realizarse sobre dos o más conjuntos.

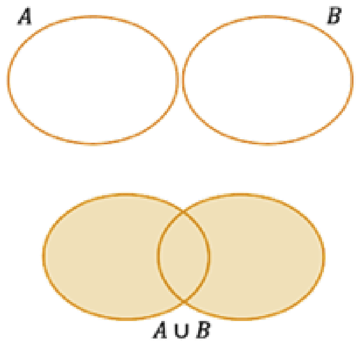
Si se trata de tres conjuntos A, B, y C, cuya unión es el conjunto D, un elemento x pertenece al conjunto D, si y sólo si pertenece al conjunto A o al conjunto B o al conjunto C.

2.7.2 Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B , es el conjunto cuyos elementos son comunes a A y a B.

Se denota como $A \cap B$.

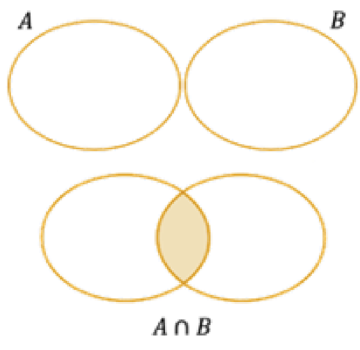
UNIÓN



$$\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} \qquad \boldsymbol{B} = \{1, 2, 4, 6, 8\}$$

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

INTERSECCIÓN



$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{1, 2\}$$

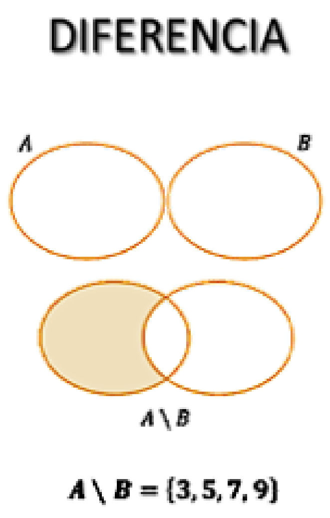
2.7.3 Diferencia

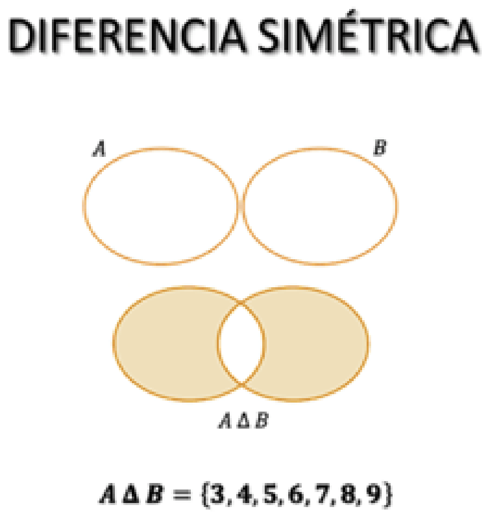
La diferencia entre dos conjuntos A y B, es el conjunto que contiene aquellos elementos de A que no pertenecen a B.

Su representación es: $A \backslash B$.

2.7.4 Diferencia simétrica

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por los elementos de A y B que no son comunes.



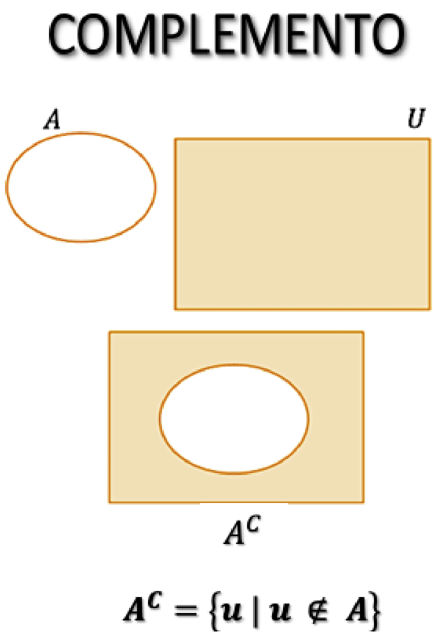


2.7.5 Complemento

El complemento de un conjunto A , es el conjunto de todos los elementos que no pertenecen a A, y se representa como: A^C.

Por ejemplo, si se considera al conjunto U formado por las letras del alfabeto, y al conjunto A conteniendo las vocales, A^C sería el conjunto constituido por las consonantes.

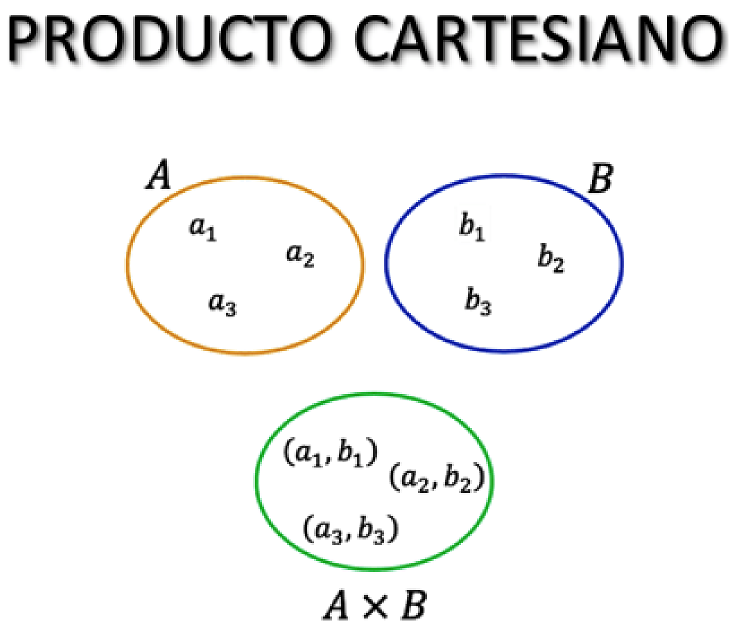
El *conjunto vacío* es el complemento del *conjunto universal* y viceversa.



2.7.6 Producto cartesiano

El resultado del producto cartesiano de dos conjuntos A y B, es el conjunto formado por todos los pares ordenados (a, b), cuyo primer elemento pertenece al conjunto A y el segundo al conjunto B, como puede apreciarse en la imagen inferior.

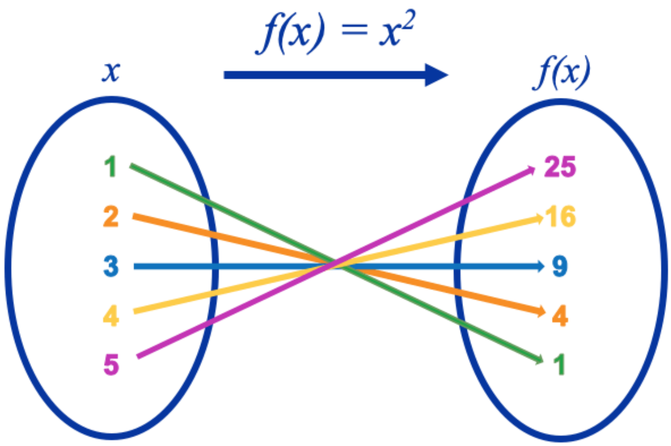
Se denota como $A \times B$.



2.8 Definición conjuntista de *función*

En el sentido matemático, una *función* es una correspondencia entre dos conjuntos A y B, de manera que a cada elemento de A le corresponda un único elemento de B, con la restricción de que B sea diferente del *conjunto vacío*.

En la imagen siguiente se presenta un ejemplo que ilustra esta correspondencia biunívoca.



El conjunto A se refiere a la variable independiente y se le denomina *dominio* de la función. Ésta es la parte esencial que determina la función. Como puede verse en el ejemplo anterior, x es la variable independiente.

En tanto que el conjunto B representa a la variable dependiente, como su nombre lo indica, su valor depende de la variable independiente, y se le llama *codominio* de la función $f(x)$.

En caso de que el *dominio* de una *función* no se especifique, se asume que éste incluye a todos los *números reales* para los que dicha *función* tenga sentido.

Así, considerando que si la *función* es:

a) *Polinómica*, entonces su *dominio* está compuesto por el conjunto de todos los *números reales*.

b) *Racional*, el *dominio* lo constituye el conjunto de todos los *números reales* para los que el denominador sea diferente de cero.

c) *Radical* de índice par, su *dominio* está conformado por el conjunto de todos los *números reales* para los cuales la cantidad subradical sea mayor o igual a cero.

En lo que respecta a la variable dependiente en la salida, hay que distinguir entre:

a) *Codominio*, formado por el conjunto de valores que podrían salir.

b) *Rango*, que es el conjunto de valores que efectivamente salen.

De lo anterior se desprende que el *rango* es un subconjunto del *codominio*.

El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales.

Felix Hausdorff

FELIX HAUSDORFF

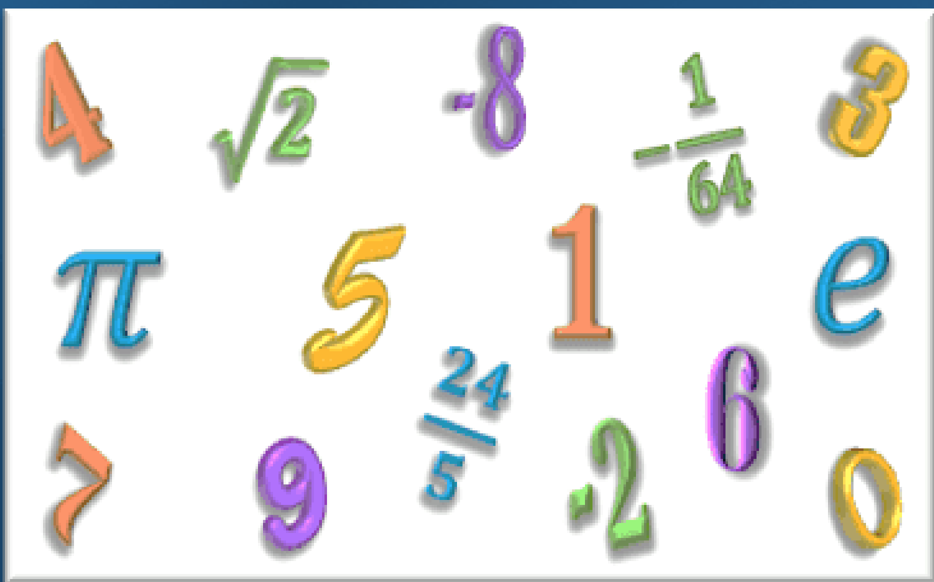
8 DE NOVIEMBRE DE 1868 – 26 DE ENERO DE 1942

MATEMÁTICO ALEMÁN, CONSIDERADO COMO UNO DE LOS FUNDADORES DE LA *TOPOLOGÍA MODERNA*.

SUS INVESTIGACIONES CONTRIBUYERON DE MANERA SIGNIFICATIVA A LAS TEORÍAS DE *CONJUNTOS*, *DESCRIPTIVA DE CONJUNTOS* Y *FUNCIONES*, ASÍ COMO AL *ANÁLISIS FUNCIONAL*.

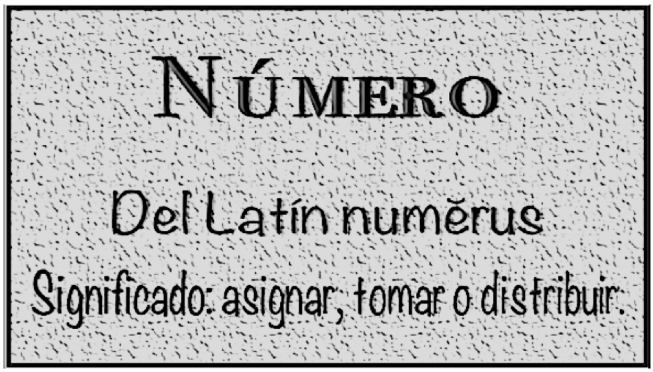
CAPÍTULO 3

Números reales



3.1 Concepto de *número*

La palabra *número*, de origen latino, significa asignar, tomar o ditribuir.



En *Matemáticas* indica una cantidad en relación con su unidad, y representa por lo general:

- Una cantidad métrica.
- Un elemento de un sistema numérico.
- Un número que denota la posición de un elemento en una sucesión ordenada, denominado *número ordinal.*

El desarrollo de este concepto se dio de manera lenta a lo largo del tiempo, conforme a la evolución de la mente humana en su proceso de abstracción natural.

Es una noción que existe desde tiempos remotos. Inició con la necesidad de contar del hombre primitivo, acción que se formalizó mediante sistemas de numeración en las civilizaciones de la *Antigüedad.* Se considera que algunos de ellos existieron antes del surgimiento de la escritura.

Ya en dichas culturas, tenían forma de medir tanto longitudes como áreas comparándolas con una unidad, lo que dio lugar a la noción intuitiva de número fraccionario.

A través de los siglos, el concepto de número tuvo varias adecuaciones en las diferentes culturas, llegando al que ahora tenemos: una abstracción que representa una cantidad, una magnitud.

3.2 Origen

El origen de los números reales se remonta al uso de fracciones comunes en la civilización egipcia, alrededor del año 1000 a.C.

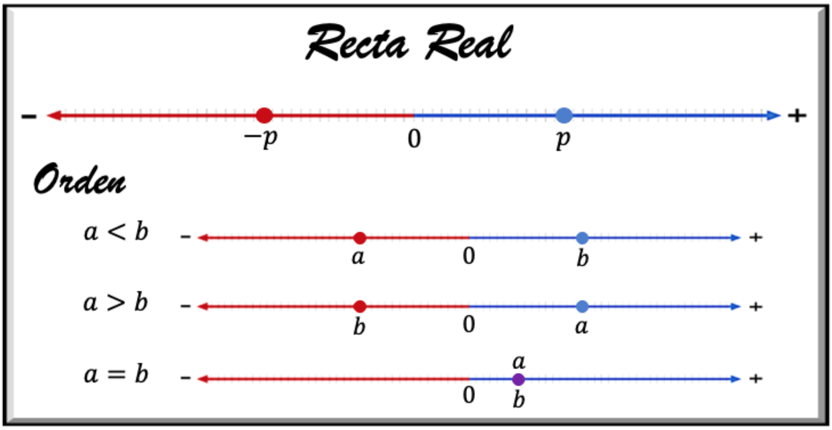
Posteriormente, se dio un avance en el concepto con los aportes de los griegos, en particular con el surgimiento de la existencia de los números irracionales.

En los siglos XVI y XVII con el desarrollo del *Cálculo*, se hizo evidente la necesidad de tener una definición formal y rigurosa del concepto de número real.

Finalmente hacia principios del siglo XIX, se da la definición actual.

3.3 Definición

Los denominados números reales son aquellos que corresponden a un punto en la recta real, como puede observarse en la siguiente imagen.



Se sitúan en ella de tal manera, que en cada tramo hay una cantidad infinita de ellos. Pueden expresarse con decimales infinitos o finitos, periódicos o no periódicos.

Forman un conjunto que se denota por la letra $\mathbb{R}$, y se encuentra entre los extremos infinitos, lo que se expresa como:

$$\mathbb{R} \in (-\infty, \infty).$$

Así, éste es un conjunto infinito y continuo.

Sus elementos cumplen con una condición que garantiza una correspondencia biunívoca, esto es uno a uno, entre ellos y los del conjunto de puntos en la recta o eje. Dicha condición es conocida como *axioma de completitud.*

3.4 Clasificación

Su clasificación parte de los denominados *números complejos* denotados por la letra $\mathbb{C}$, y que se dividen en *reales* ($\mathbb{R}$) e *imaginarios* ($\mathbb{I}$ o $i\mathbb{R}$).

A su vez, los *reales* se subdividen en *racionales* e *irracionales*.

Los *racionales* forman el conjunto al pertenecen todos los números que pueden formularse como el cociente de dos números enteros:

$$\frac{a}{b}$$

donde:

a es el numerador.

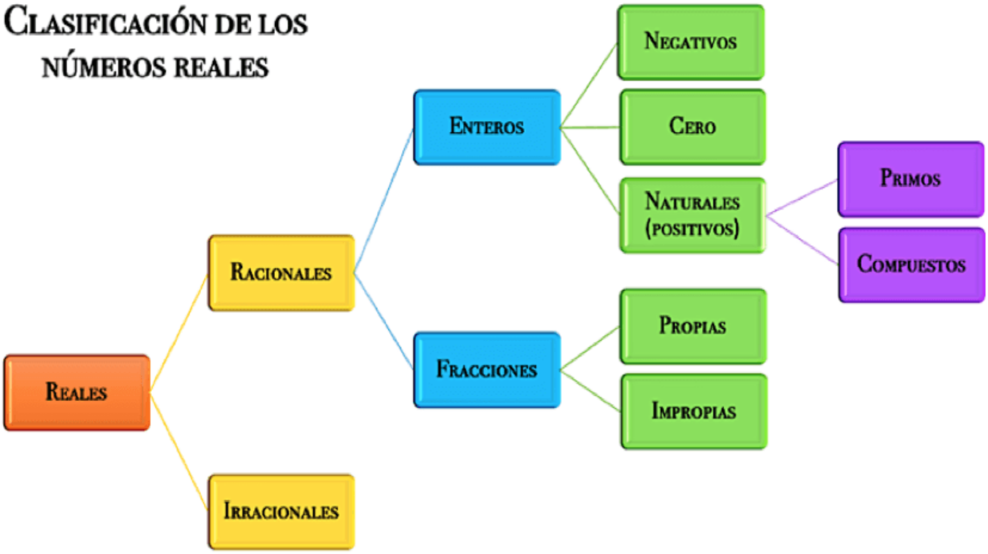
b es el denominador distinto de cero.

Dado que este conjunto de números se refiere al cociente, es representado por la letra $\mathbb{Q}$ (***Q****uotient*).

Comprende a los *enteros* ($\mathbb{Z}$) y a los *fraccionarios*. El primer grupo lo forman los números *naturales* (uno, primos y compuestos), el *cero* y los *enteros negativos*. El segundo se subdivide en *fracciones propias* e *impropias*.

Un número *racional* admite una expansión finita o periódica.

Los *irracionales* corresponden valores que no pueden representarse como un número *racional*. Su expresión decimal no es exacta ni periódica. Se trata de un decimal infinito y aperiódico, por ello no se pueden expresar como la razón de dos números enteros.



Los *números reales* también se subdividen en *algebraicos* y *trascendentes*. Los primeros pueden ser *racionales* o *irracionales*, en tanto que los segundos sólo comprenden a los *irracionales*.

Como ejemplos de los *trascendentes* se pueden citar los números π, e y ϕ (áureo).

$$\pi = 3.14159265358979323846 2\ldots$$

$$e = 2.71828182845904523536 0\ldots$$

$$\emptyset = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749894\ldots$$

3.5 Propiedades algebraicas

3.5.1 De la suma

Es cerrada, por lo que su resultado será también un número real, de manera que si $a, b \in \mathbb{R}$ entonces:

$$(a+b) \in \mathbb{R}$$

Es conmutativa, por lo que:

$$a+b=b+a$$

Es asociativa, esto es:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

Si uno de los sumandos es cero, el resultado es igual al otro:

$$a+0=a$$

Para cada número real existe uno que es simétrico, tal que:

$$a+(-a)=0$$

3.5.2 De la multiplicación

Es cerrada, de ahí que si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$a \times b \in \mathbb{R}$$

Es conmutativa, así que:

$$a \times b = b \times a$$

Es asociativa, es decir:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Existe un elemento neutro: 1, de forma que:

$$a \times 1 = a$$

Para cada número real que sea diferente de cero, existe otro que se denomina el inverso multiplicativo, tal que:

$$a \times a^{-1} = 1$$

3.5.3 De la suma y la multiplicación

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces:

$$a(b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

CAPÍTULO 4

Concepto de función

4.1 Evolución del concepto

A continuación se presenta un breve panorama histórico del surgimiento y desarrollo del *concepto de función*, desde la Antigüedad hasta el siglo XX.

En *Matemáticas*, al igual que en otras disciplinas, algunas nociones surgen inicialmente como ideas intuitivas, y así sucedió con este concepto.

Tiene su origen, como otros, en el interés del hombre por comprender el mundo en el que habita, y que lo lleva a examinar con suma atención todo lo que lo rodea.

Se fue gestando a través de los siglos, pasando por diversas precisiones, generalizaciones y depuraciones, hasta llegar a la definición que se acepta en la actualidad, relacionada con el *concepto de conjunto*, incluida en el Capítulo 2 (página 45).

4.1.1 Edad Antigua

Las primeras referencias aparecen en las civilizaciones de la *Antigüedad*. Si bien, no se conocía entonces el *concepto abstracto de función*, sí se han encontrado indicios de la utilización de lo que podría considerarse *funciones particulares*.

En general, dichas referencias estaban dadas en forma de tablas. De manera que, podría pensarse en una definición de función para la época como una tabla de correspondencia.

Así, en algunos escritos encontrados en Babilonia, aparecen funciones tabuladas con las que se pretendía, por medio de métodos cuantitativos, predecir fenómenos astronómicos de repetición periódica, tales como movimientos lunares y planetarios.

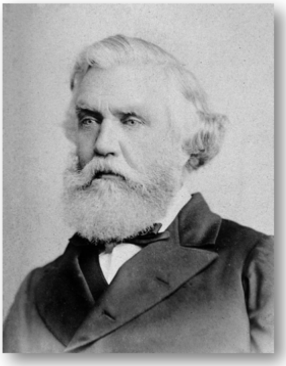
Un ejemplo es la *Tablilla de Venus de Ammisaduqa*, de escritura cuneiforme, que data del siglo VII a. C. y es copia de un texto babilonio de unos mil años atrás. En ella se hallan registrados veintiún años de observaciones astronómicas del planeta Venus, correspondientes al siglo XVII a.C. y realizadas durante el reinado de *Ammi-Saduqa*, rey de Babilonia y cuarto sucesor de *Hammurabi*.

TABLILLA DE VENUS DE AMMISADUQA

FUE ENCONTRADA PEN 1849 POR SIR AUSTEN HENRY LAYARD, Y NUMERADA COMO "TABLILLA 63".

EN 1870, SIR HENRY CRESWICKE RAWLINSON Y GEORGE SMITH LA PUBLICARON EN «*TABLET OF MOVEMENTS OF THE PLANET VENUS AND THEIR INFLUENCES*» (THE CUNEIFORM INSCRIPTIONS OF WESTERN ASIA, VOLUMEN III).

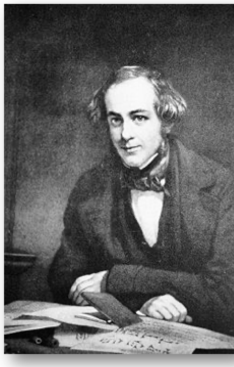
ACTUALMENTE SE ENCUENTRA EN EL MUSEO BRITÁNICO DE LONDRES.



Sir Austen Henry Layard
5 de marzo de 1817 - 5 de julio de 1894

Arqueólogo, coleccionista, escritor, político y diplomático británico. Hizo investigaciones en las ruinas de Babilonia y los montes del sur de Mesopotamia.

Una de sus obras es *Los descubrimientos en las ruinas de Nínive y Babilonia.*



Sir Henry Creswicke Rawlinson
11 de abril de 1810 – 5 de marzo de 1895

Soldado, diplomático y orientalista británico. Conocido como *Padre de la Asiriología.*

Entre sus publicaciones se halla la titulada: *Un Comentario sobre las Inscripciones Cuneiformes de Babilonia y Asiria.*

George Smith
26 de marzo de 1840 - 19 de agosto de 1876

Asiriólogo inglés. Desde joven mostró con un gran interés por la historia y cultura asirias, en particular sobre las tablillas cuneiformes.

En 1867 descubrió dos inscripciones únicas, que fueron muy importantes para el estudio de la cronología de la época.

Asimismo, en la civilización egipcia hay ejemplos como el *Papiro Rhind*, que data de mediados del siglo XVI a. C., y es conocido también como *Papiro de Ahmes* por haber sido redactado por el escriba del mismo nombre.

PAPIRO RHIND

Es un documento didáctico, redactado en escritura hierática, basado en textos de 300 años de antigüedad.

Contiene 87 problemas matemáticos sobre diversos temas. En él se halla el uso de las fracciones egipcias.

Éste es considerado como el primer tratado de *Matemáticas* que se conserva.

En la *Antigua Grecia* surgieron las *proporciones* y los primeros intentos de *cálculo infinitesimal*.

Durante esta época *Euclides de Alejandría*, recupera y aplica a problemas concretos la *Teoría de las proporciones* de *Eudoxo de Cnido*, anticipando con el uso de razones una noción temprana de *funcionalidad*.

Así, en el *Libro V de los Elementos*, su obra cumbre, la tercera definición establece que *"Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas"*.

EUDOXO DE CNIDO
ca. 390 a. C. - ca. 337 a. C.

FILÓSOFO, ASTRÓNOMO, MATEMÁTICO Y MÉDICO GRIEGO.

DESTACAN SUS TRABAJOS SOBRE LA *TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD*, EL *MÉTODO DE EXHAUCIÓN* Y LA *TEORÍA* GENERAL DE LAS MAGNITUDES GEOMÉTRICAS.

EUCLIDES
ca. 325 a. C. - ca. 265 a. C.

MATEMÁTICO Y GEÓMETRA GRIEGO Es CONOCIDO COMO *EL PADRE DE LA GEOMETRÍA*.

SU OBRA MÁS FAMOSA ES *LOS ELEMENTOS*, QUE HA SIDO CONSIDERADA COMO EL LIBRO DE TEXTO MÁS EXITOSO DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.

También en este período, la idea de dependencia entre cantidades aparece claramente señalada, en las investigaciones de *Arquímedes de Siracusa*. Esta noción puede apreciarse en sus obras:

- *Cuadratura de la parábola*.
- *Principio de Arquímedes* o *Primera Ley de la Hidrostática*.
- *Sobre espirales* .
- *Sobre la esfera y el cilindro* .

Arquímedes de Siracusa
ca. 287 a. C. - ca. 212 a. C

Astrónomo, físico, ingeniero, inventor, matemático y filósofo griego, reconocido como uno de los científicos más relevantes de la Antigüedad.

En particular se le considera uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos.

Entre sus logros están:

- Dar una aproximación muy precisa para π.
- Demostrar que podía aproximar raíces cuadradas con gran precisión.
- Definir los volúmenes de las superficies de revolución.

4.1.2 Edad Media

Es en esta época cuando se establecen las bases para la definición del *concepto de función*.

A finales del siglo XIII y durante la primera mitad del siglo XIV, hubo gran interés por el estudio del movimiento de los cuerpos, tanto en *Oxford* como en *París*, siendo de gran importancia los trabajos de *Thomas Bradwardine* y *Nicole d'Oresme*.

El primero, formaba parte de los *Mertonianos*, un grupo de académicos del *Merton College de Oxford* ligados a la *Orden Franciscana, en el marco de la Escolástica tardía*, conocidos también como los *Calculadores*.

Bradwardine centró su actividad en encontrar las leyes de la *dinámica*. Así, en su obra *Tractatus de proportionibus velocitatum in motibus* (*Tratado de las razones entre las velocidades de los móviles*), publicada en 1328, aborda el concepto de *función potencia*, tratando de conocer la manera en que la velocidad de un cuerpo en movimiento es dependiente de las fuerzas que actúan sobre él.

El impulso que dio a la idea, de que la única forma de enteder las leyes naturales es expresarlas en una formulación matemática, es considerado como su mayor aportación a la ciencia.

Nicole d'Oresme, de la *Universidad de París*, introdujo un método para representar de manera gráfica las velocidades del movimiento uniformemente acelerado.

Sus principales contribuciones matemáticas, se hallan en su *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (*Tratado de las cualidades y los movimientos*), en el que utiliza coordinadas rectangulares y las figuras geométricas resultantes para distinguir entre distribuciones uniformes y no uniformes de varias cantidades.

Fue el primero en concebir la noción de *potencias fraccionarias.*

En su obra *Algorismus Proportium* (*Algoritmo de las razones*) explora las reglas para manipular las *funciones potencia.*

Se considera que la primera aproximación al *concepto de función*, se debe a *Nicole d'Oresme* por la descripción que hizo de las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes.

4.1.3 Edad Moderna

Enl siglo XVII surge la *Física Moderna*. Destacan en él los trabajos de *Galileo Galilei*, *René Descartes*, *Isaac Newton* y *Gottfried Wilhelm Leibniz*.

Las investigaciones realizadas por *Galileo* sobre el movimiento, revelan que tenía un claro entendimiento de la relación existente entre las variables, y por ende, del concepto de *función*. Una de las relaciones estudiadas por él fue $n \to n^2$, con la que se demuestra que hay tantos números naturales como cuadrados perfectos.

La contribución más relevante de *Descartes* a las *Matemáticas* fue la introducción de la *Geometría Analítica*. Su obra más famosa es el *Discurso del método*, publicado en 1637, en la que incluye un breve tratado, *La Géométrie* (*La Geometría*). En éste, detalla la aplicación de métodos algebraicos a la resolución de problemas geométricos, mostrando así el camino para la introducción de la noción de *función*.

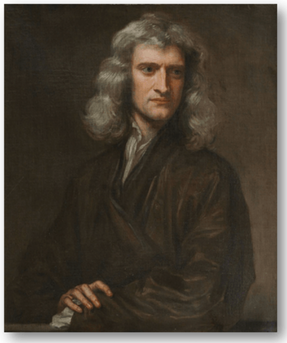
Por su parte, *Newton* a finales de 1665 introdujo el *concepto de fluxión*, definido como la velocidad con la que una variable *"fluye"*, esto es varía con el tiempo. Es entonces cuando descubre la reciprocidad de las operaciones de integración y derivación, lo que lo lleva a aproximarse al concepto de *función*.

Leibniz empleó la palabra *función* por primera vez en 1673, aunque no en el sentido que tiene actualmente, en su obra *Methodus Tangentium Inversa Sen de fontionibus*. Con ella representaba la dependencia de cantidades geométricas en la forma de una curva. También acuñó los términos *constante*, *variable* y *parámetro*.

René Descartes
1596 - 1650

Filósofo, matemático y físico francés, fundador de la *Filosofía Moderna* y a quien se le considera como el padre de la *Geometría Analítica*.

Sir Isaac Newton
1642 - 1727



Físico, matemático, teólogo, inventor, y alquimista inglés, cuyas contribuciones fueron de gran importancia en varias áreas del conocimiento.

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646 – 1716

Polímata, filósofo, matemático, lógico, teólogo, jurista, bibliotecario y político alemán. Reconocido como el *"último genio universal"*.

Durante el siglo XVIII surge el *concepto de función*, tal como se le conoce actualmente, siendo uno de los principales intereses de la investigación matemática el desarrollo del *Cálculo*, disciplina muy relacionada con la noción de *función*. A este respecto, las contribuciones de *Johann Bernoulli*, *Leonhard Paul Euler* y *Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet* fueron significativas para la definición de este concepto.

A *Bernoulli* se debe la primera definición, que aparece en un artículo publicado en *Acta Eroditorum*: *Aquí denotamos por función de una variable una cantidad compuesta, de una o varias maneras, de esta cantidad variable y constantes.*. Dando así, a la idea de *función* de *Leibniz* un carácter más abstracto.

En 1748, *Euler* la modifica, precisando así el concepto: *Una función de cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera por esa cantidad variable y por números ó cantidades constantes*. Ésta es la primera definición del concepto de *función* dada por él en su obra *Introductor in Analysi Infinitorum*.

Un tiempo después, en su libro *Institutiones calculi differentialis* de 1755, da una segunda definición más general de *función*: *Algunas cantidades en verdad dependen de otras, si al ser combinadas las últimas, las primeras también sufren cambio, y entonces las primeras se llaman funciones de las últimas. Una cantidad puede ser determinada por otras, así si x denota una cantidad variable, entonces todas las cantidades que dependen de x en cualquier forma están determinadas por x y se les llama funciones de x.*

Posteriormente, *Condorcet* retomando esta segunda definición indica: *asumo que tengo un cierto número de cantidades x, y, z,... y para cada valor definido de x, y, z,..., F tiene uno o más valores definidos correspondientes a ellos; yo digo que F es una función de x, y, z,...*".

Él considera que no se necesita una expresión explícita, una fórmula analítica o una ecuación para definir una *función*, noción que se extendió en el siglo XIX.

JOHANN BERNOULLI
1667 – 1748

FILÓLOGO, MATEMÁTICO Y MÉDICO SUIZO, TAMBIÉN CONOCIDO COMO *JEAN*. FUE UN MATEMÁTICO PROLÍFICO. PROPAGÓ EL *CÁLCULO* EN EUROPA. HIZO CONTRIBUCIONES EN *ÓPTICA* Y *MECÁNICA*.

LEONHARD EULER
1707 - 1783

FÍSICO Y MATEMÁTICO, SUIZO. RECONOCIDO COMO EL MATEMÁTICO MÁS EMINENTE DEL SIGLO XVIII, ASÍ COMO UNO DE LOS MÁS GRANDES Y PROLÍFICOS DE TODOS LOS TIEMPOS.

NICOLAS DE CONDORCET
1743 – 1794

FILÓSOFO, CIENTÍFICO, MATEMÁTICO, POLÍTICO Y POLITÓLOGO FRANCÉS. DESTACÓ EN MATEMÁTICAS, POR SU CAPACIDAD ANALÍTICA. PUBLICÓ EN 1765 SU *ENSAYO SOBRE EL CÁLCULO INTEGRAL*.

A finales del siglo, los trabajos de *Joseph-Louis de Lagrange* tienen un rol muy importante en el desarrollo de las bases tanto del análisis como de la elaboración de la *Teoría de Funciones*.

En su obra *Théorie des fonctions analytiques (Teoría de funciones analíticas)*, publicada en 1797, presenta una definición muy general: *Llamamos función de una o varias cantidades a toda expresión de cálculo en la cual estas cantidades entran de cualquier manera, mezcladas o no, con otras cantidades que consideramos como valores dados e invariables, mientras que las cantidades de la función pueden recibir todos los valores posibles. Así, en las funciones no consideramos más que las cantidades que suponemos variables, sin ninguna consideración a las constantes que pueden estar mezcladas.*

4.1.4 Edad Contemporánea

En el siglo XIX, los trabajos de *Jean Baptiste Joseph Fourier*, *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet*, *Georg Friedrich Bernhard Riemann* y *Karl Theodor Wilhelm Weierstrass* contribuyeron a formalizar el *concepto de función*.

Derivado de sus investigaciones, en 1815 *Fourier* establece que: *En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario. Dados una infinidad de valores de la abscisa x, hay un número igual de ordenadas $f(x)$.*

Dirichlet es considerado el primero en formular el *concepto moderno de función*, al expresarlo de manera muy general como: $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a < x < b$.

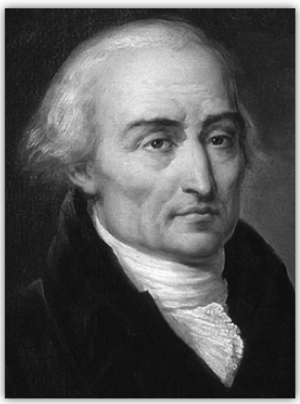
En 1837 propuso la definición de *función* como una correspondencia cualquiera entre dos conjuntos de números, que relaciona a cada número del primer conjunto con un único número del segundo.

Al respecto, se le atribuyen las siguientes frases registradas ese mismo año:

- *Una cantidad variable y se llama función de la cantidad variable x si a cada valor de x le corresponde un solo y determinado valor de y.*
- *Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x.*

JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE

1736 - 1813



ASTRÓNOMO, MATEMÁTICO Y FÍSICO ITALIANO. REALIZÓ APORTACIONES RELEVANTES EN DIVERSAS ÁREAS DE LAS *MATEMÁTICAS*.

SU TRATADO DE *MECÁNICA ANALÍTICA* ES UNA OBRA MAESTRA DE *MATEMÁTICA PURA*.

ES CONSIDERADO UNO DE LOS FÍSICOS Y MATEMÁTICOS MÁS DESTACADOS DE LA HISTORIA.

JOHANN PETER LEJEUNE GUSTAV DIRICHLET

1805 - 1859

MATEMÁTICO ALEMÁN, CUYOS INVESTIGACIONES DIERON UNA NUEVA PERSPECTIVA A LAS *MATEMÁTICAS*. SU TRABAJO SE CENTRÓ EN LA *TEORÍA DE NÚMEROS*.

DESTACA EL DESARROLLO QUE HIZO SOBRE LAS *SERIES DE FOURIER*.

SE LE ATRIBUYE LA PRIMERA DEFINICIÓN FORMAL DEL *CONCEPTO DE FUNCIÓN*.

Su trabajo sobre *funciones discontinuas*, lo lleva a ser el primero en dar un ejemplo de éstas: una *función* definida en un intervalo $[0, 1]$ y que es discontinua en todos sus puntos, como se muestra en la siguiente figura. Se le conoce como la *función de Dirichlet*.

Función de Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es un número irracional,} \\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional.} \end{cases}$$

A *Riemann* se le considera el fundador de la *Teoría Moderna de Funciones*.

En 1850 presenta la tesis *Grundlagen Fur eine allgemeine Theorie der Functionem einer veranderlichen complexe Grosse* (*Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja*), en la que indica que una *función* viene definida por sus puntos singulares y los valores en los *límites*.

En ese mismo año, define la *continuidad de una función* $f(z)$ de la manera siguiente: *La función* $f(z)$ *es continua en un intervalo, si cuando* z *recorre de un manera continua todos los valores comprendidos entre dos valores fijos, la función* $f(z)$ *varía igualmente de una manera continua*

Fue él quien hizo la primera distinción entre las nociones de *continuidad* y *diferenciación*.

En 1858, precisa la definición de *función*: *Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y.*

Por su parte, Weierstrass hace aportaciones, en 1841, sobre la *Teoría de Funciones Analíticas*, planteando la *Teoría de Funciones* basada en el desarrollo de series de potencias de las *funciones analíticas*.

En 1881, en su artículo *Remarques sur qualques points de la théorie des fonctions analítiques* (*Observaciones sobre algunos puntos de la teoría de funciones analíticas*), presenta sus ideas relativas a la relación intuitiva entre *continuidad* y *derivabilidad*.
También establece criterios de *convergencia de series*, formalizando así el *concepto de límite*, y puso los fundamentos del *conjunto de los números reales*.

GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN
1826 - 1866

MATEMÁTICO ALEMÁN, QUE HIZO APORTACIONES MUY IMPORTANTES TANTO AL *ANÁLISIS* COMO A LA *GEOMETRÍA DIFERENCIAL*. CONSIDERADO COMO UNO DE LOS GRANDES MATEMÁTICOS DE LA HISTORIA.

KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS
1815 - 1897

MATEMÁTICO ALEMÁN, CONOCIDO COMO EL *PADRE DEL ANÁLISIS MODERNO*. DOCTOR HONORIS CAUSA POR LA UNIVERSIDAD DE KÖNIGSBERG EN 1854. FUE UN PROLÍFICO INVESTIGADOR.

Durante el siglo XX, el *concepto de función* se:

- Generaliza aún más.
- Define con un mayor rigor matemático.
- Enmarca dentro de la *Teoría de Conjuntos*.

En esta época destacan, para su evolución, las contribuciones que derivan de los trabajos de tres matemáticos franceses: *Édouard Jean-Baptiste Goursat*, *Henri León Lebesgue* y *Maurice René Fréchet*.

En 1923, *Goursat* define una *función* de la forma siguiente: *Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$.*

Lebesgue, expresa su acuerdo en que *existe una función cuando hay correspondencia entre y, y los números x_1, x_2, x_3,...,x_n, sin preocuparse del procedimiento que sirve para establecer esta correspondencia.*

Después, Fréchet en su tesis *Généralisation d'un Théorème de Weierstrass* (*Generalización de un Teorema de Weierstrass*), expone que: *Supongamos que damos una cierta categoría (elementos cualesquiera, números, superficies, etc.) en la cual se sabe discernir los diferentes elementos. Podemos decir que Vx es una función (operación funcional), uniforme en un conjunto E de elementos de c, si a todo elemento A de E le corresponde un número bien determinado Vx.*

Édouard Jean-Baptiste Goursat

1858 - 1936

Matemático francés, recordado como expositor de su *Curso de análisis matemático.* Junto con otros, vislumbró y exploró una *Geometría* de más de tres dimensiones.

Henri Léon Lebesgue

1875 - 1941

Matemático francés. Es uno de los más importantes matemáticos franceses de su tiempo. Se le conoce principalmente por sus teorías *de la Medida* y *de la Integración.*

Maurice René Fréchet

1878 - 1973

Matemático francés. Contribuyó de forma relevante a la *Topología General*, siendo el primero en definir los espacios métricos. También hizo aportaciones al Cálculo.

4.2 Regla de correspondencia

Una función f indica una relación de dependencia de una variable con respecto a otra, por ejemplo:

- La distancia recorrida en un viaje y la velocidad de desplazamiento.
- El valor de un automóvil y su depreciación con el paso del tiempo.
- La intensidad del sonido y la distancia a la fuente sonora.

A dicha relación se le conoce como *regla de correspondencia* o *regla de transformación*, y es la que determina a la función f.

Esto se puede esquematizar con una caja, que tiene una entrada y una salida. En la primera está la variable independiente x, la caja representa la transformación dada por la *regla de correspondencia*, y en la salida se tiene a la variable dependiente $f(x)$.

En caso de que se desee calcular el área de un círculo, x se refiere al radio y $f(x)$ al área, la regla de correspondencia se expresa como:

$$f(x) = \pi x^2$$

4.3 Notación

La notación $f(x)$ fue utilizada por primera vez por *Leonhard Paul Euler* en su artículo *Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis*, que fue presentado en 1734 y publicado en 1740.

De esta manera se indica que la función f depende de la variable x, y se lee "f de x", o bien, "la función f de x". Así, se facilita identificar:

- El nombre de la función.
- Las variables independiente y dependiente.
- Su regla de correspondencia.

Por ejemplo, en la función:

$$f(x) = 2x + 5$$

se puede apreciar con claridad que:

- f es el nombre de la función.
- x es la variable independiente
- $f(x)$ es la variable dependiente
- $2x + 5$ es la regla de correspondencia

El dominio de la función $f : X \to Y$ se define como:

$$D_f = \{x \in X : \exists \in Y : f(x) = y\}$$

El dominio y el codominio de la función f se denotan, de forma abreviada, como sigue:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f : X \to Y$$

La relación entre un elemento x del conjunto X (dominio) y su único correspondiente $f(x)$ del conjunto Y (codominio), se expresa:

$$x \to f(x)$$

4.4 Representación

Una *función* puede representarse de cinco formas:

a) Descripción verbal.

b) Diagrama.

c) Expresión analítica.

d) Tabla de valores.

e) Gráfica.

Dependerá del tipo de *función* que se pretenda representar, la elección de cada una de ellas.

La imagen de la derecha, ilustra las cinco maneras para la función:

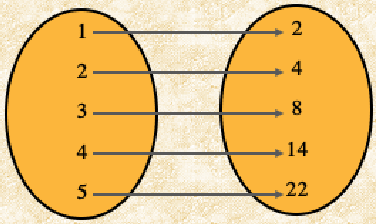
$$f(x) = (x+1)^2 - 3x + 1 \qquad D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

REPRESENTACIONES

DESCRIPCIÓN VERBAL

Para obtener el valor de la función $f(x)$, se suma uno al de la variable independiente x, se eleva al cuadrado esta cantidad, se le resta el valor de la variable independiente multiplicado por tres, y se le suma uno para conseguir el resultado final.

DIAGRAMA



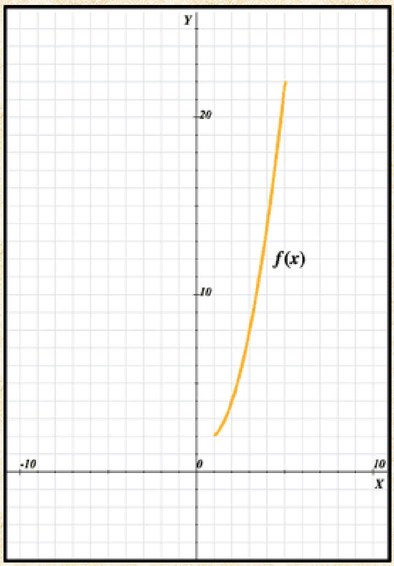
EXPRESIÓN ANALÍTICA

$$f(x) = (x + 1)^2 - 3x + 1$$

TABLA DE VALORES

x	$f(x)$
1	2
2	4
3	8
4	14
5	22

GRÁFICA



A continuación se detallan estas representaciones.

4.4.1 Descripción verbal

Consiste en exponer mediante lenguaje común, sin necesidad de simbología especializada, la relación existente entre los elementos de entrada y los de salida de la *función*.

Es una manera que permite dar una explicación general y cualitativa de la *función* de que se trate.

Fue sugerida por *Gustav Dirichlet*, para separar el *concepto de función* de fórmulas concretas.

Un ejemplo de ella se encuentra en la *Función de Dirichlet*. Cabe mencionar que una de sus características es que no es posible graficarla.

4.4.2 Diagrama

Por medio de la utilización de un diagrama, se obtiene una clara y rápida visualización de la *función* que se desea analizar.

Su aplicación es muy similar a la de los *diagramas de Venn* respecto a los conjuntos.

Es empleada generalmente para trabajar con conjuntos finitos.

4.4.3 Expresión analítica

Con este tipo de representación se indica, ya sea de manera explícita o implícita, la regla de correspondencia, a través de una fórmula matemática.

Conviene utilizarla para *funciones* en las que otras representaciones no resultan del todo adecuadas.

4.4.4 Tabla de valores

Mediante esta forma, se genera una tabla de valores con los de la variable independiente x, y los correspondientes de la dependiente $f(x)$.

Es muy usada en situaciones cotidianas, por ejemplo para señalar porcentajes.

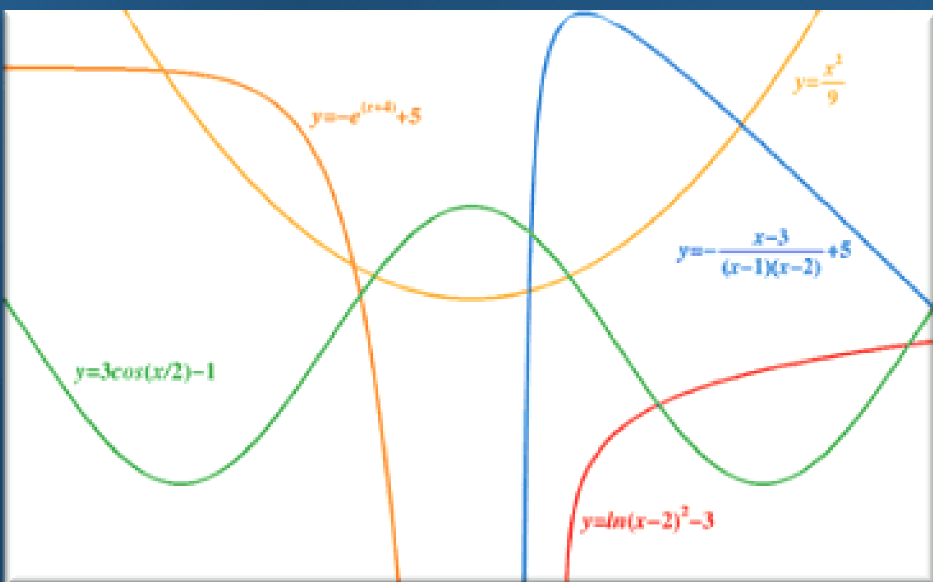
Dependiendo de la *función*, puede tomarse como el punto de partida para pasar a la representación gráfica.

4.4.5 Gráfica

De esta manera, se plasma en el plano cartesiano la gráfica formada con todos los pares de puntos $(x, f(x))$, tales que $x \in D_f$, visualizando así las características globales de la *función*, lo que la hace muy popular.

CAPÍTULO 5

Función de una variable real



5.1 Definición

Se dice que una **función** $f(x)$ **es de una variable real** si a cada número real del dominio ($\mathbf{D}$), corresponde un único número real del rango. Su expresión formal es:

$$\begin{gathered} f:\mathbf{D}_f\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \\ x\longmapsto y=f(x) \end{gathered}$$

donde:
f es la función (regla de correspondencia) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
$\mathbf{D}_f$ es el dominio de la función f.
$\mathbb{R}$ es el codominio de la función.
x es la variable independiente.
$y=f(x)$ es la variable dependiente (imagen de x).

Conviene recordar que la imagen de la función es muy importante, aunque no se encuentre explícitamente en la definición, y que de manera formal se representa como:

$$\mathbf{Im}_f = y\in\mathbb{R}\,\Big|\,\exists x\in\mathbf{D}_f, f(x)=y$$

En algunos casos, podría ser útil restringir el dominio de la función a un subconjunto de los números reales cuando:

- con ciertos valores de x sea matemáticamente imposible realizar alguna operación,
- lo demande de este modo el contexto real del que ha emanado la función, y
- se requiera así por algún otro motivo.

5.2 Criterio de la recta vertical

Una forma de determinar visualmente si una relación es una función de variable real, es el *criterio de la recta vertical*. También se le conoce como *regla de la recta vertical*.

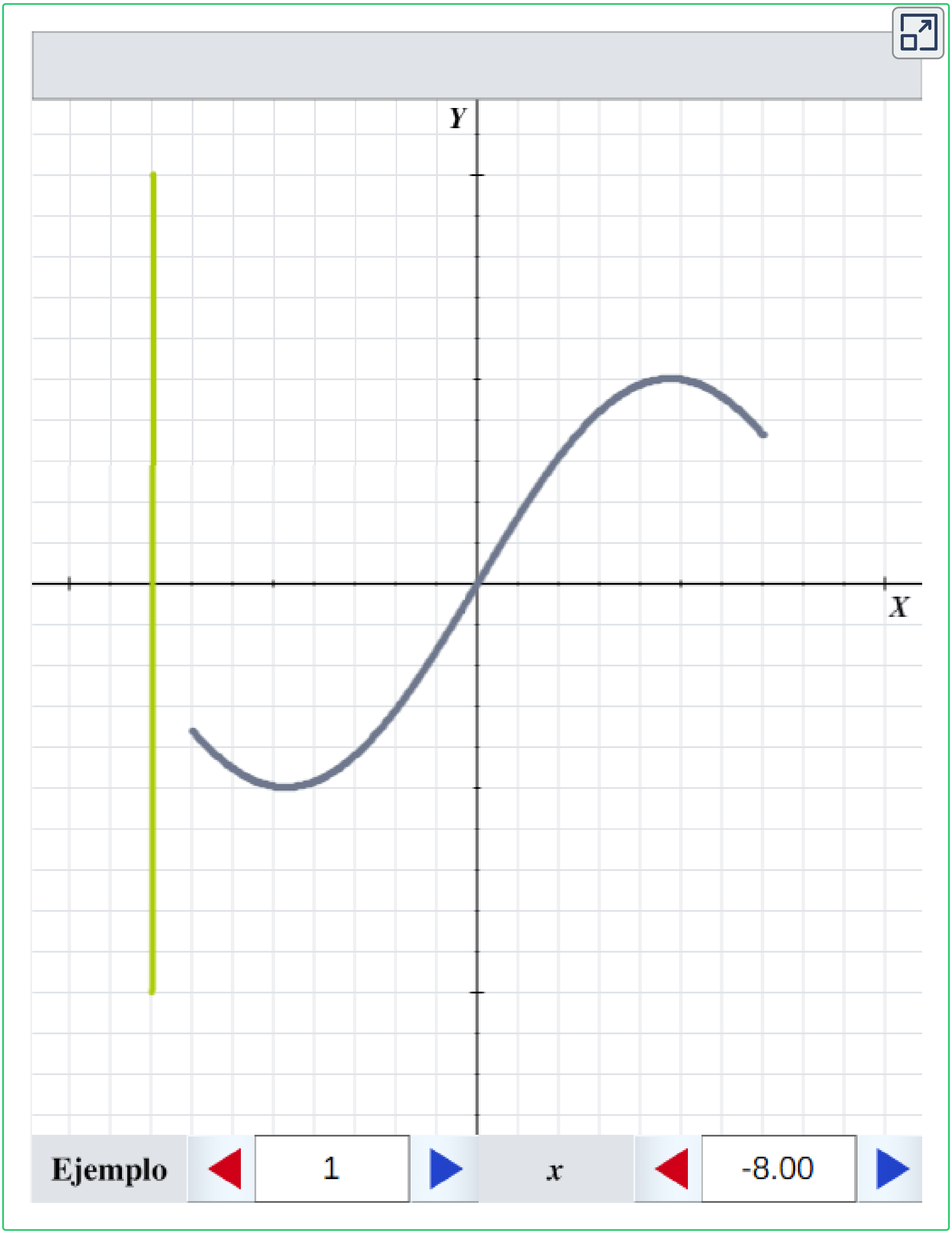
Consiste en trazar rectas paralelas al eje de las ordenadas, sobre la gráfica de la curva de que se trate, y dado que en una función de variable real, a cada valor de la variable independiente le corresponde sólo uno de la variable dependiente, si alguna de ellas la interseca en más de un punto, implica que dicha curva no es una función.

De esta manera, se puede verificar que a cada par (x, y) de la curva, le corresponda en el plano cartesiano un único punto P tal que:

$$P(x, y) = P(x, f(x))$$

En la escena interactiva se presentan algunos ejemplos de la aplicación de este criterio.

Para desplazar la recta sobre la curva, basta pulsar el control x o introducir un valor dentro del campo del mismo, seguido de la tecla *Intro*. Para ver un efecto de deslizamiento en la recta debe mantenerse oprimido el pulsador x.


Y
X
Ejemplo
1
x
-8.00

5.3 Propiedades de una función de una variable real

5.3.1 Acotación

La función f está acotada superiormente si existe un número real M, denominado *cota superior*, tal que:

$$f(x) \leq M, \forall x \in \mathbf{D}_f$$

Cualquier otro número real $M' > M$, es también cota superior de f. A la menor de ellas se le llama *supremo*.

La función f está acotada inferiormente si existe un número real m, llamado *cota inferior*, tal que:

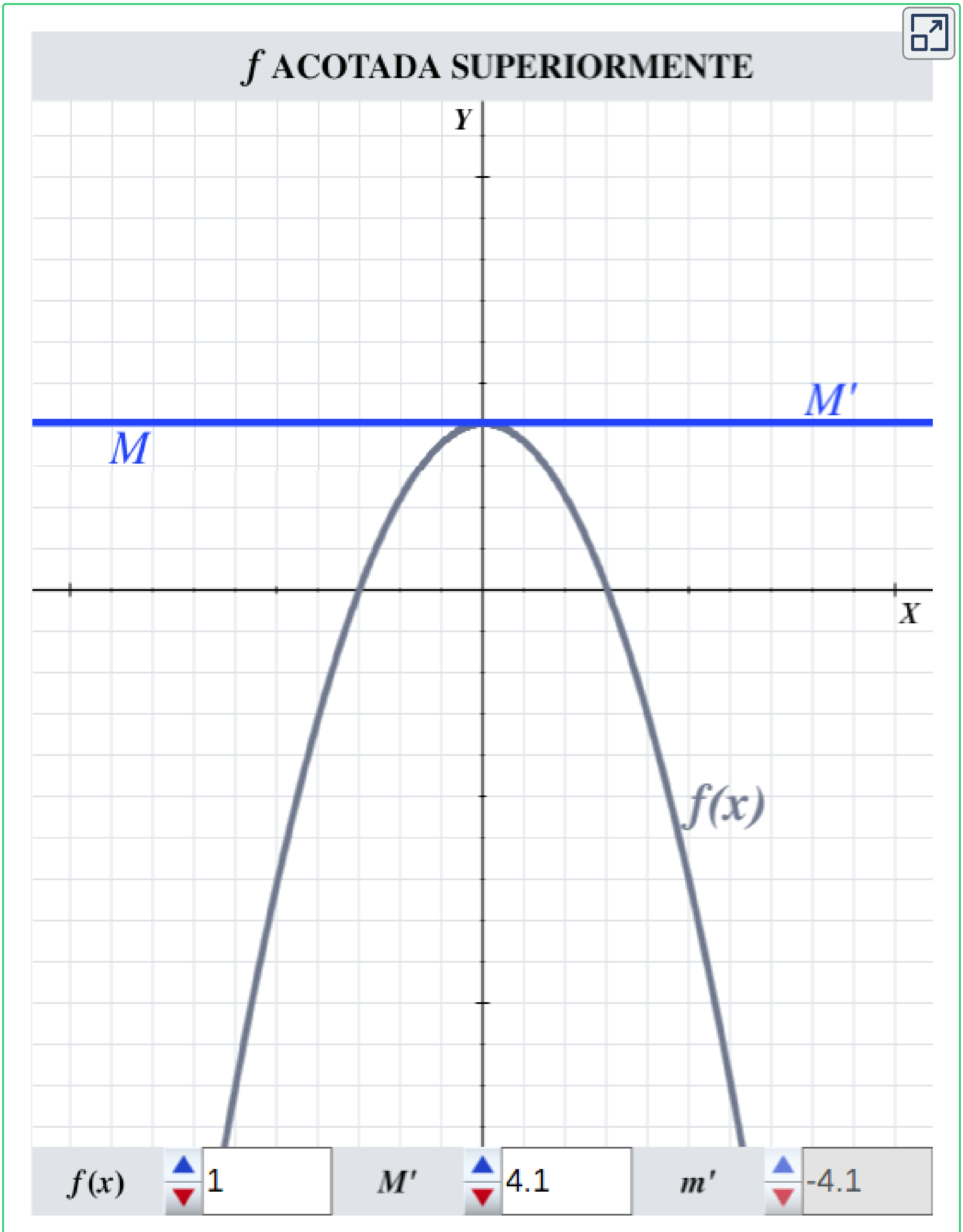
$$f(x) \geq m, \forall x \in \mathbf{D}_f$$

Cualquier otro número real $m' < m$, es también cota inferior de f. A la mayor de ellas se le llama *ínfimo*.

La función f está acotada si tiene *cota superior* y *cota inferior*, de manera que:

$$\exists m, M / m \leq f(x) \leq M, \forall x \in \mathbf{D}_f$$

En la escena interactiva se presentan ejemplos de funciones con alguna cota.


f ACOTADA SUPERIORMENTE
Y
M'
M
X
f(x)
f(x)
1
M'
4.1
m'
-4.1

5.3.2 Concavidad y convexidad

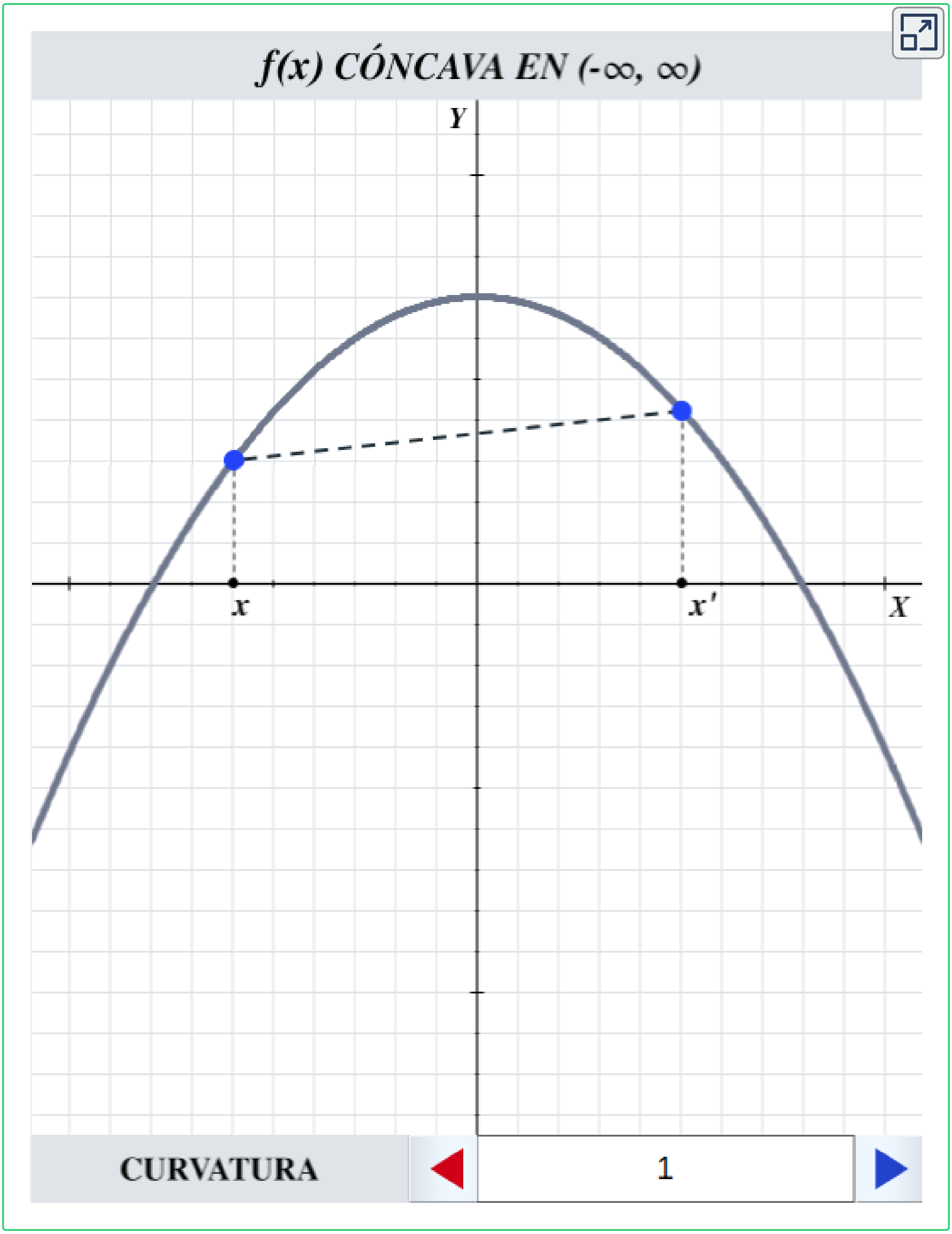
Geométricamente se dice que una función $f(x)$, cuya gráfica sea una curva continua en el intervalo $[i, i']$ es cóncava en dicho intervalo si dados dos puntos (x, x') cualesquiera de la gráfica, el segmento que los une queda por encima de la curva.

En caso de que el segmento referido quede por debajo de la curva, $f(x)$ es convexa.

Dado que con cierta frecuencia se definen estos dos conceptos con el criterio exactamente contrario, es habitual que se hable de funciones cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, siendo la segunda la que aquí se ha presentado como convexa.

Los puntos en los que $f(x)$ cambia su concavidad por convexidad, y viceversa, se conocen como puntos de inflexión (pi).

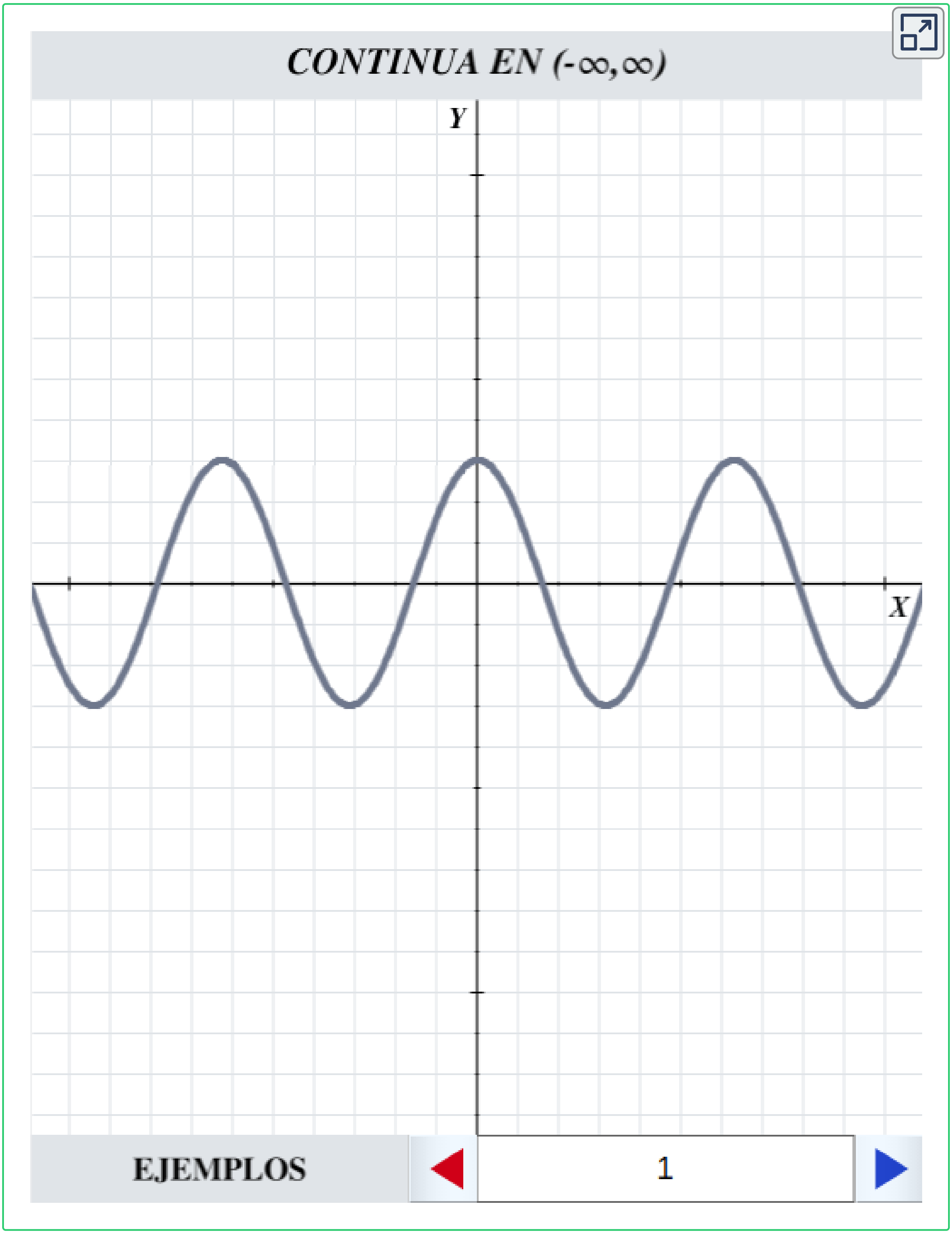
En la escena interactiva de presentan ejemplos de esta propiedad.


f(x) CÓNCAVA EN (-∞, ∞)
Y
x
x'
X
CURVATURA
1

5.3.3 Continuidad

Se dice que una función $f(x)$ es continua, si puede representarse en todo su dominio por medio de un trazo continuo, en caso contrario se dice que dicha función es discontinua.

En la escena interactiva se presentan dos ejemplos.


CONTINUA EN (-∞,∞)
Y
X
EJEMPLOS
1

5.3.4 Funciones par e impar

Se dice que una función $f(x)$ es par, si para cualquier x del dominio se verifica que:

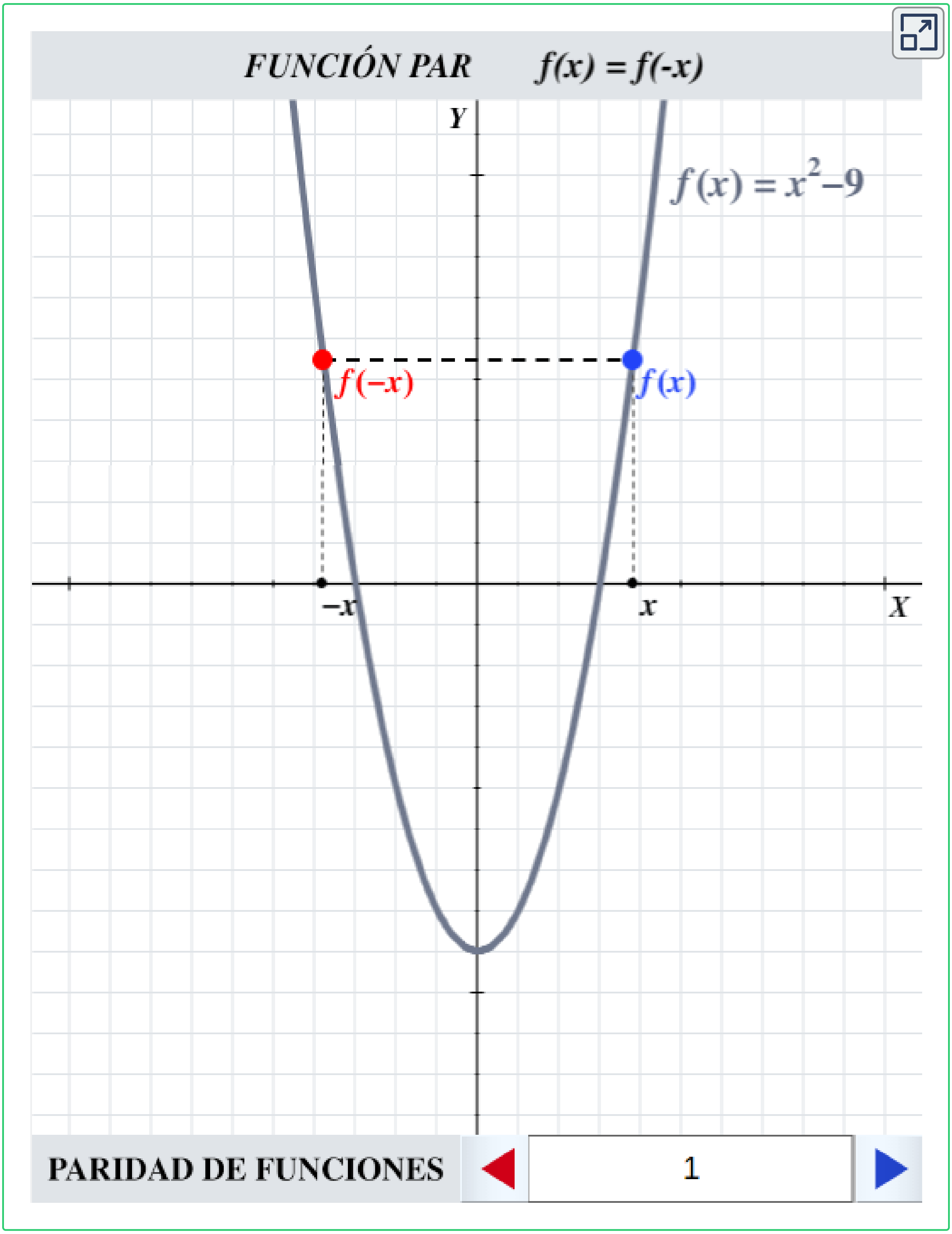
$$f(x) = f(-x)$$

Esto quiere decir que ni su valor ni su signo cambian al sustituir x por $-x$.

Una función $f(x)$ es $impar$, si se comprueba que para cualquier x del dominio:

$$f(x) = -f(-x)$$

Como se puede observar en la escena interactiva, las funciones pares son simétricas con respecto al eje Y, en tanto que las impares lo son con respecto al origen.


FUNCIÓN PAR $f(x) = f(-x)$
Y
$f(x) = x^2 - 9$
$f(-x)$
$f(x)$
$-x$
x
X
PARIDAD DE FUNCIONES
1

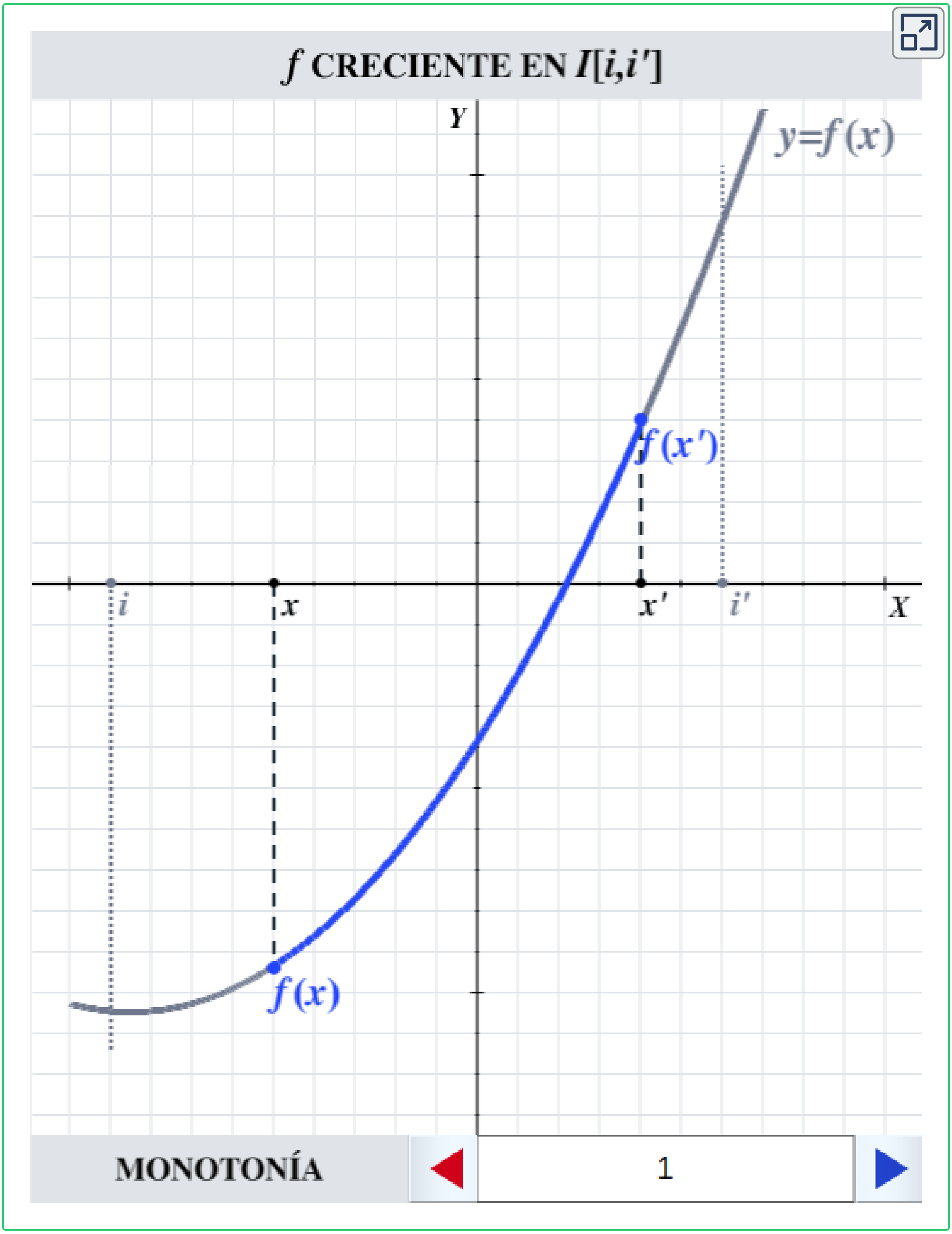
5.3.5 Monotonía

Se refiere al crecimiento o decrecimiento de una función f, analizándola sobre el eje X, de izquierda a derecha, y expresando los intervalos del eje X en los que crece o decrece. Así, en un intervalo $I[i, i']$ la función f es:

1. Creciente, si $f(x') > f(x), \forall x' > x \in I[i, i']$.
2. Estrictamente creciente, si es creciente en todos los puntos de $I[i, i']$.
3. Decreciente, si $f(x') < f(x), \forall x' > x \in I[i, i']$.
4. Estrictamente decreciente, si es decreciente en todos los puntos de $I[i, i']$.
5. Constante si $f(x') = f(x), \forall x, x' \in I[i, i']$.

Geométricamente, como puede verse en el interactivo, la curva:

- Sube en el intervalo $I[i, i']$, si f es creciente o estrictamente creciente.
- Baja en el intervalo $I[i, i']$, si f es decreciente o estrictamente decreciente.
- Corresponde a una recta paralela al eje de las abscisas, si f es constante.



f CRECIENTE EN $I[i,i']$
Y
$y=f(x)$
$f(x')$
i
x
x'
i'
X
$f(x)$
MONOTONÍA
1

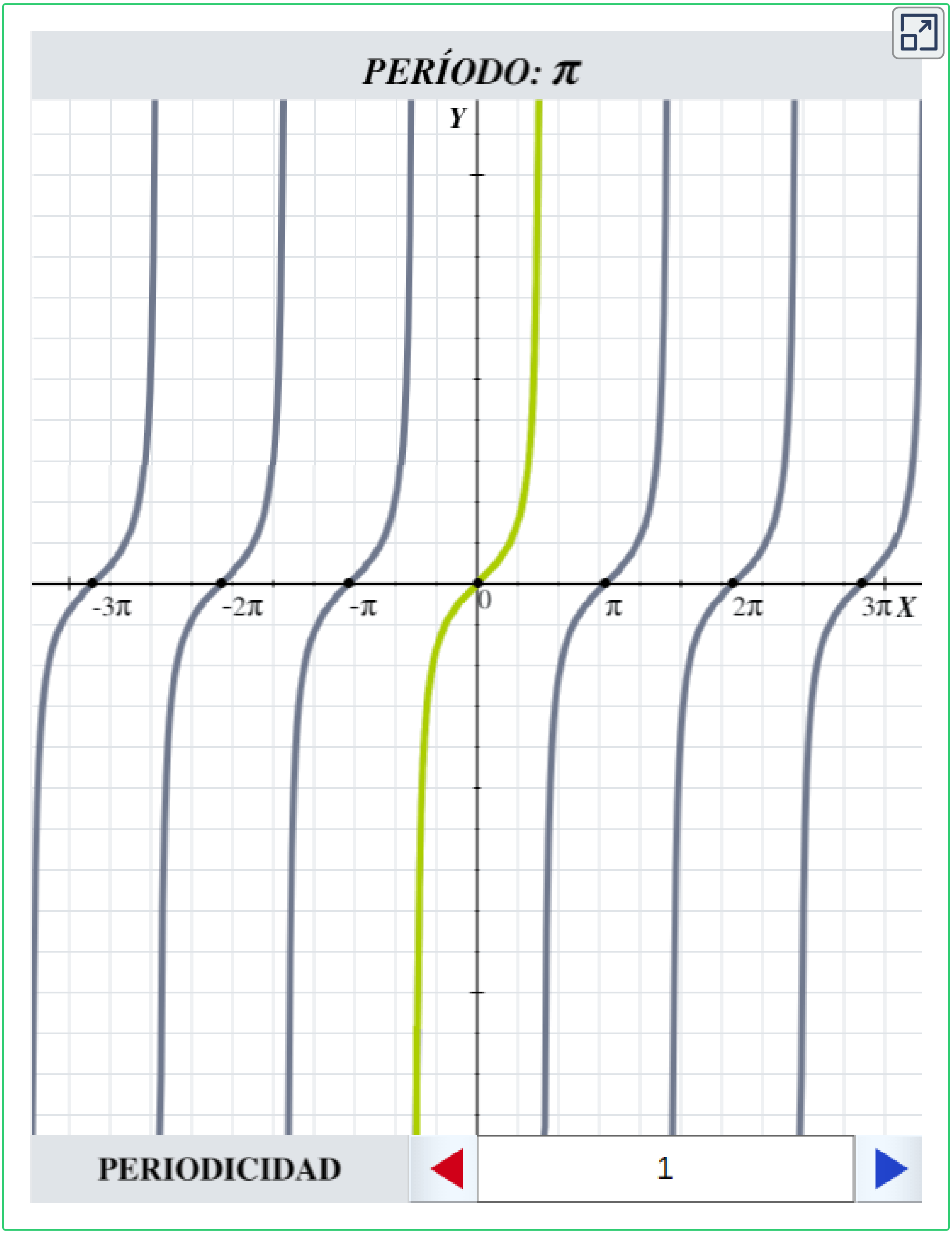
5.3.6 Periodicidad

Las funciones *periódicas* son aquellas en las que sus valores se repiten siempre cada intervalo determinado del eje X. Dicho intervalo se conoce como el *período de la función.*

Esto es:

$$f(x+p) = f(x+2p) = ... = f(x+np)$$

En la escena interactiva se presentan dos ejemplos.


PERÍODO: π
Y
-3π
-2π
-π
0
π
2π
3π
X
PERIODICIDAD
1

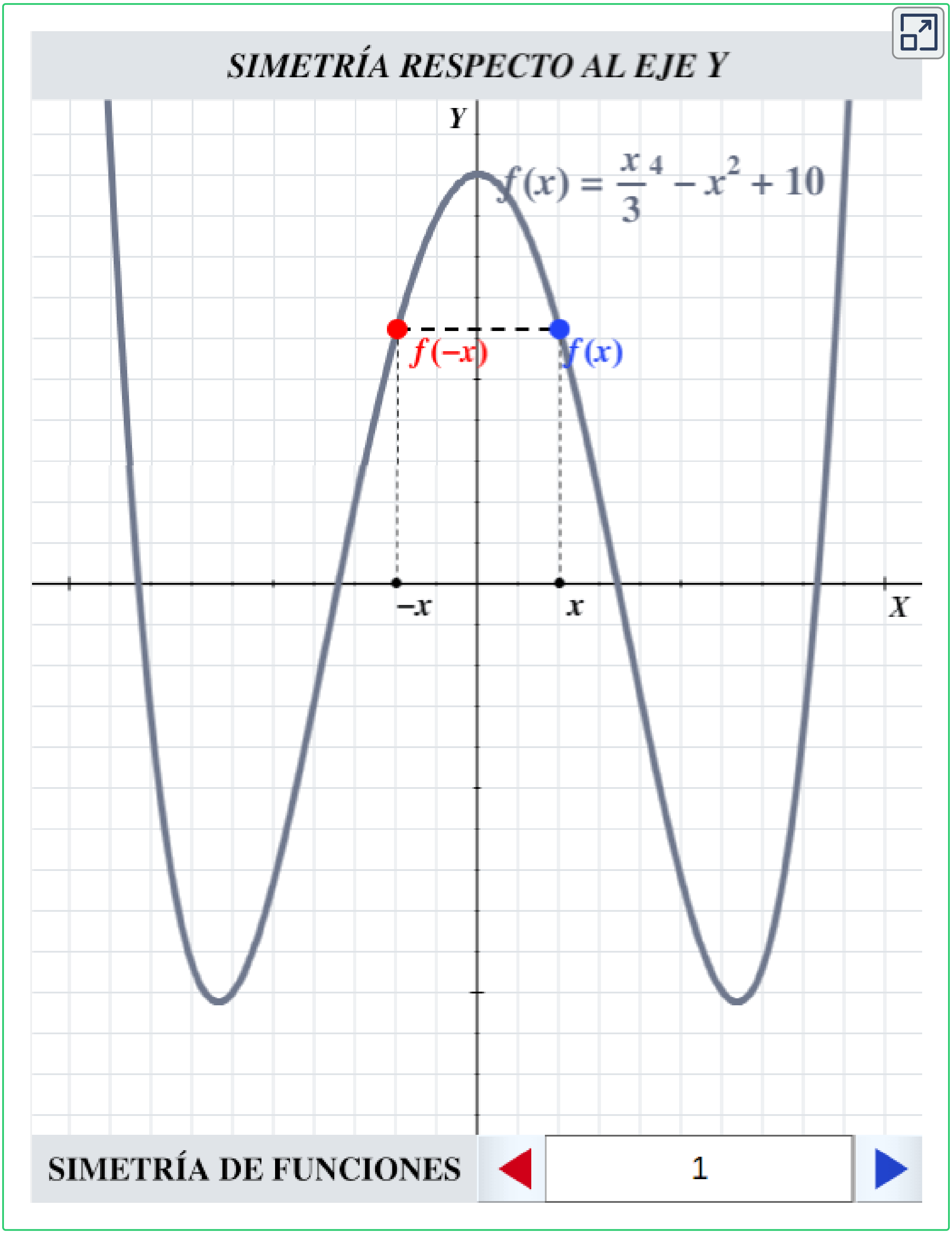
5.3.7 Simetría

Una función es simétrica, respecto al eje Y, si a la abscisa $x > 0$ le corresponde la misma ordenada que a la abscisa $x < 0$, esto es:

$$f(x) = f(-x)$$

También se encuentra la simetría con respecto al origen, donde:

$$f(x) = -f(-x)$$

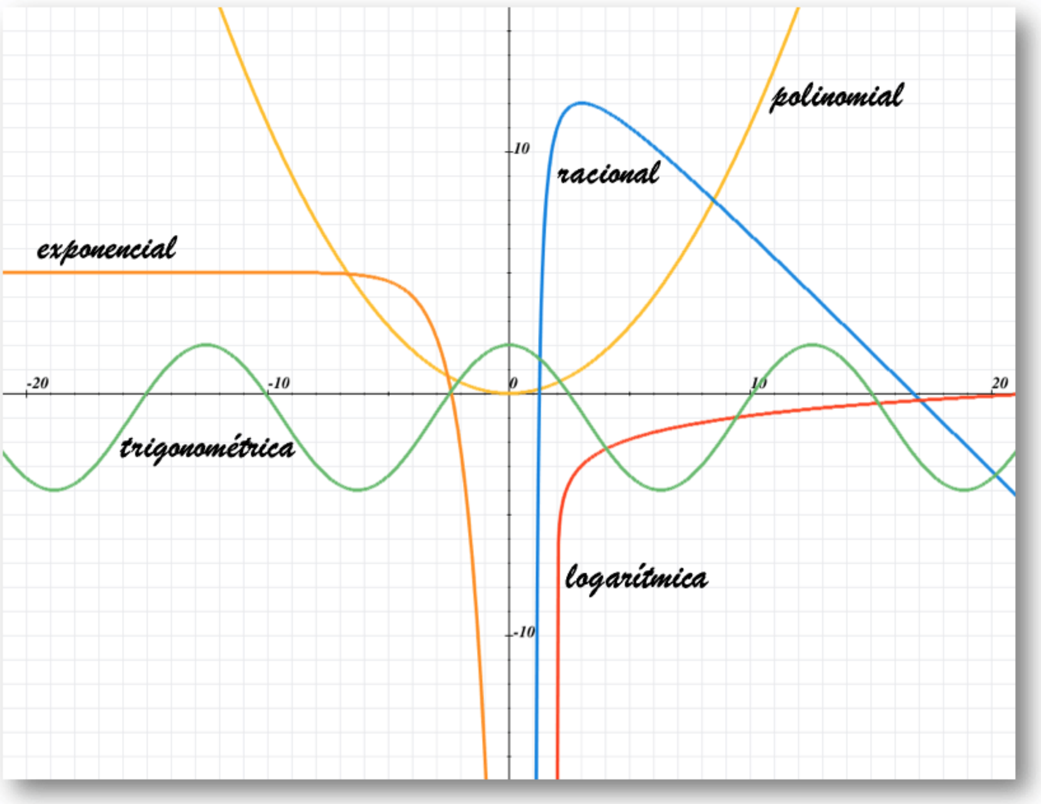


SIMETRÍA RESPECTO AL EJE Y
Y
$f(x) = \frac{x^4}{3} - x^2 + 10$
$f(-x)$
$f(x)$
$-x$
x
X
SIMETRÍA DE FUNCIONES
1

5.4 Clasificación

Como se indicó en el *Prefacio*, se tienen cinco tipos de *función de una variable real*:

- *Polinomiales.*
- *Racionales.*
- *Exponenciales.*
- *Logarítmicas.*
- *Trigonométricas.*

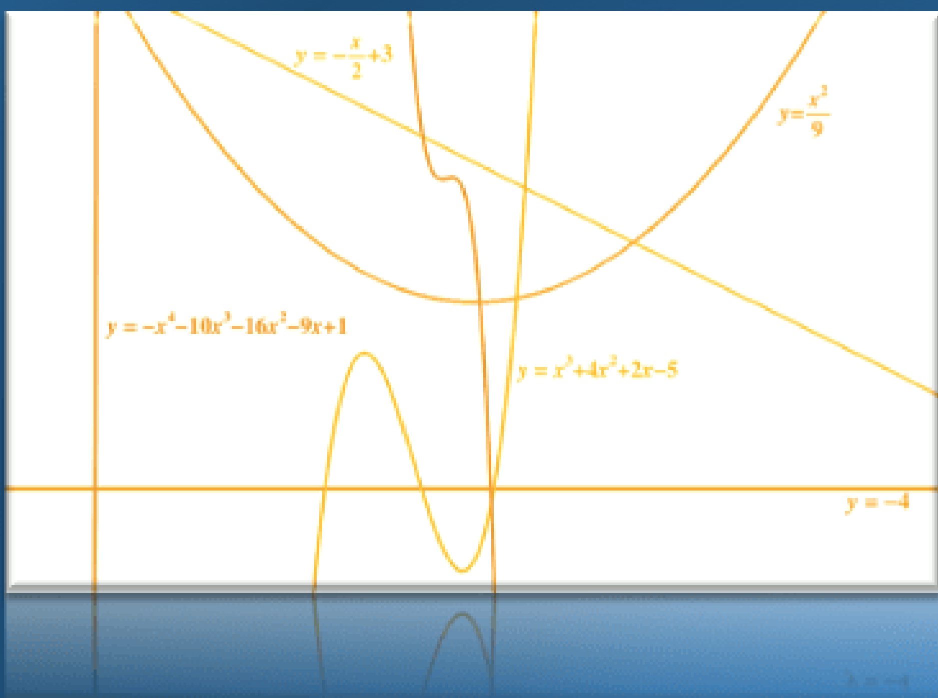


En los siguientes capítulos se encuentra la descripción de cada uno de ellos, y se incluyen las escenas interactivas mencionadas en el *Prefacio*, que permiten visualizar, de manera clara, los cambios que se dan en las representaciones gráficas al variar sus parámetros.

Asimismo, al final de cada capítulo hay un interactivo en el que se puede experimentar, introduciendo en el campo de texto las funciones que se desee graficar.

CAPÍTULO 6

Funciones polinomiales



6.1 Definición

Las *funciones polinomiales*, denominadas también *polinómicas*, tienen su dominio en los números reales.

Su definición, como su nombre lo indica, viene dada por un polinomio, esto es:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde:
$a_i \neq 0$
a_i son constantes reales.
n es un entero positivo.

De ellas puede decirse que:

- Son continuas en todo su dominio.
- Si no se especifica de otra manera, su dominio es: $\mathbf{D}_f = (-\infty, \infty)$.
- No tienen asíntotas verticales, ya que ningún valor de x produce una división entre cero, ni horizontales. Cabe recordar que las asíntotas son rectas que se aproximan a la gráfica de la función sin tocarla.

Se clasifican según el grado del polinomio, que corresponde al mayor exponente de la variable independiente: *grado cero*, *grado uno*, *grado dos*, … *grado* n.

En este capítulo se describen las que corresponden a los primeros cinco grados.

De acuerdo al grado de la función, su rango es:

- El conjunto cuyo único elemento es la constante que la define, si es cero.
- El conjunto de los números reales si es impar.
- Un subconjunto de los números reales si es par.

Asimismo, conviene recordar que dado que se trata de polinomios, su grado indica el número de raíces del mismo, y que éstas son de tres tipos: positivas, negativas y complejas.

En la sección de *funciones polinomiales de grado 2*, se presentan varios ejemplos en una escena interactiva.

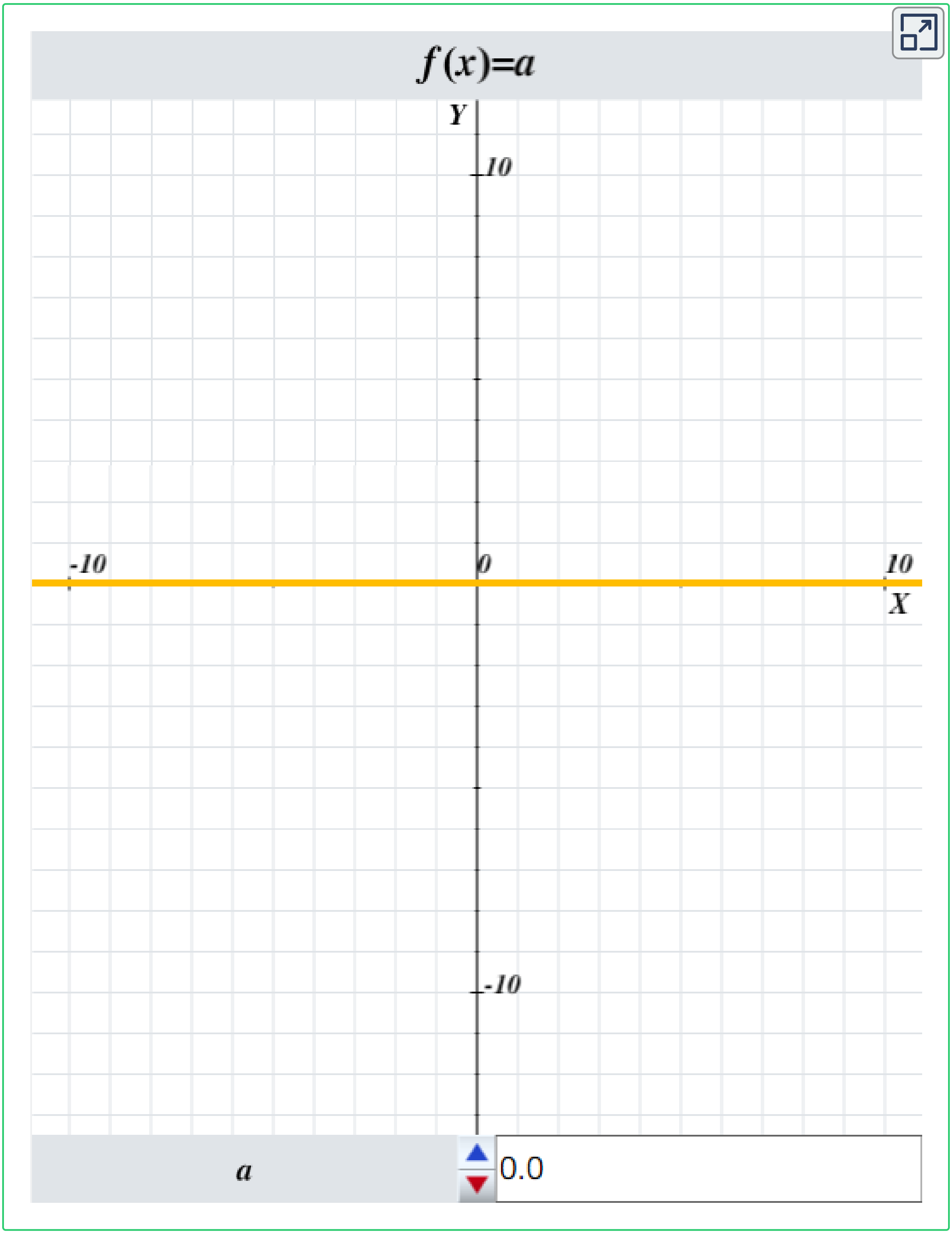
6.2 Función polinomial de grado cero

La función de *polinomial de grado cero*, es un caso particular de las funciones polinomiales. Tiene la forma:

$$f(x) = a$$

donde a es una constante, y por ello se le conoce como *función constante*.

Como puede observarse en la escena interactiva, su representación gráfica es una recta paralela al eje X, que interseca al eje Y en el punto $(0, a)$. Variando el valor de la constante en la escena interactiva, ya sea introduciéndolo directamente en el campo de texto, seguido de la tecla *Intro*, o mediante el pulsador en la zona inferior, puede verse el desplazamiento de la recta de ordenada a.


f(x)=a
Y
10
-10
0
10
X
-10
a
0.0

6.3 Función polinomial de grado uno

A la función *polinomial de grado uno* también se le denomina *polinomial lineal.*

Su expresión algebraica es:

$$f(x) = mx + n$$

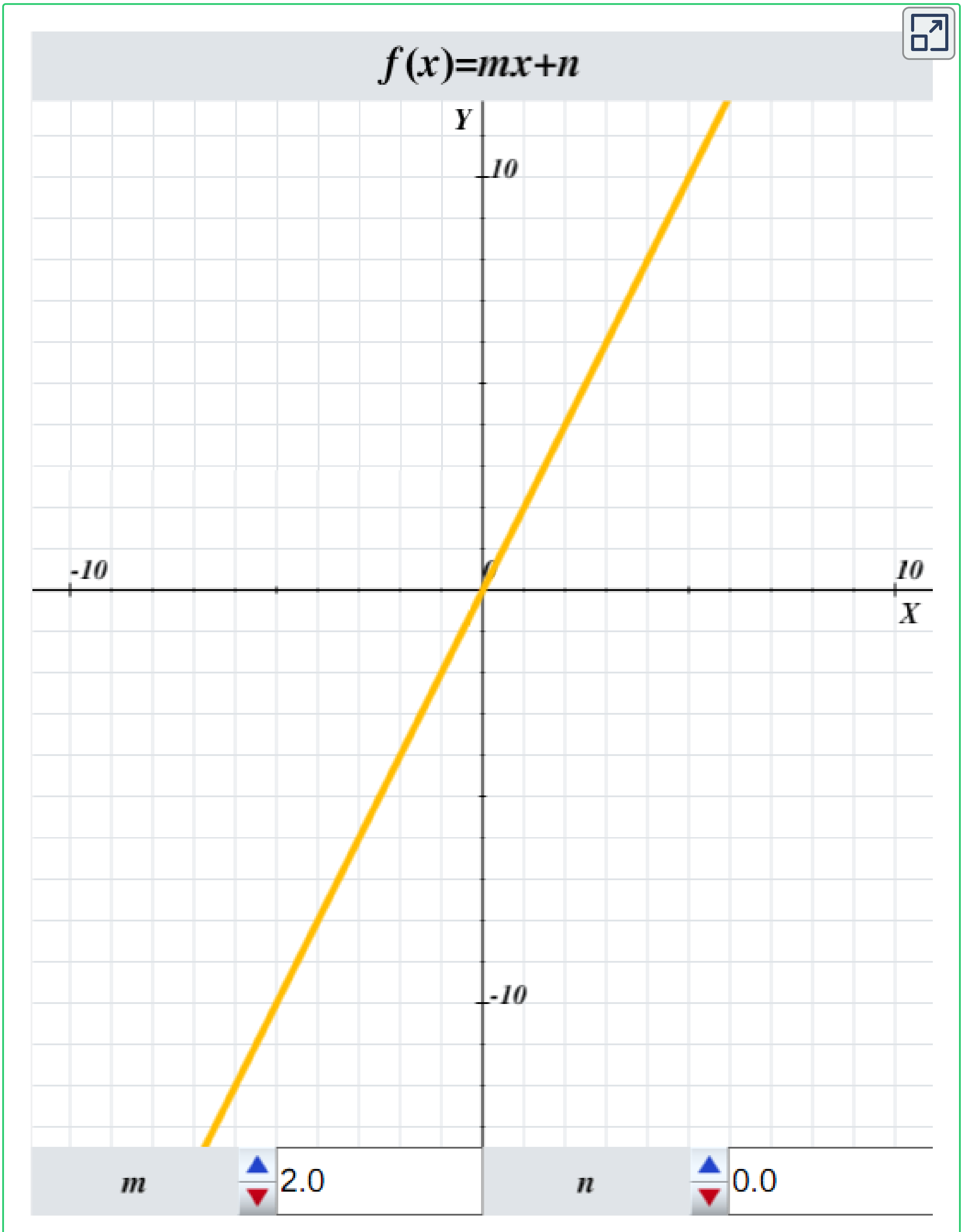
donde:
x es la variable independiente.
m es el coeficiente de la variable o pendiente de la recta.
n es el término dependiente u ordenada, e indica el punto en el que la recta cruza al eje Y.

Se representa gráficamente como una recta inclinada.

Desde el punto de vista geométrico, a mayor pendiente mayor inclinación de la recta, y viceversa.

En la escena interactiva, variando el valor de m puede observarse que si:

- $0 < m < 1$, el ángulo de inclinación de la pendiente es mayor que cero y menor a 45^{o}.
- $m > 1$, su ángulo de inclinación es mayor a 45^{o} y menor de 90^{o}.
- $m < 0$, es decir, si la pendiente es negativa, el ángulo de inclinación es mayor a 90^{o} y menor de 180^{o}.


$f(x)=mx+n$
Y
10
-10
0
10
X
-10
m
2.0
n
0.0

La función es *estrictamente creciente* si $m > 0$. En caso contrario, si $m < 0$, la función es *estrictamente decreciente*.

En tanto que, cuando $m = 1$ y $n = 0$, se trata de la *función identidad*.

En la escena interactiva, variando el valor del pulsador, se pueden ver las gráficas correspondientes.

También se utiliza la letra b para designar al término dependiente, de manera que la función se escribe:

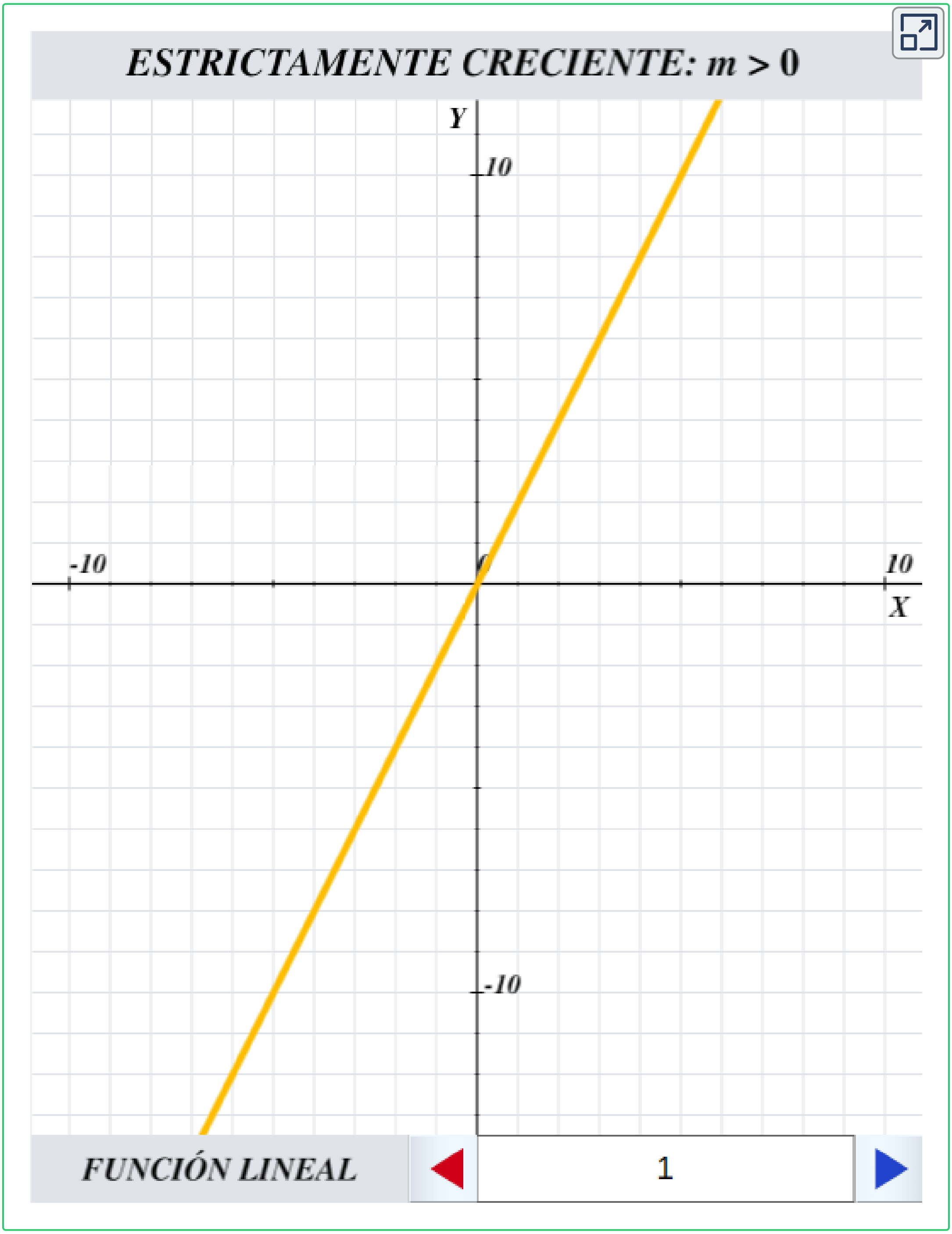
$$f(x) = mx + b$$

Otra forma, menos usual, sería:

$$f(x) = ax + b$$

Para trazar su gráfica se tienen los métodos:

- Parámetros. Conociendo los valores de (m y b), se eligen dos valores de x para encontrar el valor de $f(x)$ y obtener las coordenadas de dos puntos de la recta.
- Sustitución de valores. Teniendo dos puntos de la recta, se sustituyen sus coordenadas en la forma de la función, y se resuelve el sistema de ecuaciones.
- Intersección con los ejes coordenados. La recta siempre interseca con cada eje en un punto, $(0, f(0))$, eje de las ordenadas y $(x, 0)$, eje de las abscisas. Para calcular x, se hace $f(x) = 0$ y se resuelve la ecuación obtenida.


ESTRICTAMENTE CRECIENTE: m > 0
Y
10
-10
0
10
X
-10
FUNCIÓN LINEAL
1

6.4 Función polinomial de grado dos

Esta función, también conocida como función cuadrática, consta de tres términos:

- *Cuadrático.*
- *Lineal.*
- *Independiente.*

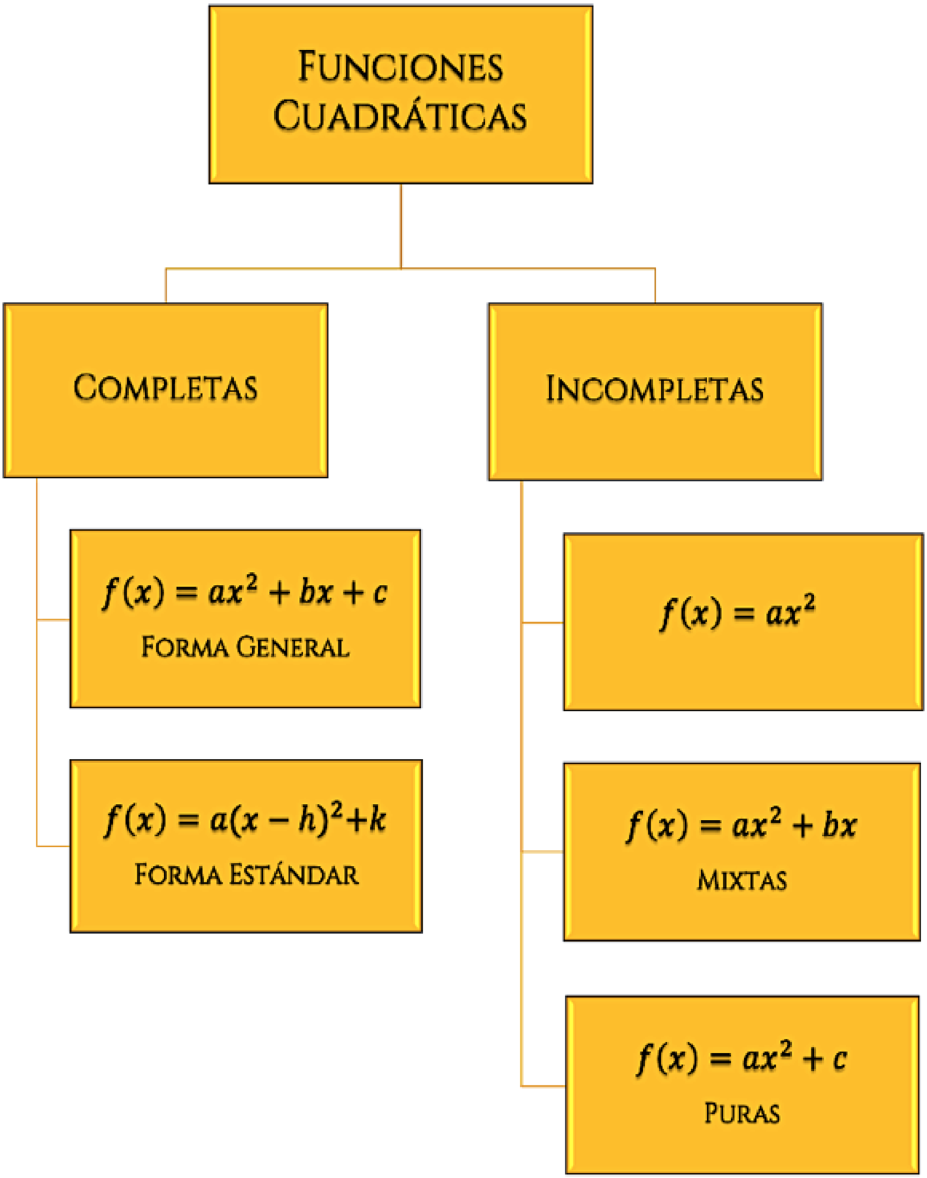
Como puede apreciarse en la imagen de la derecha, este tipo de función se clasifica en:

- *Completa*, si contiene todos los términos. Puede escribirse de en sus formas general o estándar, que se describen en las secciones siguientes.
- *Incompleta*, si carece del término lineal o el independiente, o ambos.

A su vez, las incompletas se denominan:

- *Puras*, si el que falta es el término lineal. Aquí, el vértice está en el punto $(0, c)$ con el eje de simetría en el eje Y.
- *Mixtas*, si no hay término independiente. En este caso, el vértice y el eje de simetría se calculan mediante las fórmulas indicadas para la expresión general.

Si la función consta sólo del término cuadrático, el vértice $V(v_x, v_y)$ se halla en el punto $(0, c)$ y el eje de simetría es el de las ordenadas.



FUNCIONES CUADRÁTICAS
COMPLETAS
INCOMPLETAS
$f(x) = ax^2 + bx + c$
FORMA GENERAL
$f(x) = a(x-h)^2 + k$
FORMA ESTÁNDAR
$f(x) = ax^2$
$f(x) = ax^2 + bx$
MIXTAS
$f(x) = ax^2 + c$
PURAS

Su representación gráfica es una parábola vertical, que puede cortar al eje de las abscisas en uno, dos o en ningún punto, conforme al número de raíces reales de la función.

Conviene recordar, que las raíces de la función son los valores que satisfacen la ecuación cuadrática generada al igualar la función a cero.

Así, dada la función:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se tiene la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Cuyas soluciones están dadas por:

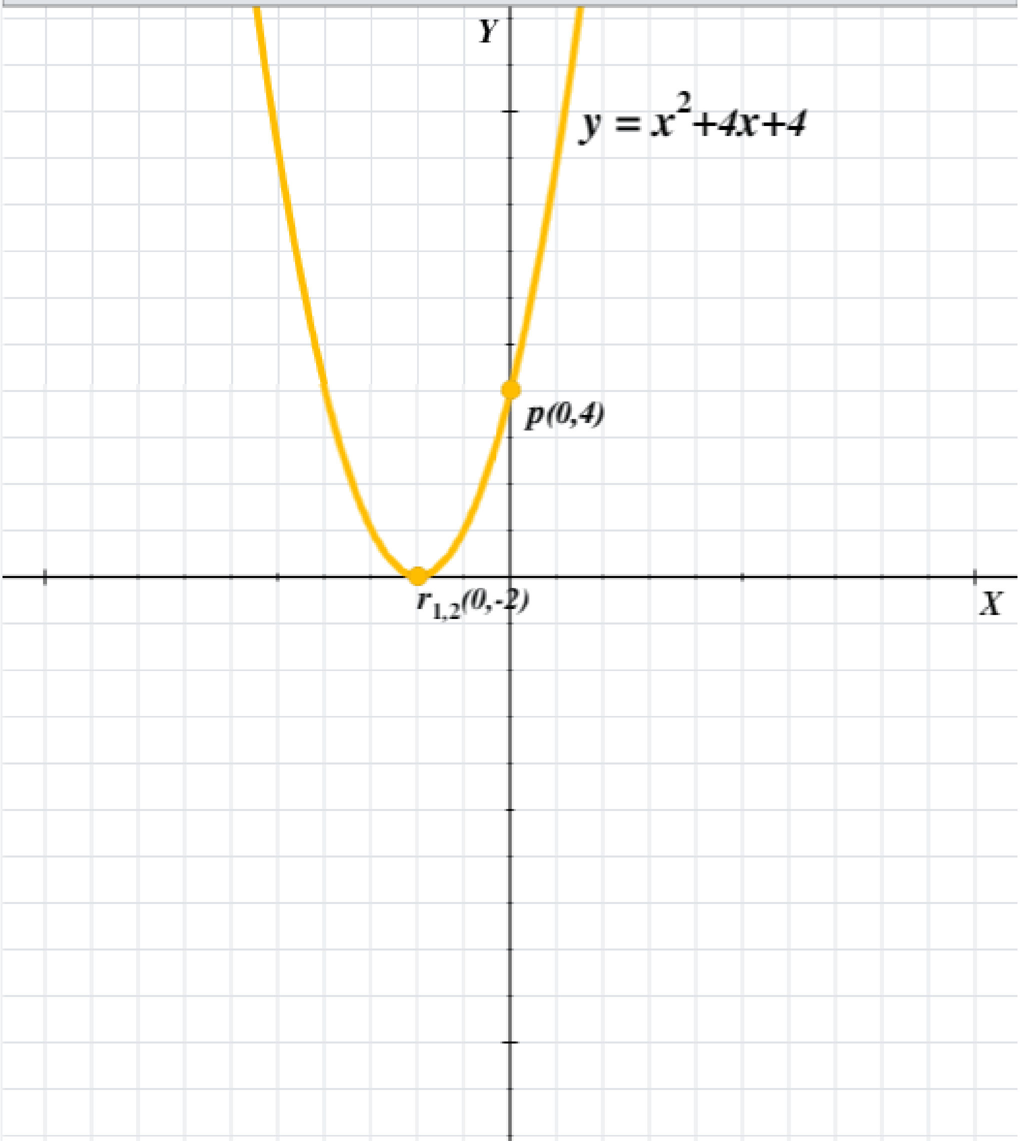
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Los valores de x_1 y x_2 corresponden a las raíces reales de $f(x)$.

En la escena interactiva de la derecha se presentan varios ejemplos, en ellos se puede observar también que la parábola interseca al eje de las ordenadas en el punto $p(0, c)$

La función cruza al eje X en *un* punto, lo que indica que tiene *una* raíz real.



EJEMPLO 1

6.4.1 Forma general

La función *polinomial de grado dos* o *polinomial cuadrática* tiene la forma general:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde:
a, b, c son los coeficientes (constantes).
$a \neq 0$ es la condición esencial.
ax^2 es el término cuadrático.
bx es el término lineal.
c es el término independiente.

Como ya se indicó, su gráfica es una parábola vertical, cuyo eje de simetría (recta dorada en la escena interactiva) es paralelo al eje Y y se calcula mediante:

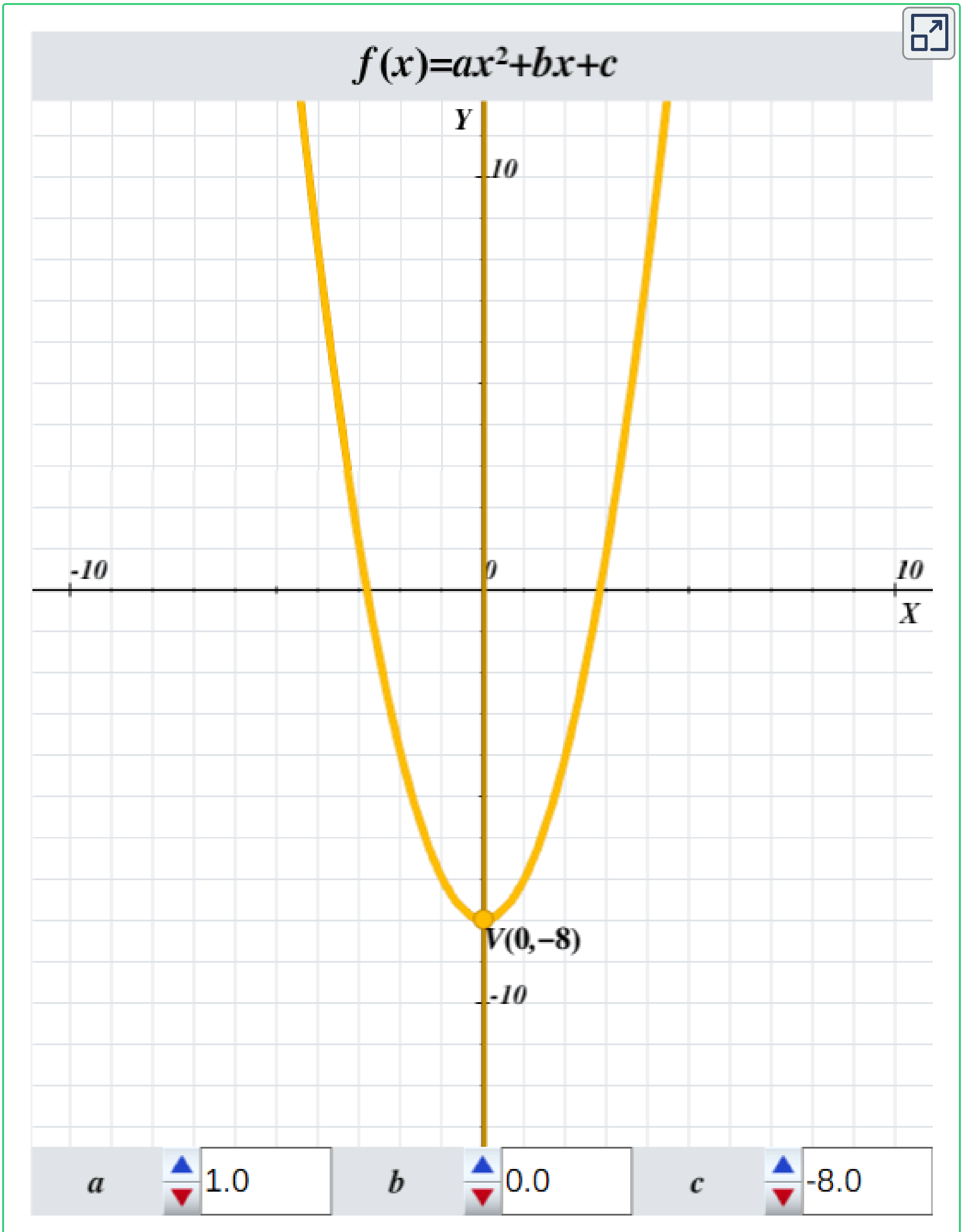
$$x = -b/2a$$

Las coordenadas del vértice V están dadas por:

$$v_x = -b/2a \qquad v_y = (-b^2 + 4ac)/4a$$

Variando, en el interactivo, el valor del coeficiente a, se observa que:

- La abertura de la parábola depende de éste.
- Si $a > 0$, la parábola es cóncava, la función $f(x)$ tiene el valor mínimo en el vértice, es decreciente en el intervalo $(-\infty, v_x)$ y creciente en el intervalo (v_x, ∞).
- Si $a < 0$ la parábola es convexa, el vértice indica el valor máximo de la función $f(x)$, es creciente en el intervalo $(-\infty, v_x)$ y decreciente en el intervalo (v_x, ∞).


$f(x)=ax^2+bx+c$
Y
10
-10
0
10
X
V(0,–8)
-10
a
1.0
b
0.0
c
-8.0

6.4.2 Forma estándar

La forma estándar de la función *cuadrática* es:

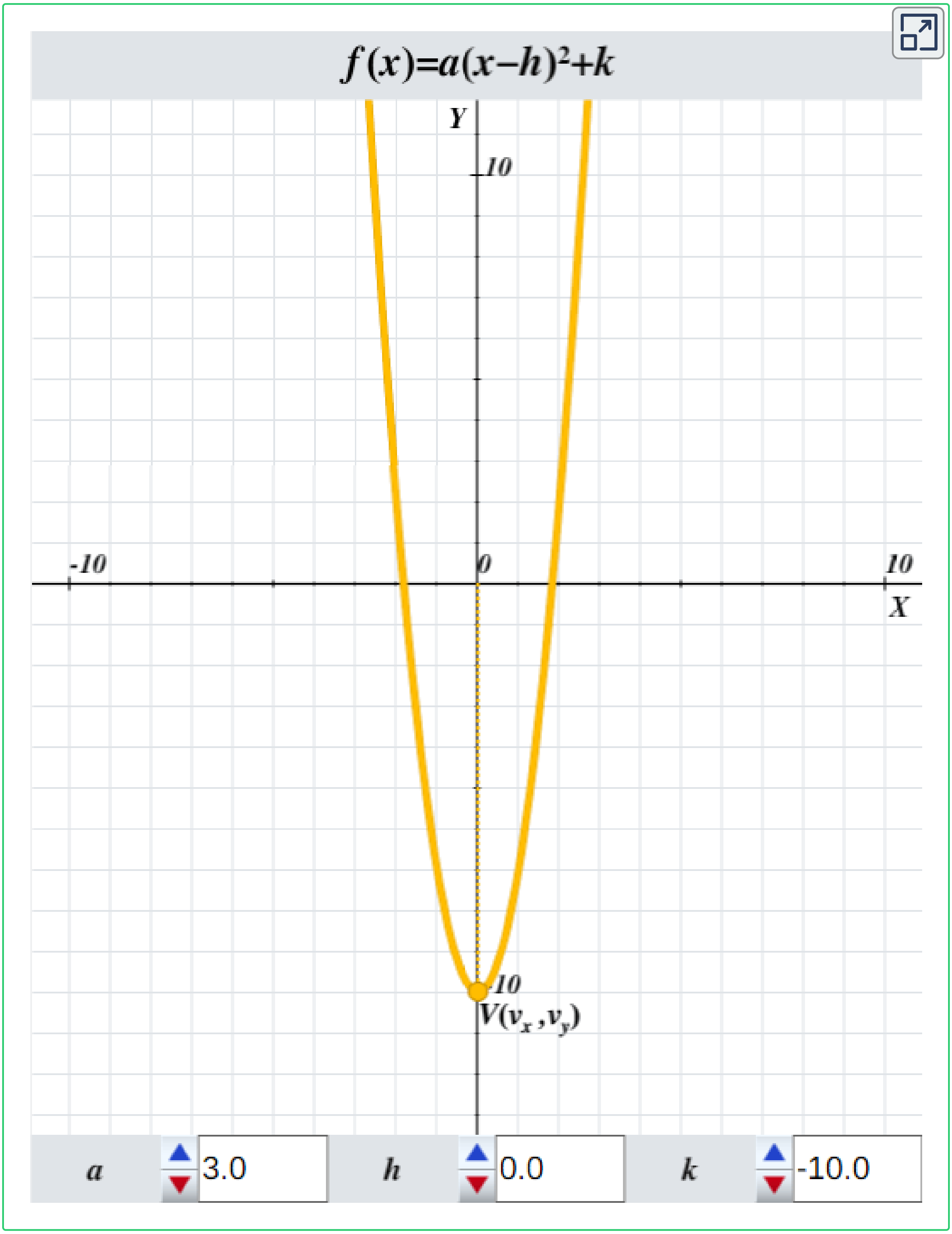
$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

donde:
a es el coeficiente principal.
$a \neq 0$ es la condición esencial.
h y k son las coordenadas del vértice V.

El utilizar esta expresión, permite visualizar mejor las modificaciones dadas en la gráfica por la variación de los coeficientes, ya que en ella se indican de manera explícita tanto el vértice, como la abertura de la parábola.

Cambiando los valores de a, h y k en la escena interactiva, se puede observar directamente en la gráfica que cuando:

- $a > 0$ la parábola es cóncava.
- $a < 0$ la parábola es convexa.
- $V(v_x, v_y) = V(h, k)$.



$f(x)=a(x-h)^2+k$
Y
10
-10
0
10
X
-10
$V(v_x, v_y)$
a
3.0
h
0.0
k
-10.0

6.5 Función polinomial de grado tres

A la función *polinomial de grado tres* se le llama también *polinomial cúbica*.

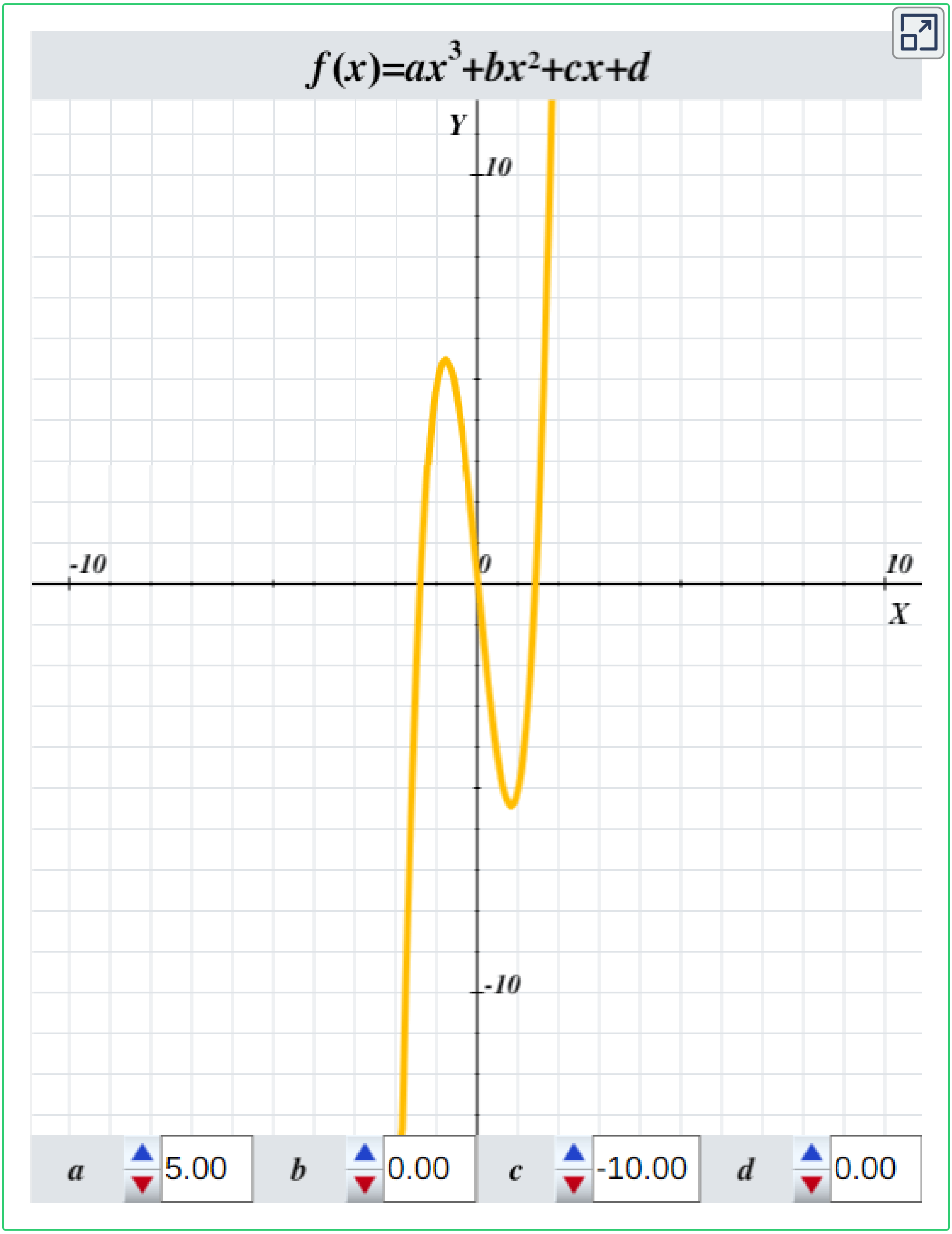
Su forma general es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

donde:
a, b, c y d son los coeficientes (constantes).
$a \neq 0$ es la condición esencial.
ax^3 es el término cúbico.
bx^2 es el término cuadrático.
cx es el término lineal.
d es el término independiente.

La gráfica de la función *cúbica* puede tener entre uno y tres puntos de corte en el eje X, pero siempre interseca al eje Y en el punto $(0, d)$.

Esto puede observarse al variar los coeficientes en la escena interactiva, en la que inicialmente la gráfica interseca al eje de las abscisas en tres puntos y al eje de las ordenadas en el punto $(0, 0)$.


f(x)=ax³+bx²+cx+d
Y
10
-10
0
10
X
-10
a
5.00
b
0.00
c
-10.00
d
0.00

6.6 Función polinomial de grado cuatro

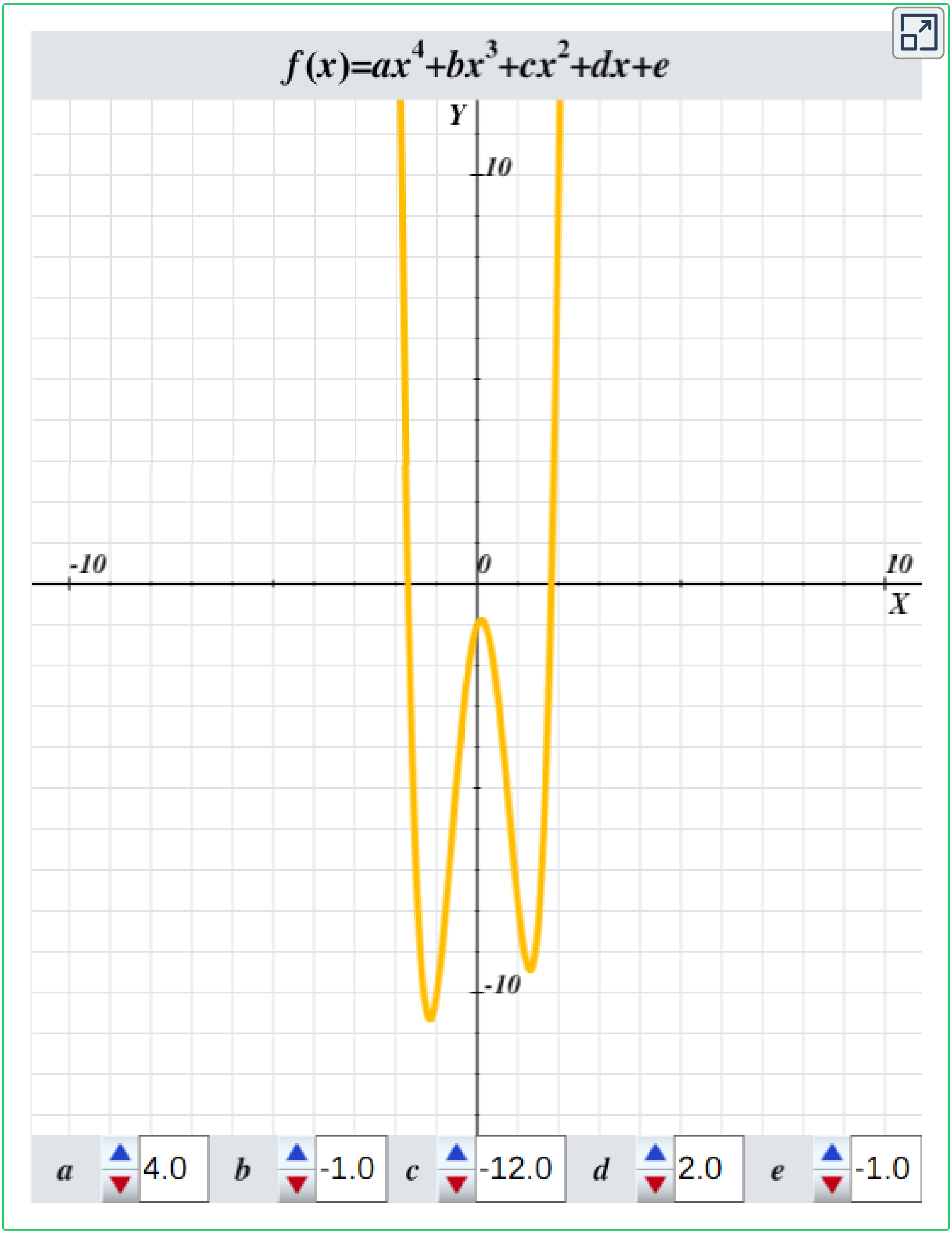
La función *polinomial de grado cuatro* es conocida asimismo como *polinomial cuártica*.

Su forma general es:

$$f(x) = ax^4 + b^3 + cx^2 + dx + e$$

donde:
a, b, c y d son los coeficientes (constantes).
$a \neq 0$ es la condición esencial.
ax^4 es el término a la cuarta potencia.
bx^3 es el término cúbico.
cx^2 es el término cuadrático.
dx es el término lineal.
e es el término independiente.

Variando los coeficientes en la escena interactiva, pueden observarse los cambios en la gráfica.



$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
Y
10
-10
0
10
X
-10
a
4.0
b
-1.0
c
-12.0
d
2.0
e
-1.0

6.7 Funciones polinomiales y sus gráficas

En el campo de texto *FUNCIÓN POLINOMIAL* de la escena interactiva, introduce alguna función de las presentadas en este capítulo, y observa cómo se comporta la gráfica correspondiente al variar los parámetros.

La notación para escribir la función es:
^ para la potencia de la variable independiente,
$/$ para la división,
$()$ para agrupar los términos que así lo requieran, *Intro* para terminar.

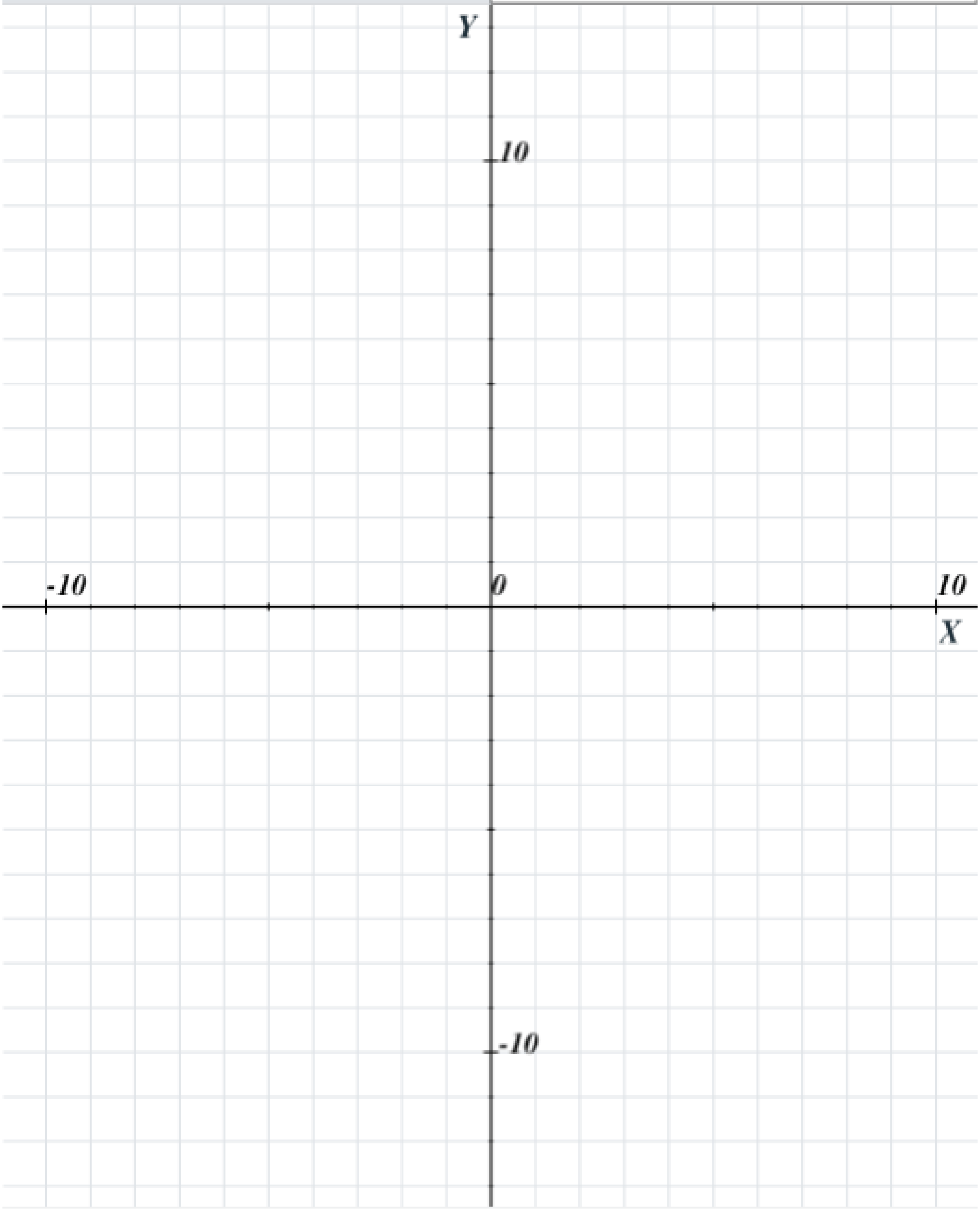
Por ejemplo, la función:

$$5x^3 + 2x^2 + 4$$

debe escribirse:

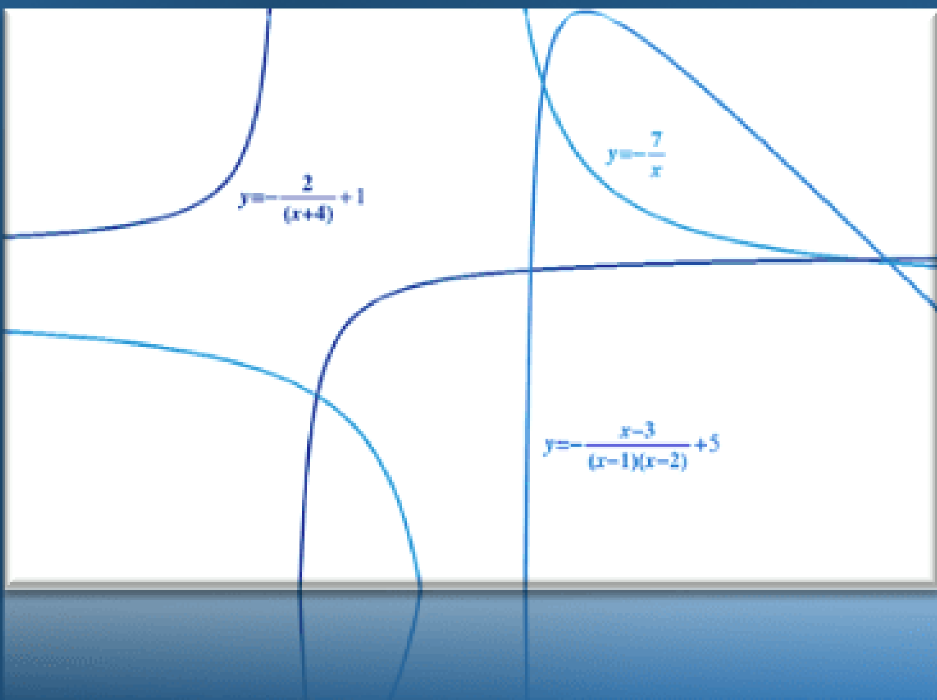
5x^3+2x^2+4

FUNCIÓN POLINOMIAL



CAPÍTULO 7

Funciones racionales



7.1 Definición

Como su nombre lo indica, la ***función racional*** se refiere a una razón o cociente, irreductible, de dos polinomios. Tiene la forma general:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde:
$P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.
x es la variable independiente.
$Q(x) \neq 0$ es condición esencial.

Su dominio es el conjunto de $\mathbb{R}$, exceptuando los valores de x que anulan a $Q(x)$, éstos son conocidos como valores excluidos, ceros o raíces de la función. Formalmente se expresa como:

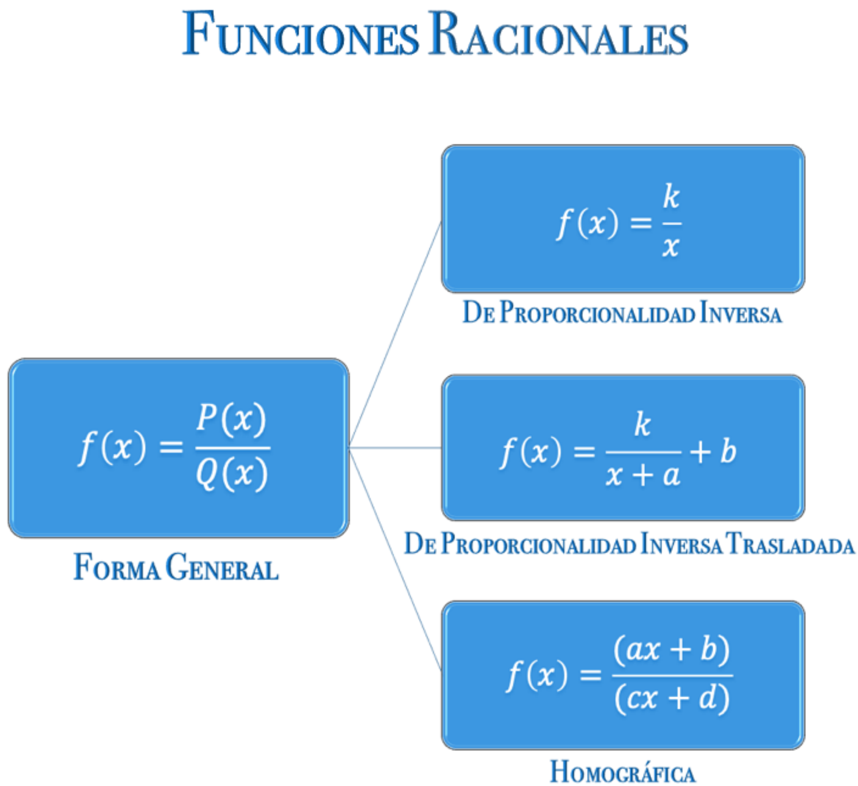
$$f : \mathbf{D}_f = \mathbb{R} - x \in \mathbb{R} | Q(x) = 0$$

Para cada uno de ellos hay una asíntota vertical cuando x toma dicho valor, esto es, si a es una raíz de $f(x)$, entonces la función tiene una asíntota vertical en $x = a$. Si el grado de:

- $P(x)$ es mayor que el de $Q(x)$ hay una asíntota oblicua.
- $P(x)$ es igual al de $Q(x)$ existe una asíntota horizontal en $y = m/n$, donde m y n son los coeficientes de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$ respectivamente.
- $P(x)$ es menor al de $Q(x)$, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 0$.

7.2 Casos particulares

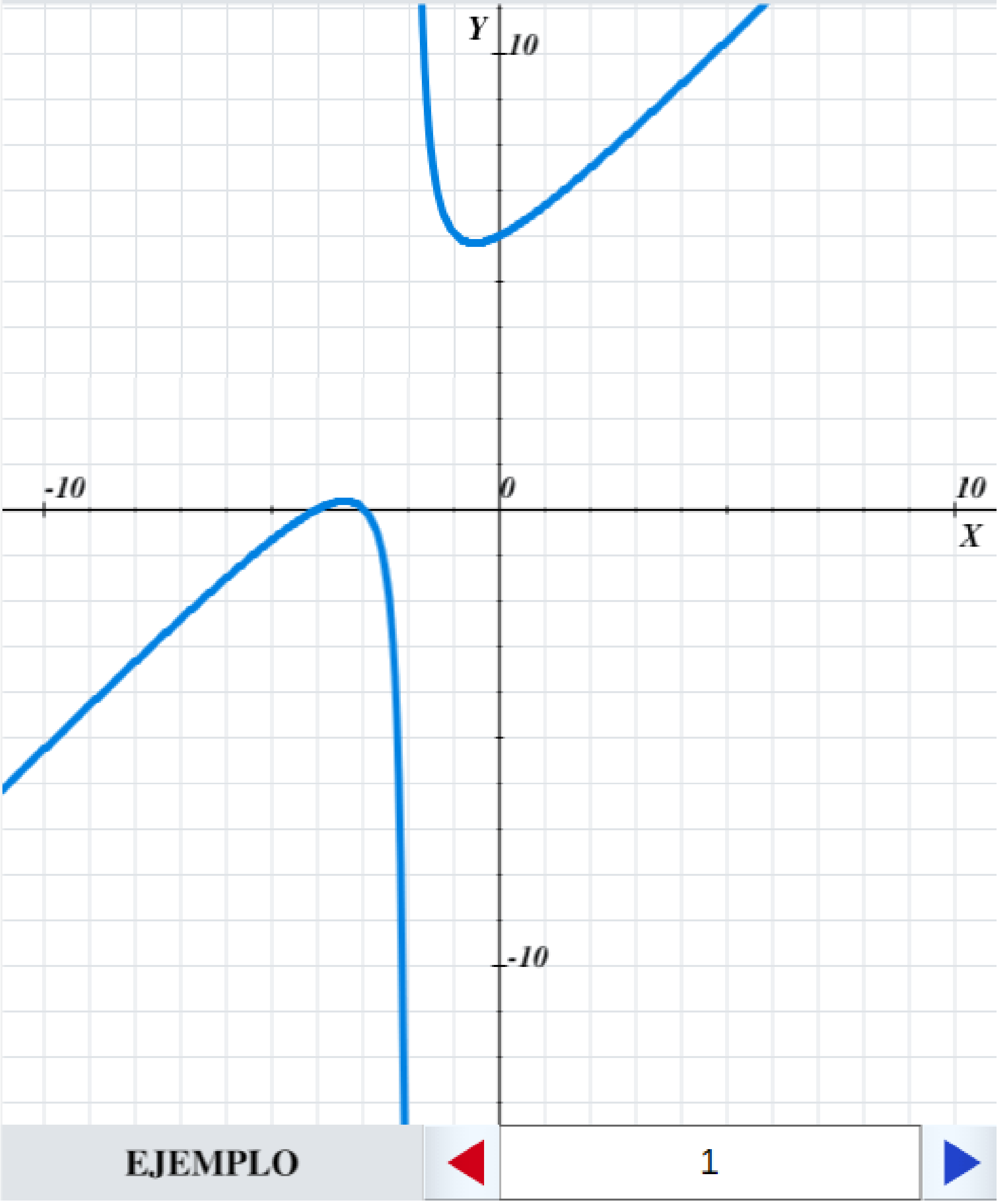
Existen tres casos particulares de las funciones racionales: *de proporcionalidad inversa*, *de proporcionalidad inversa trasladada* y *homográfica.*



Desde el punto de vista gráfico, este tipo de función adopta diversas formas, como se puede apreciar en los ejemplos presentados en la escena interactiva.

Como puede observarse, para *funciones racionales de primer grado*, la gráfica es la correspondiente a una hipérbola.

$$f(x) = \frac{x+4}{(x+2)(x+3)}$$



7.3 Función racional de proporcionalidad inversa

La función *racional de proporcionalidad inversa*, se llama así debido a que relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales.

Es la forma más sencilla de las funciones racionales, y se define como:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

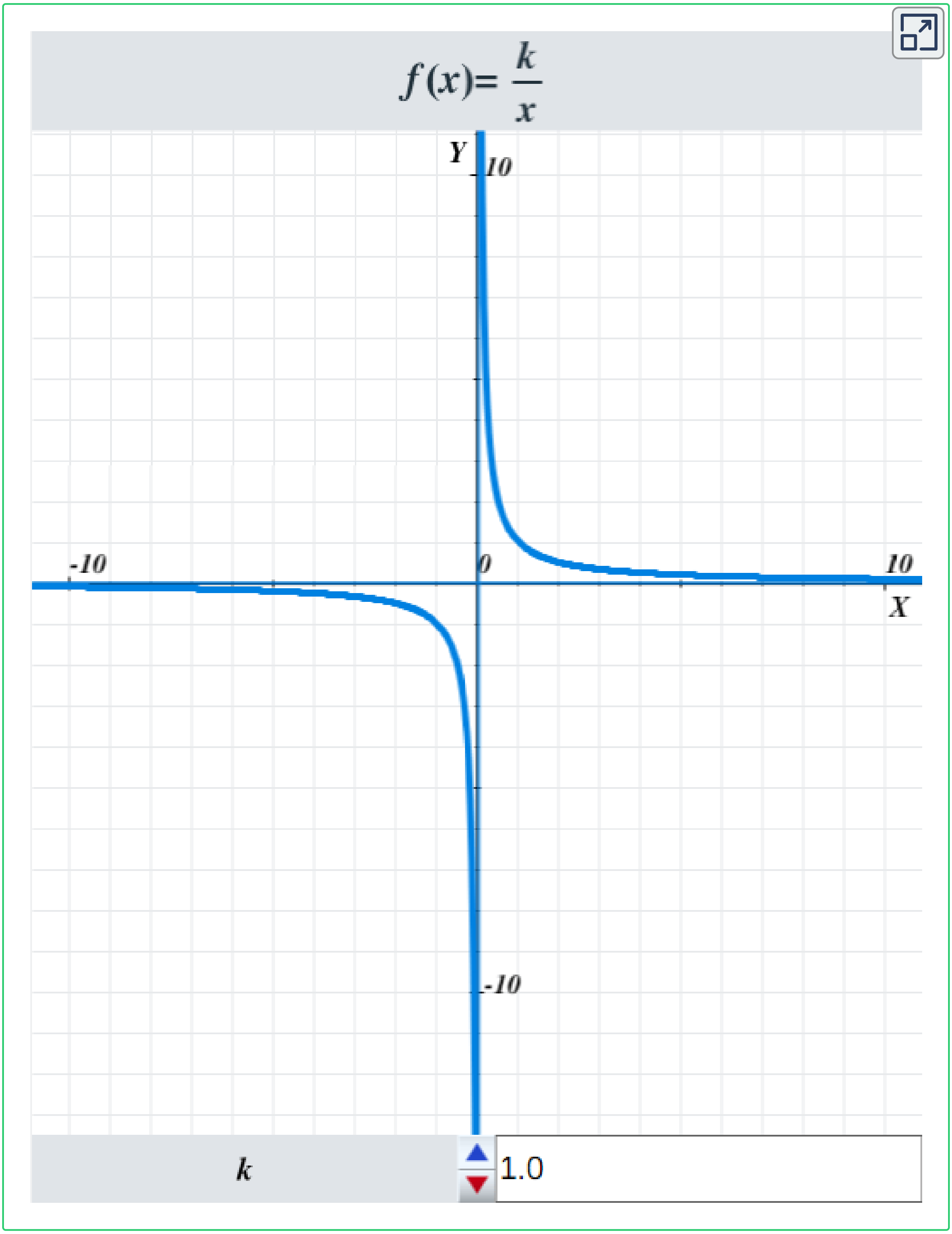
donde:
k es la constante de proporcionalidad.

Tanto su dominio como su rango están en el conjunto de los números reales, con excepción del cero.

Su gráfica es una hipérbola, cuyas asíntotas se hallan en los ejes X y Y.

En la escena interactiva, se puede notar que, si:

- $|k| > 1$ la gráfica se aleja del origen.
- $|k| < 1$ la gráfica se acerca al origen.
- $k > 0$ la gráfica se ubica en los cuadrantes 1 y 3.
- $k < 0$ la gráfica se ubica en os cuadrantes 2 y 4.



$f(x) = \frac{k}{x}$
Y
10
-10
0
10
X
-10
k
1.0

7.4 Función racional de proporcionalidad inversa trasladada

Como su nombre lo indica, la función *racional de proporcionalidad inversa trasladada* es una función *racional de proporcionalidad inversa* desplazada.

El desplazamiento oblicuo se da con la forma general:

$$f(x) = \frac{k}{x+m} + n$$

donde:
k es la constante de proporcionalidad.
m y n son las constantes de traslación.

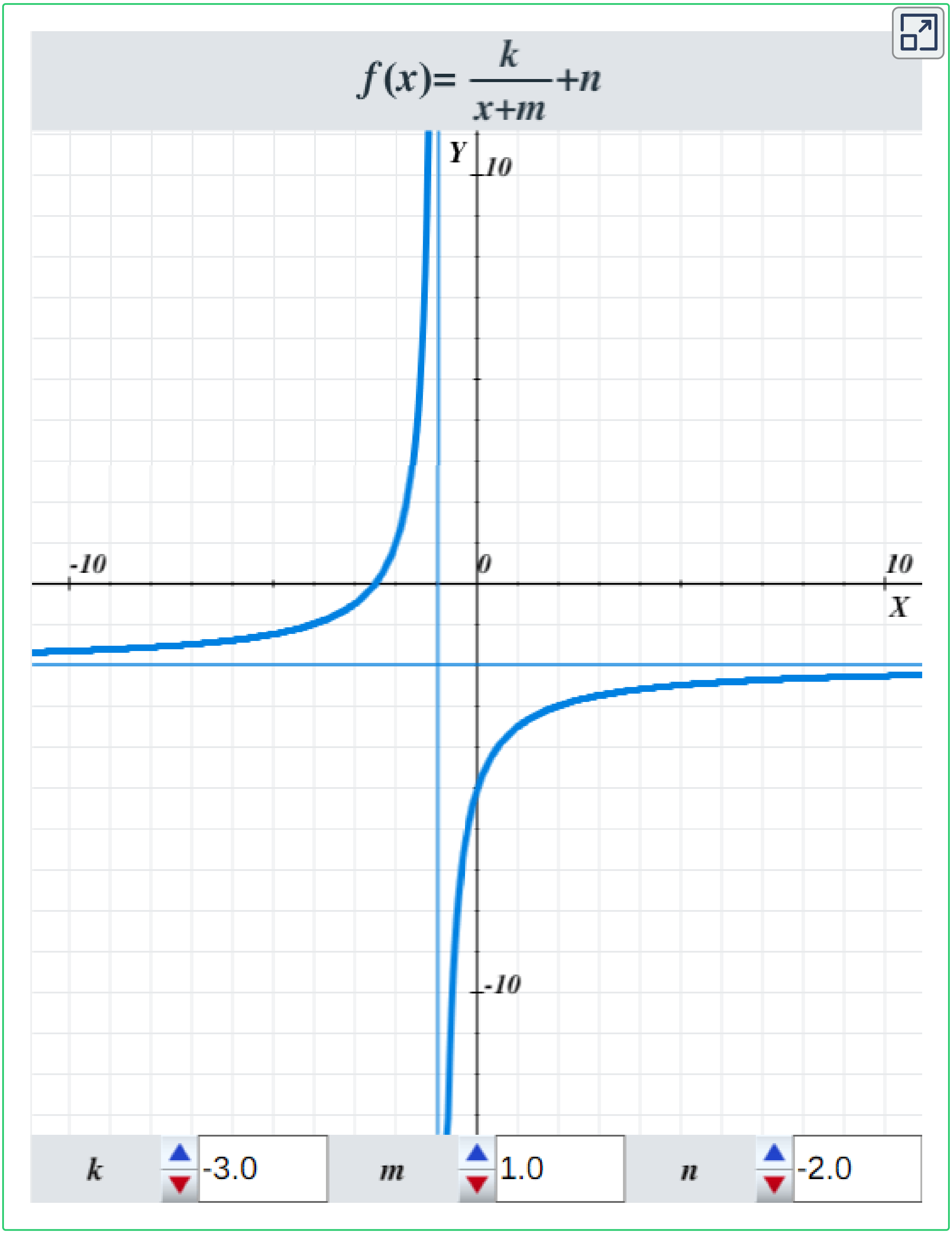
Las expresiones particulares de traslación son:

$$x = \frac{k}{x+m} \text{ (horizontal)}$$

$$x = \frac{k}{x} + n \text{ (vertical)}$$

Al variar el valor de los parámetros, en la escena interactiva, se ven dichos desplazamientos. Así, si

- $m > 0$ hacia la izquierda.
- $m < 0$ hacia la derecha.
- $n > 0$ hacia arriba.
- $n < 0$ hacia abajo.



$f(x) = \frac{k}{x+m} + n$
Y
10
-10
0
10
X
-10
k
-3.0
m
1.0
n
-2.0

7.5 Función racional homográfica o racional lineal

La función *racional homográfica* o *racional lineal*, se caracteriza porque $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios de grado uno:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

donde:
x es la variable independiente.
a, b, c y d son los parámetros de la función.

Existe sólo un valor excluido, para encontrarlo se tiene que resolver la ecuación obtenida al hacer:

$$cx + d = 0$$

Este valor es la solución de la ecuación y también se le conoce como *cero* o *raíz* del polinomio.

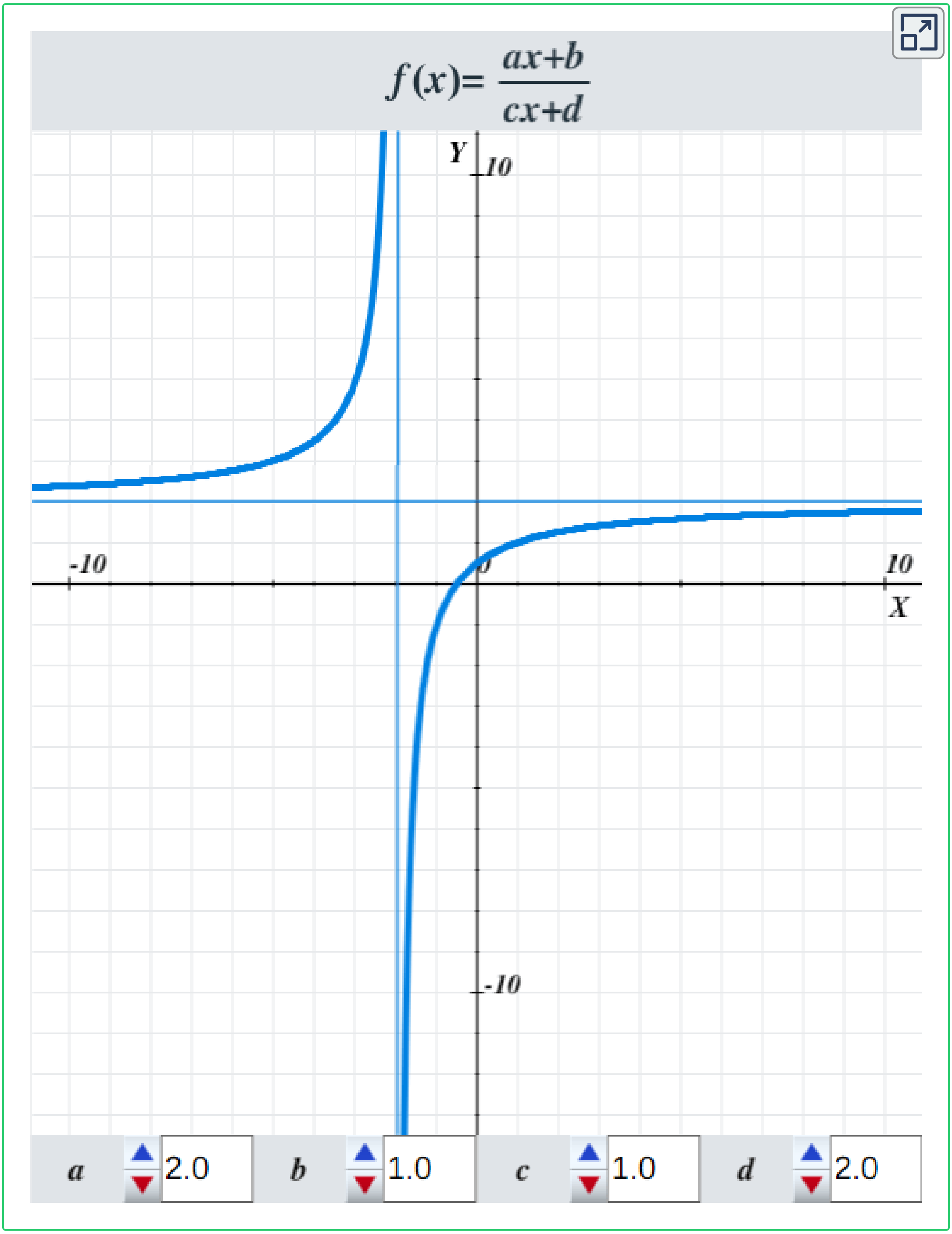
La asíntotas vertical y horizontal están dadas por:

$$x = \frac{-d}{c}$$

$$y = \frac{a}{c}$$

Como puede observarse en la escena interactiva, si:

- $ad \neq bc$, la gráfica es una hipérbola equilátera
- $ad = bc$, la gráfica es una constante.



$f(x)= \dfrac{ax+b}{cx+d}$
Y
10
-10
0
10
X
-10
a
2.0
b
1.0
c
1.0
d
2.0

7.6 Función racionales y sus gráficas

En la escena interactiva, introduce alguna función de las descritas en este capítulo en el campo de texto *FUNCIÓN RACIONAL* y observa la forma de su gráfica.

Al escribir la función hay que utilizar:
^ para la potencia de la variable independiente,
$/$ para la división,
$()$ para agrupar los términos que así lo requieran, *Intro* para terminar.

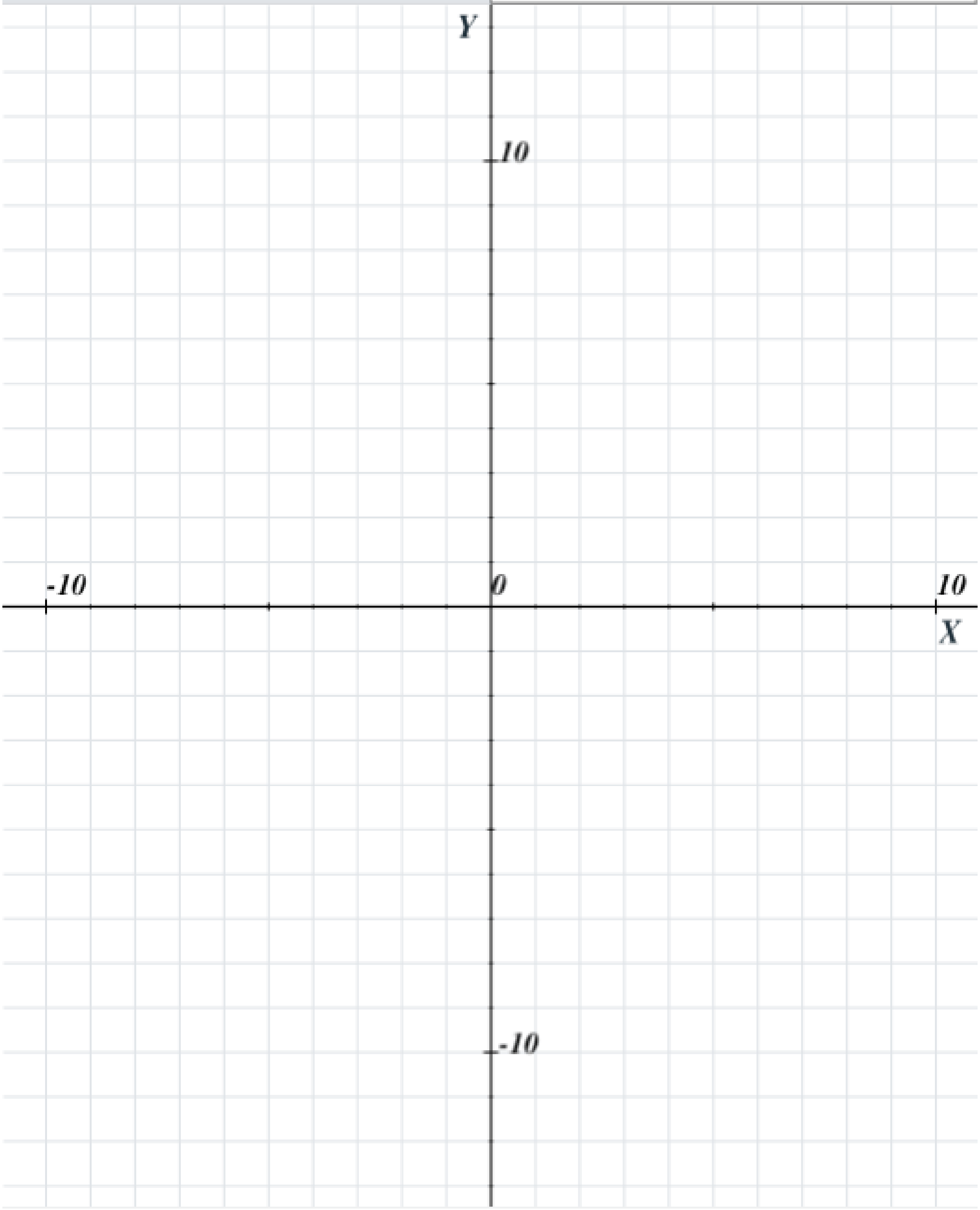
Por ejemplo, la función

$$\frac{3}{(x+1)(x-2)}$$

debe escribirse:

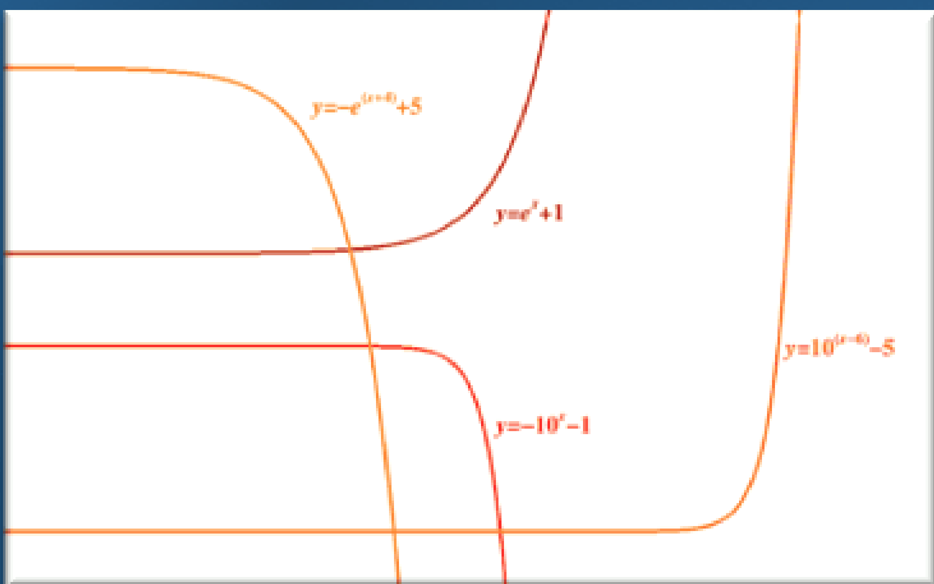
```
3/((x+1)(x-2))
```

FUNCIÓN RACIONAL



CAPÍTULO 8

Funciones exponenciales



8.1 Definición

La *función exponencial* se denomina así debido a que la variable independiente se halla en la posición del exponente. Se define de la siguiente manera:

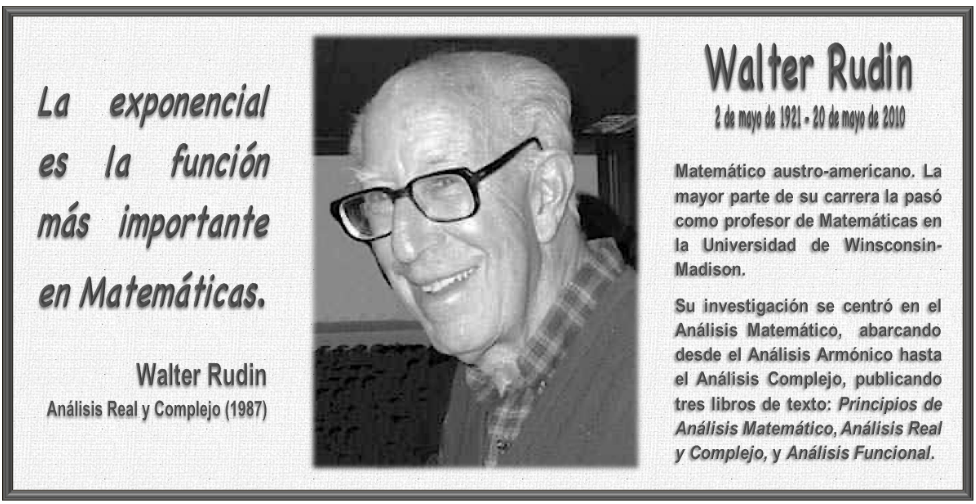
"Sea x cualquier número real, la función exponencial base a es una función de la forma:

$$f(x) = a^x$$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 1$.

Así, se dice que a^x es una función exponencial de base a y exponente x. El valor $a = 1$ se excluye porque con éste, se tendría la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

Con las restricciones $a > 0$ y $a \neq 1$, su dominio es el conjunto de los números reales y su rango el de los números reales positivos.



Las más importantes, y las que tienen mayor aplicación, son aquellas en las que $a = 10$ o $a = e$.

Esta última es llamada *función exponencial natural*:

$$f(x) = e^x$$

8.2 Número e

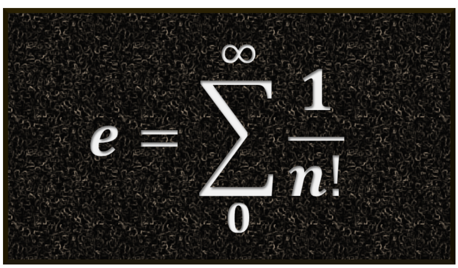
Conviene recordar aquí que el número e es uno de los números irracionales y trascendentes más importantes en *Matemáticas*. Su valor truncado a sus primeras cifras decimales es:

$$2.71828182845904523536\ldots$$

Es conocido como *número de Euler* porque *Leonhard Paul Euler* fue quien le identificó con la letra e, y con sus aportaciones dio un tratamiento definitivo a las ideas preexistetes sobre esta constante.

En 1748, *Euler* publicó su obra *Introductio in analysin infinitorum* (*Introducción al análisis del infinito*), en la que mostró el valor de e, aproximándolo a 18 cifras decimales, como la serie:

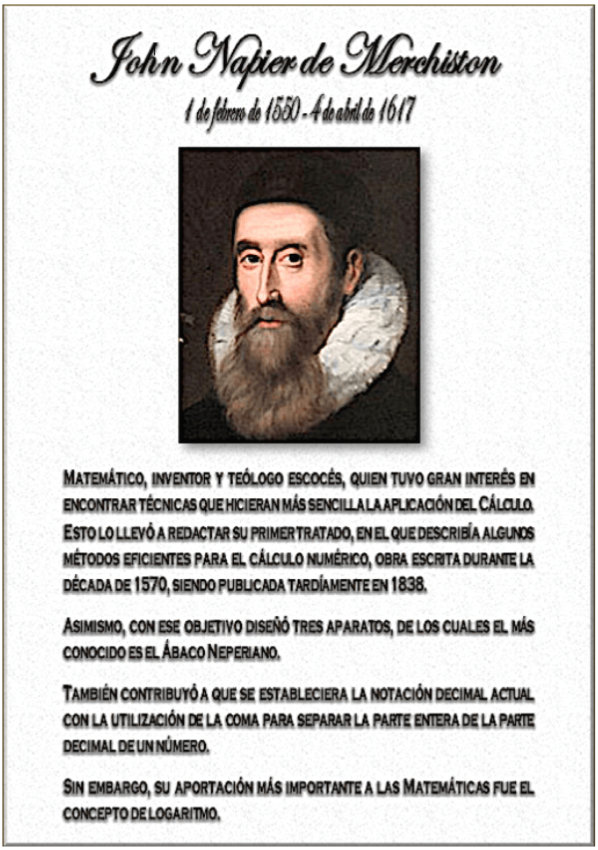
$$e = 1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{1*2*3*4} + \ldots$$



También se le define como el límite de la sucesión $(1 + (1/n))^n$.

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Asimismo, se le denomina *constante de Napier*, debido a que fue *John Napier de Merchiston* el primero en reconocerlo y utilizarlo.



8.3 Funciones exponenciales y sus propiedades

Como puede verse en la escena interactiva, las gráficas de las funciones exponenciales tienen las siguientes propiedades:

- Se acercan mucho al eje X pero nunca lo tocan.
- Se acercan al eje Y conforme el valor de a aumenta.
- Como $a^0 = 1$ pasan por el punto $(0, 1)$.
- Como $a^1 = a$ pasan por el punto *(1,a)*.
- Son continuas.
- Son estrictamente crecientes si $a > 1$.
- Son estrictamente decrecientes si $0 < a < 1$.
- El eje X es la asíntota horizontal.

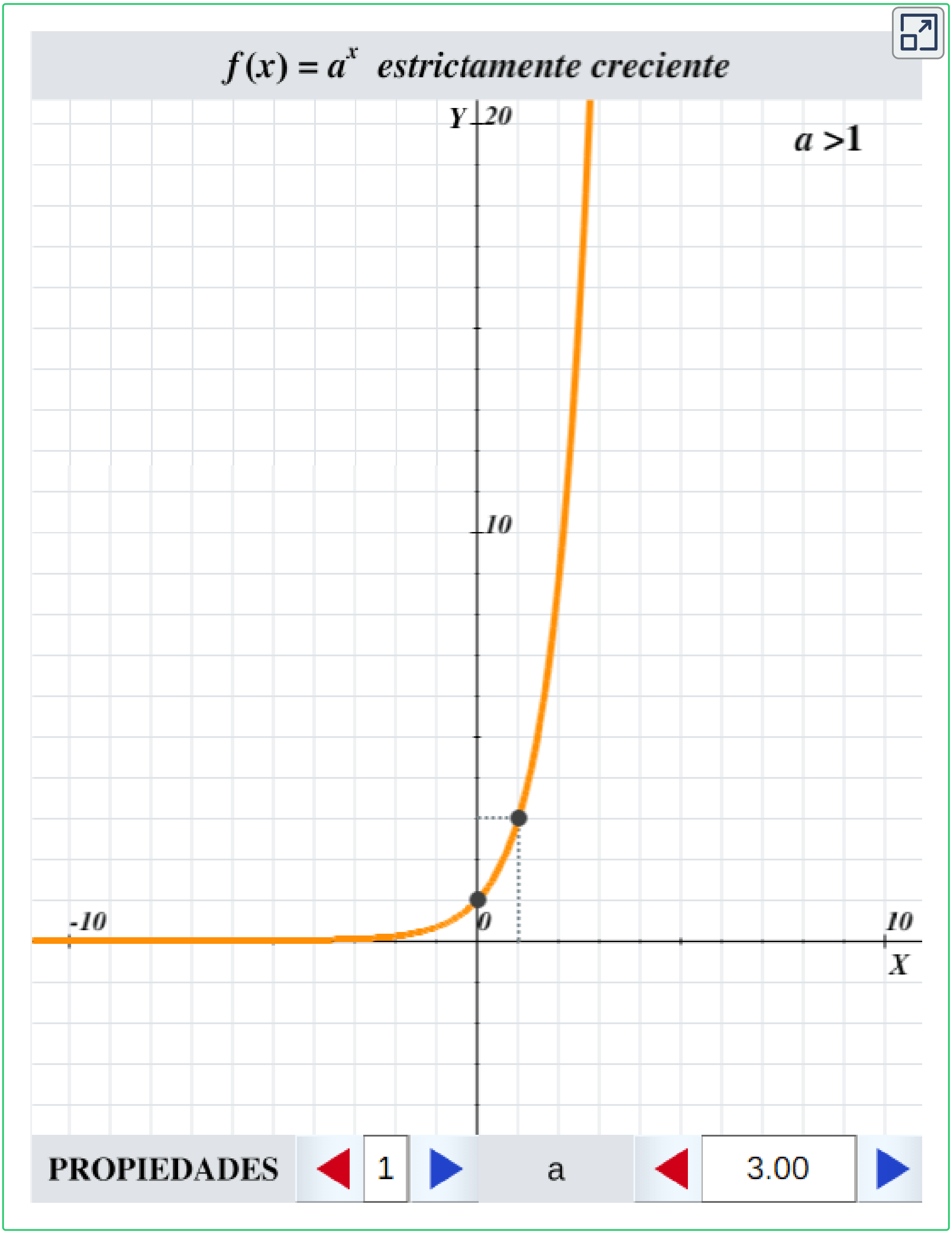
También puede observarse que las gráficas de las funciones:

$$f(x) = a^x \text{ y } f(x) = a^{-x}$$

son simétricas respecto al eje OY.

Lo mismo aplica en el caso de la *función exponencial natural*:

$$f(x) = e^x \text{ y } f(x) = e^{-x}$$


$f(x) = a^x$ estrictamente creciente
Y
20
$a > 1$
10
-10
0
10
X
PROPIEDADES
1
a
3.00

8.4 Funciones exponenciales transformadas

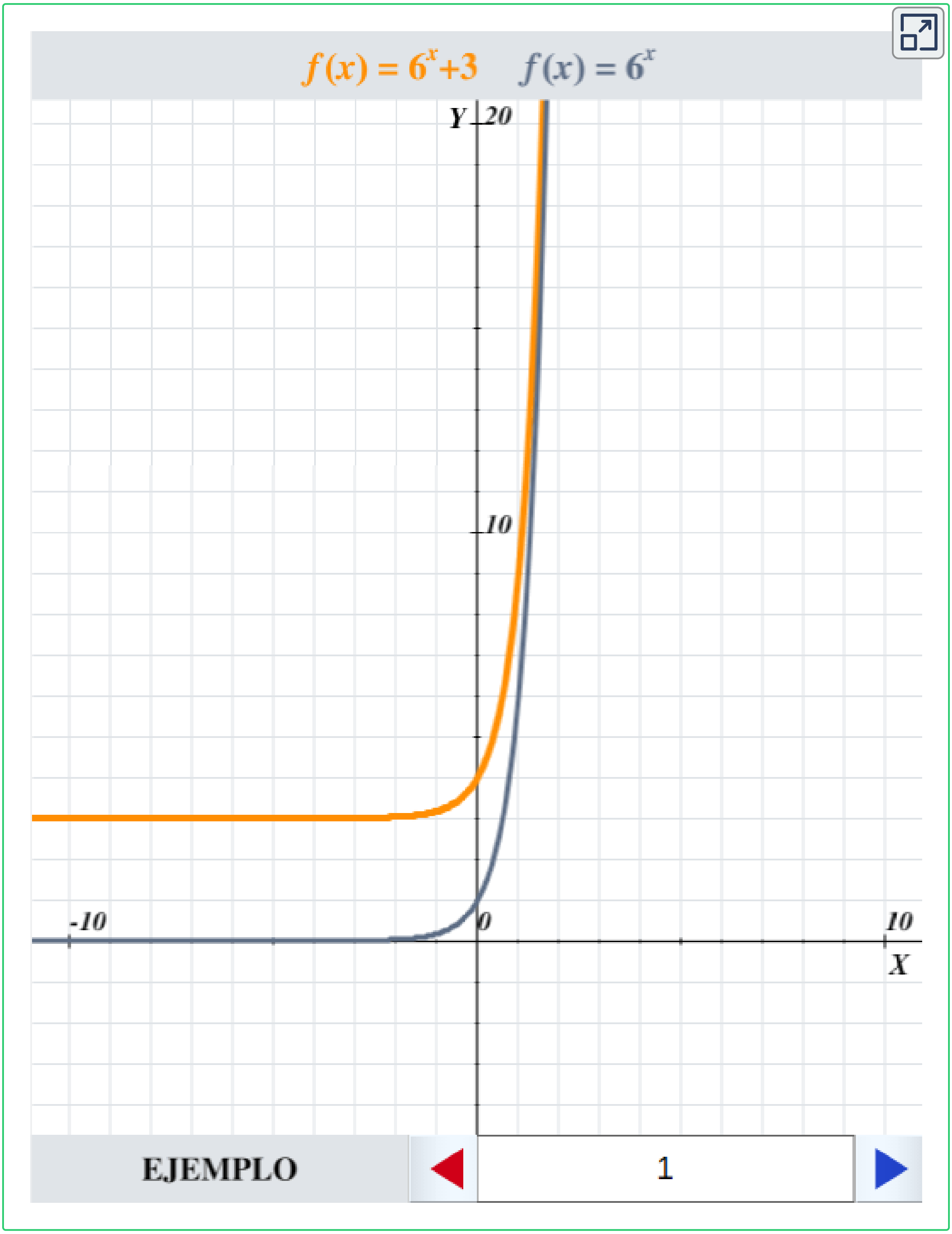
Al utilizarlas, conviene tener en cuenta las *leyes de los exponentes*:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^m = a^m b^m$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

Mediante la adición de algunos parámetros se pueden transformar, a la función resultante se le denomina *función de forma exponencial*. Las traslaciones se hacen con las constantes b (horizontal) y c (vertical):

$$f(x) = a^{x+b} + c$$

En la escena interactiva se presentan algunos de estos casos, observa los cambios en las gráficas.



$f(x) = 6^x + 3$ $f(x) = 6^x$
Y
20
10
-10
0
10
X
EJEMPLO
1

8.5 Funciones exponenciales y sus gráficas

En la escena interactiva, introduce alguna función de las descritas en este capítulo en el campo de texto *FUNCIÓN EXPONENCIAL* y observa la forma y características de su gráfica.

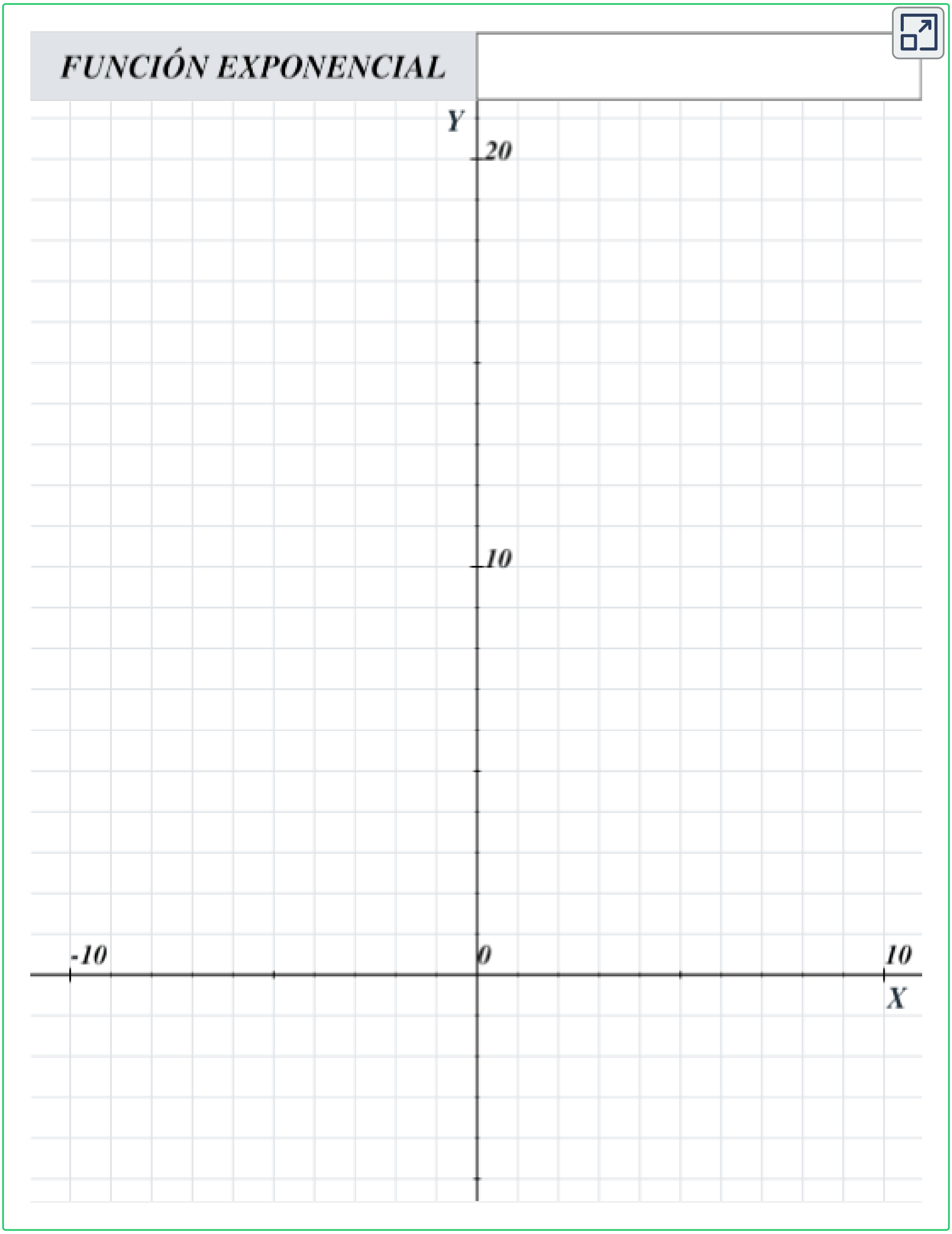
Al escribir la función hay que utilizar:
^ para la potencia de la base,
$/$ para la división,
$()$ para agrupar los términos que así lo requieran, *Intro* para terminar.

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = (\frac{3}{4})^x$$

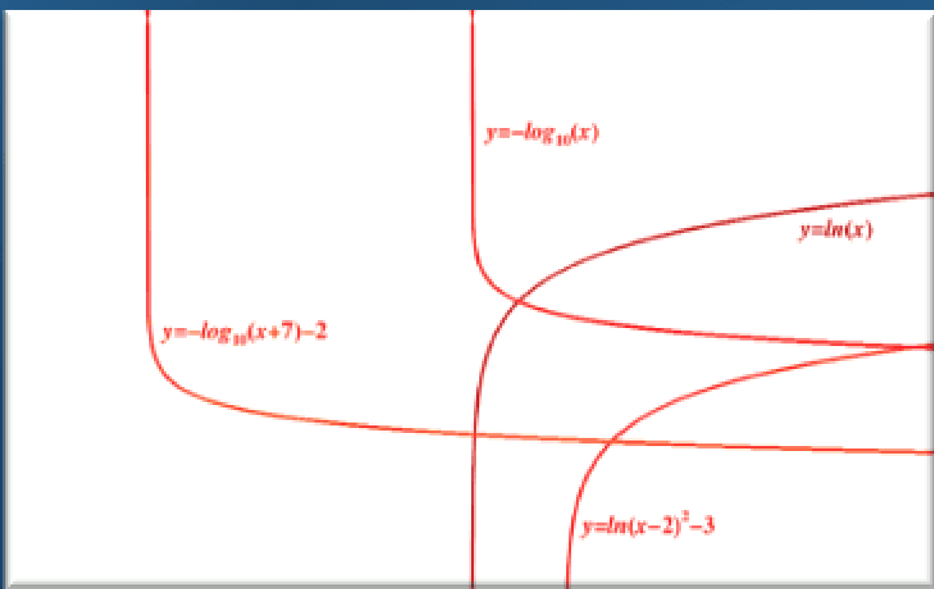
debe escribirse:

(3/4)^x


FUNCIÓN EXPONENCIAL
Y
20
10
-10
0
10
X

CAPÍTULO 9

Funciones logarítmicas



9.1 Concepto de *logaritmo*

Dado que la *función logarítmica*, como su nombre lo indica, está basada en el concepto de *logaritmo*, es pertinente incluir algunos comentarios al respecto.

Este concepto surgió a principios del siglo XVII, de los estudios realizados por *John Napier de Merchiston*, orientados a encontrar métodos eficientes de cálculo, siendo ésta su contribución más importante a las *Matemáticas*. En particular, su objetivo era simplificar los difíciles cálculos astronómicos. Su trabajo sobre este tema quedó plasmado en sus obras:

- *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción de una admirable tabla de logaritmos), publicada en 1614.
- *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (Construcción de una admirable tabla de logaritmos), cuya publicación fue hecha de manera póstuma por su hijo *Robert* en 1619.

En un principio utilizó el término *números artificiales* para designarlos. Posteriormente creó su nombre actual.

LOGARITMO

DEL GRIEGO:

Logos QUE SIGNIFICA PROPORCIÓN.

Arithmos QUE QUIERE DECIR NÚMERO.

El logaritmo se define de la siguiente manera:

$$log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x; \;\; x, a > 0; \;\; a \neq 1$$

9.2 Definición

La forma general de este tipo de función es:

$$f(x) = log_a(x)$$

donde:
a es la base.
$a > 0$ y $a \neq 1$ es condición esencial.
x es la variable independiente.

Así, se dice que $f(x)$ es igual al logaritmo base a de x.

Las bases que se utilizan más frecuentemente son aquellas en las que $a = 10$ o $a = e$, por lo que son las descritas en esta sección.

La primera es la *función logarítmica de base 10*, cuya expresión es:

$$f(x) = log_(10)(x)$$

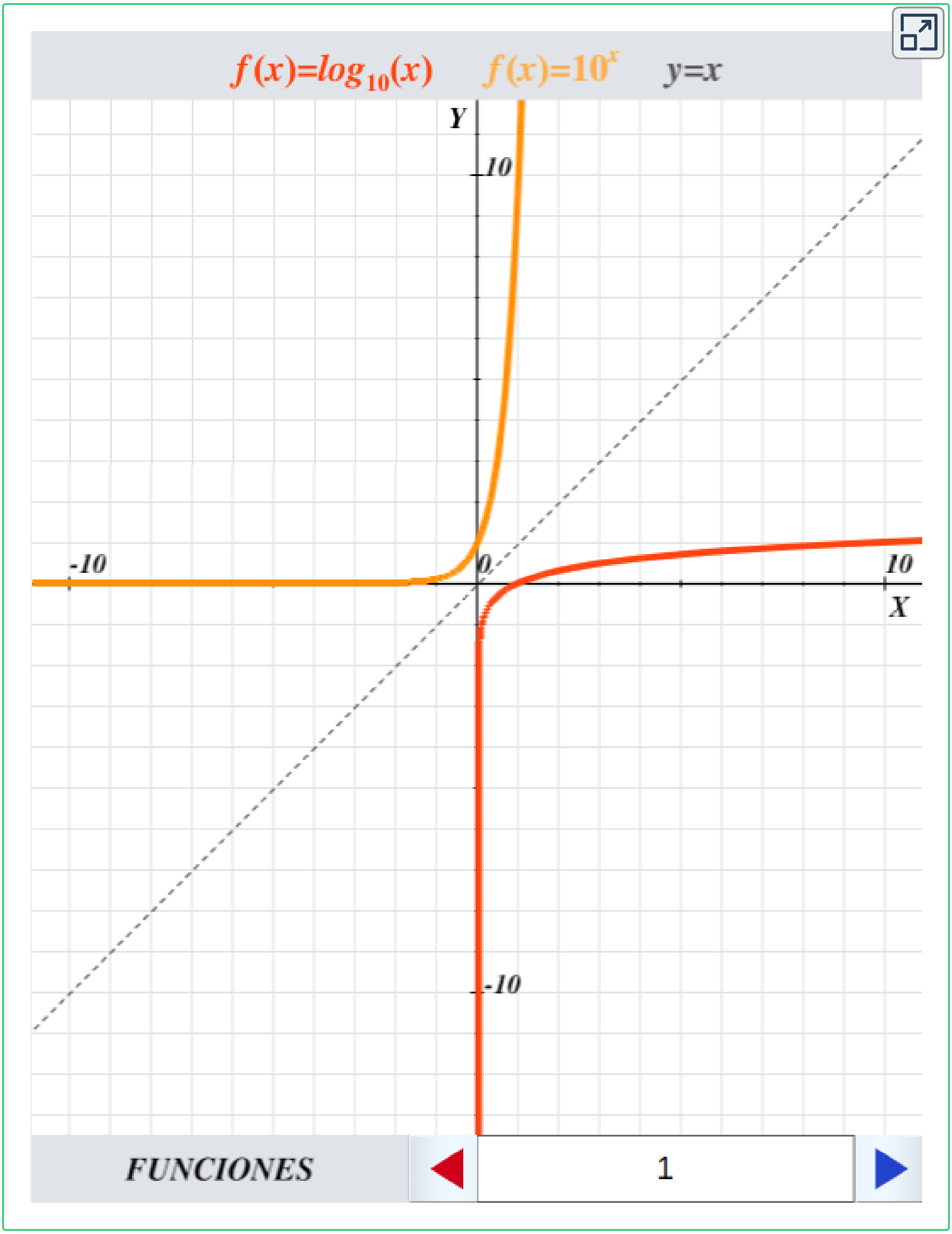
La segunda se denomina *función logarítmica natural* y se escribe:

$$f(x) = ln(x)$$

De la definición de *logaritmo* enunciada, se desprende que la *función logarítmica* es la inversa de la *función exponencial*, por lo que el dominio de la primera es el rango de la segunda y viceversa.

Como se puede observar en la escena interactiva de la derecha, sus gráficas son simétricas respecto a la recta:

$$y = x$$


$f(x)=log_{10}(x)$
$f(x)=10^x$
$y=x$
Y
10
-10
0
10
X
-10
FUNCIONES
1

9.3 Funciones logarítmicas y sus propiedades

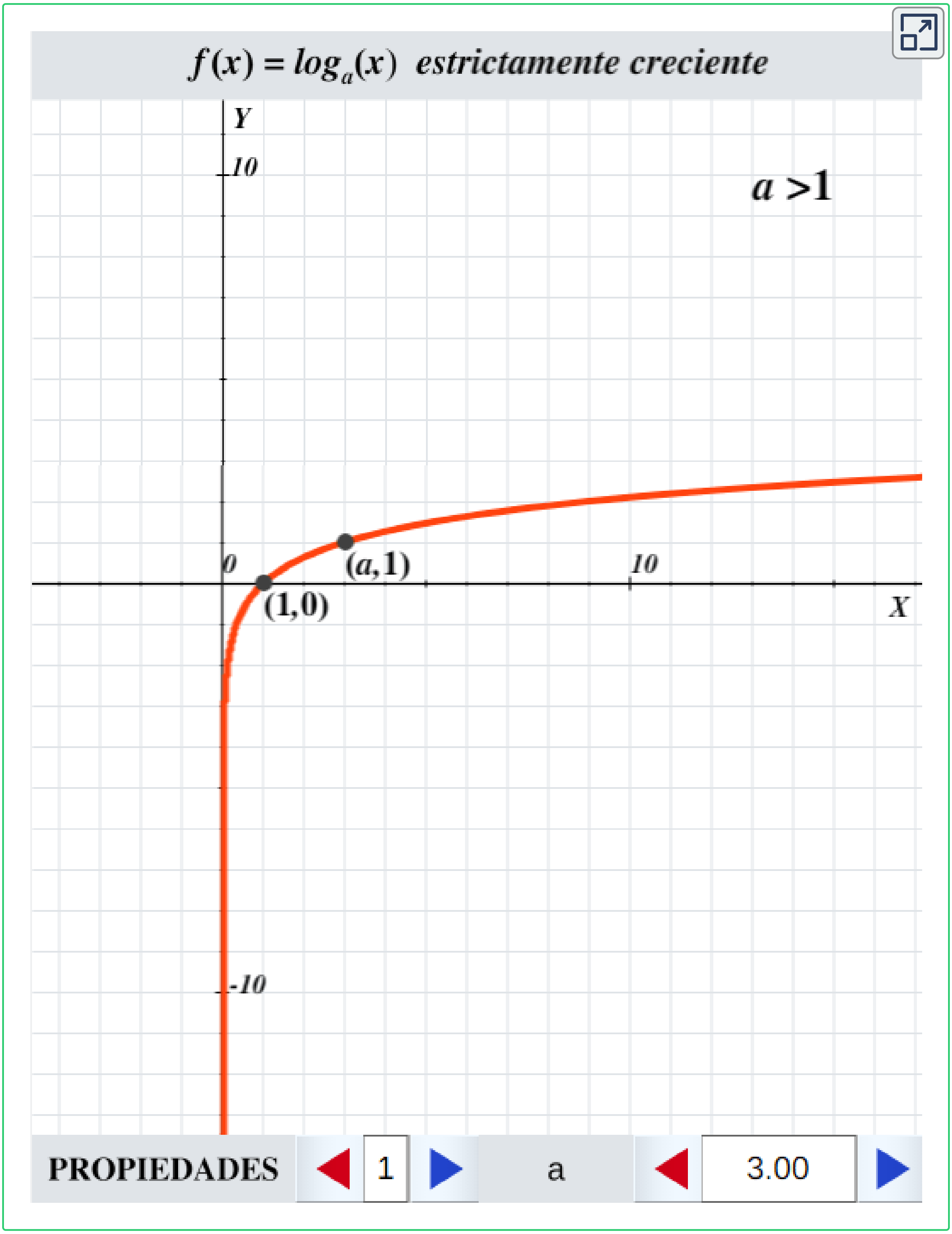
Como puede verse en la escena interactiva, las gráficas de las funciones logarítmicas tienen las siguientes propiedades:

- Se acercan al eje X al incrementarse el valor de a.
- Dado que el $log_a(1) = 0$, pasan por el punto $(1, 0)$, que es el de intersección al eje OX.
- Dado que el $log_a(a) = 1$, pasan por el punto $(a, 1)$.
- Son continuas.
- Son estrictamente crecientes si $a > 1$.
- Son estrictamente decrecientes si $0 < a < 1$.
- El eje OY es la asíntota vertical. De manera que no lo intersecan.

Asimismo, puede observarse la simetría que, con respecto al eje OX, presentan las gráficas de las funciones:

$$f(x) = log_a(x) \text{ y } f(x) = log_{-a}(x)$$

Lo mismo sucede en el caso de la *función logarítmica natural.*



$f(x) = log_a(x)$ estrictamente creciente
Y
10
$a > 1$
0
(a,1)
10
(1,0)
X
-10
PROPIEDADES
1
a
3.00

9.4 Funciones logarítmicas transformadas

Al utilizarlas, conviene tener en cuenta las siguientes propiedades de los logaritmos:

- $log_a(1) = 0$
- $log_a(a) = 1$
- $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$
- $log_a(x^n) = nlog_a(x)$
- $log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$

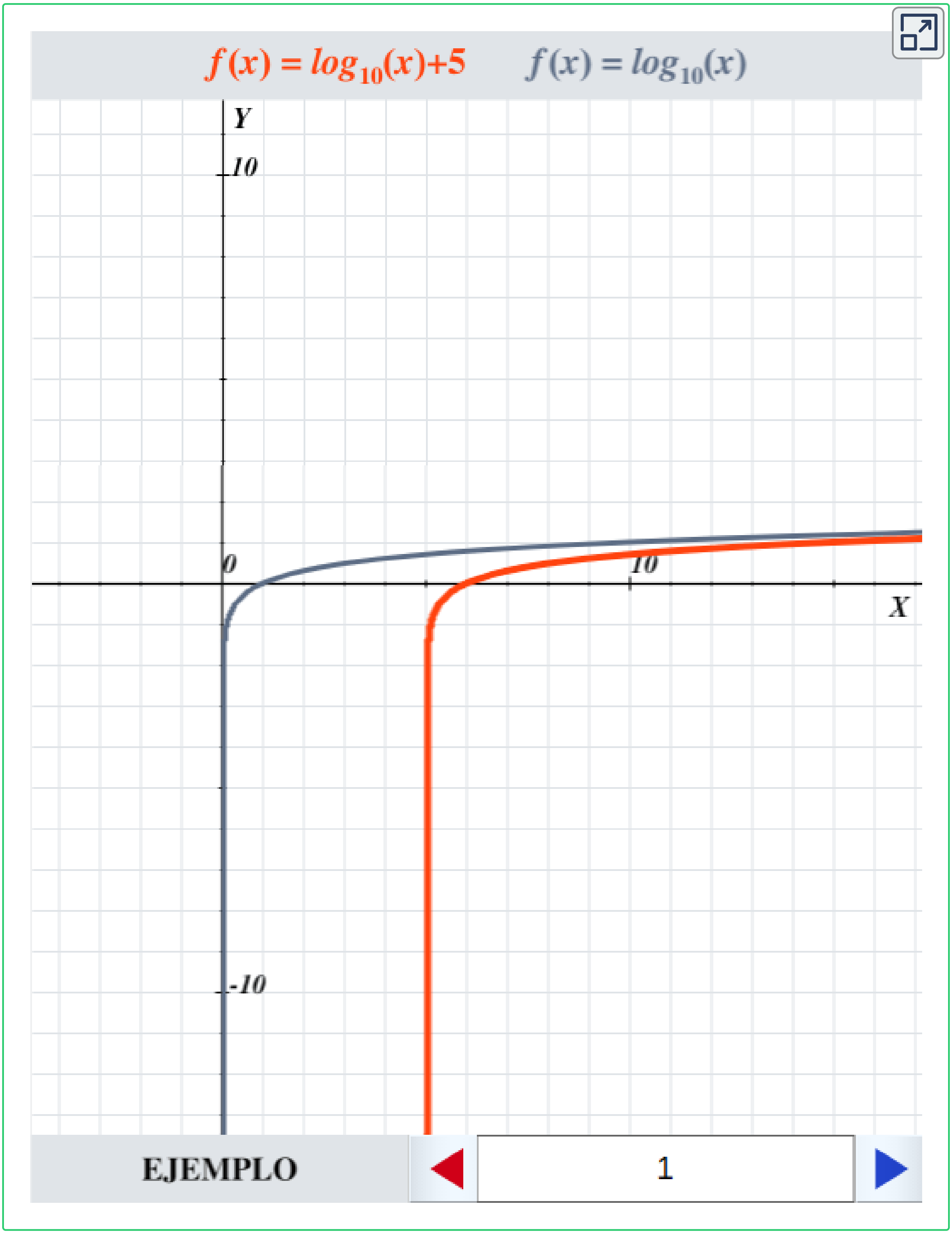
Estas funciones pueden transformarse mediante algunos parámetros, y a la función resultante se le conoce como *función de forma logarítmica*. Para hacer una traslación, se añade la constante b (vertical) y/o c (horizontal):

$$f(x) = log_a(x + b) + c$$

Con la constante k se cambia la rapidez con que la función crece o decrece:

$$f(x) = klog_a(x)$$

En la escena interactiva se presentan algunos de estos casos, observa los cambios en las gráficas.


$f(x) = log_{10}(x)+5$
$f(x) = log_{10}(x)$
Y
10
0
10
X
-10
EJEMPLO
1

9.5 Funciones logarítmicas y sus gráficas

En la escena interactiva de la derecha, introduce alguna función de las presentadas en este capítulo en el campo de texto *FUNCIÓN LOGARÍTMICA* y observa la forma de su gráfica.

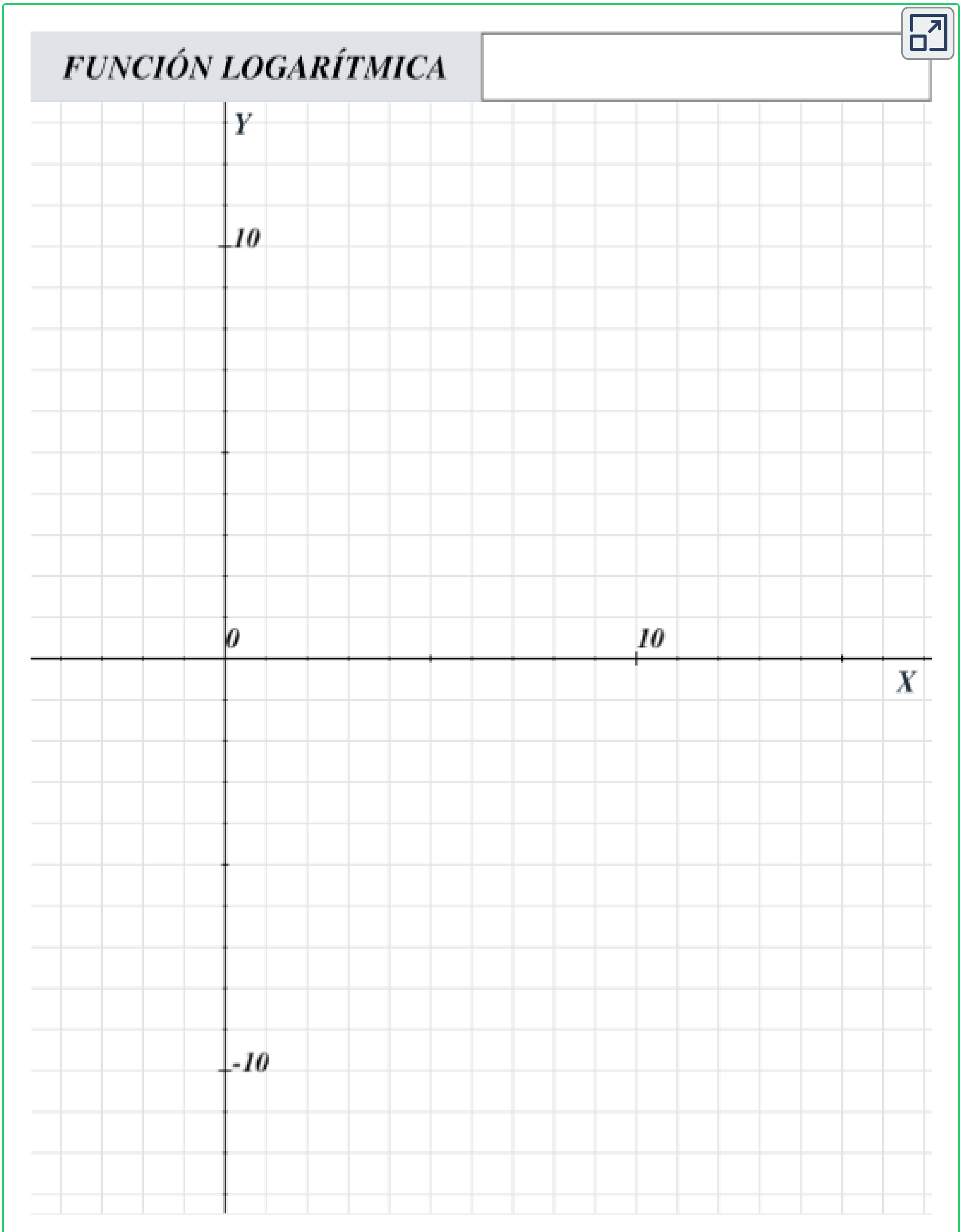
Al escribir la función hay que utilizar:
$log10(x)$ para las de base decimal.
$log(x)$ para las de base e.
$/$ para la división,
$()$ para agrupar los términos que así lo requieran, *Intro* para terminar.

Por ejemplo, la función:

$$f(x) = log_{10}(x)$$

debe escribirse:

```
log10(x)
```


FUNCIÓN LOGARÍTMICA
Y
10
0
10
X
-10

CAPÍTULO 10

Funciones trigonométricas

10.1 Definición

En las *funciones trigonométricas* a cada número real de la variable independiente x, se le asocia el valor de la razón trigonométrica del ángulo cuya medida, en radianes, es x.

En general, se definen como el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo vinculados a sus ángulos, como se muestra en la imagen de la siguiente sección.

10.2 Clasificación

Las funciones trigonométricas son las que se listan a continuación, note que entre paréntesis se indica su abreviatura:

- *Seno* (sen).
- *Coseno* (cos).
- *Tangente* (tan).
- *Cotangente* (cot).
- *Secante* (sec).
- *Cosecante* (csc).

Cabe mencionar que existen también las: *funciones trigonométricas inversas* y las *funciones trigonométricas hiperbólicas*. Sin embargo, su descripción no forma parte del material a desarrollar en este libro.

Basta indicar que las primeras, llamadas también *funciones arco*, como su nombre lo indica, son las inversas de las seis trigonométricas, y permiten determinar un ángulo partiendo de las relaciones angulares de las mismas.

Las *funciones inversas* existen sólo para ciertos intervalos del dominio de las *funciones trigonométricas*, estando éstos establecidos debidamente para cada una.

En tanto que la definición de las *funciones trigonométricas hiperbólicas*, está basada en la *función exponencial.*

La imagen que sigue muestra las relaciones angulares de acuerdo a la definición general de las *funciones trigonométricas.*

$$sen(\theta) = \frac{a}{h}$$

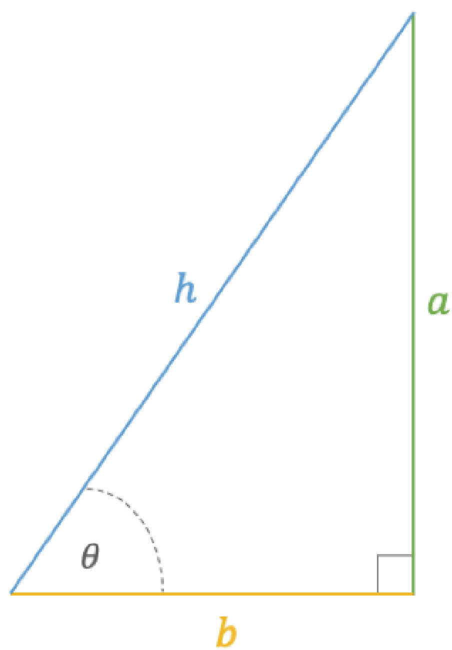
$$cos(\theta) = \frac{b}{h}$$

$$tan(\theta) = \frac{a}{b}$$

$$cot(\theta) = \frac{b}{a}$$

$$sec(\theta) = \frac{h}{b}$$

$$csc(\theta) = \frac{h}{a}$$



Como puede apreciarse en ella:

- h denota a la hipotenusa.
- a al cateto opuesto.
- b al cateto adyacente.

Las *funciones trigonométricas* son *funciones periódicas*.

En las primeras cuatro el período es igual a 2π, en tanto que en las dos últimas es igual a π.

Así, se tiene que:

$$sen(\theta + 2\pi) = sen(\theta)$$

$$cos(\theta + 2\pi) = cos(\theta)$$

$$tan(\theta + \pi) = tan(\theta)$$

$$cot(\theta + \pi) = cot(\theta)$$

$$sec(\theta + 2\pi) = sec(\theta)$$

$$csc(\theta + 2\pi) = csc(\theta)$$

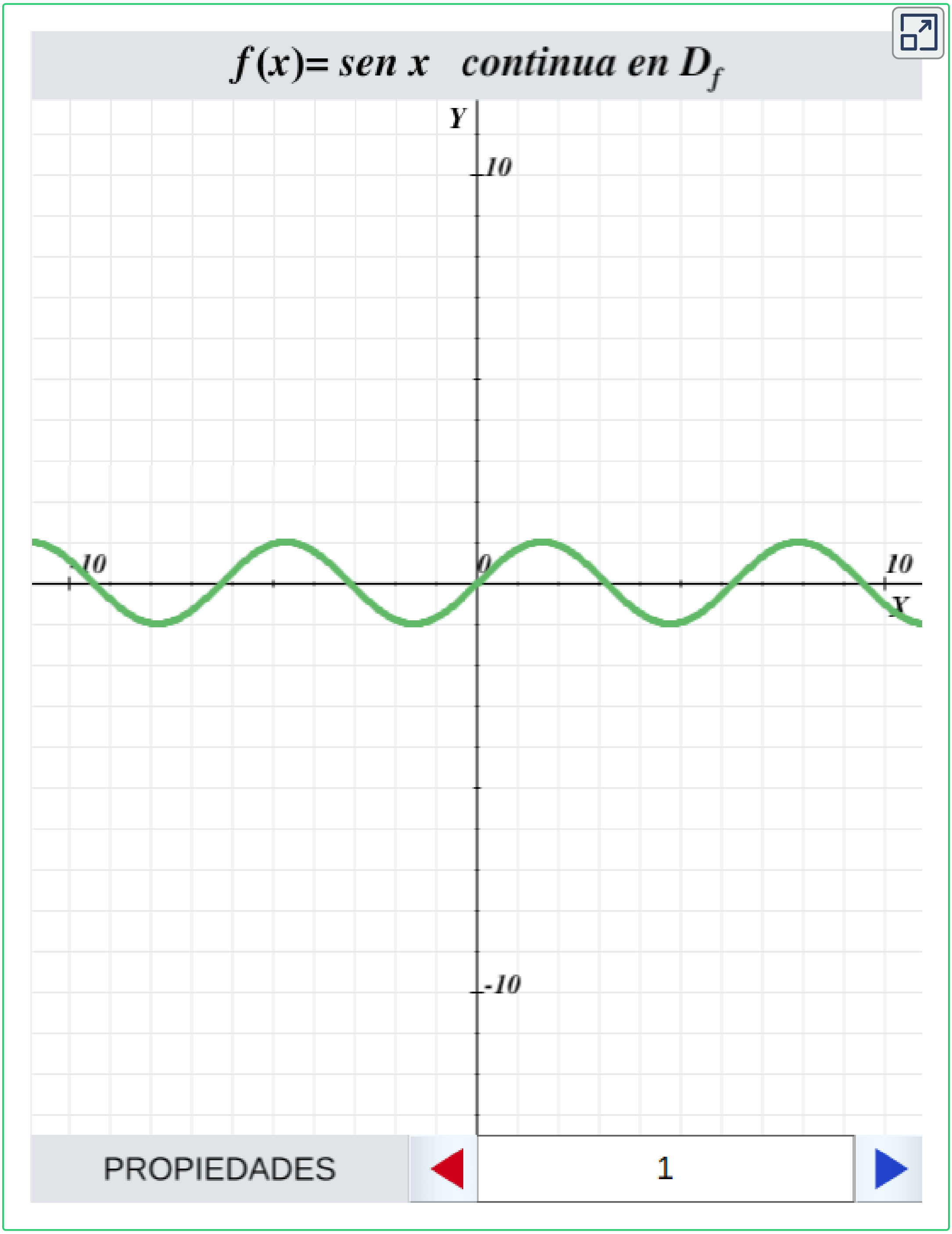
A continuación se describen las propiedades de cada una de estas funciones.

10.3 Función seno

En la *función seno* a cada número real de la variable independiente x se asocia el valor del seno del ángulo cuya medida, en radianes, es dicha variable: $f(x) = sen\ x$

Tiene las siguientes propiedades:

- Es continua en todo su dominio.
- Su dominio es $(-\infty, \infty)$.
- Su rango es $[-1, 1]$.
- Es una función con período 2π.
- Es positiva en el intervalo $(0, \pi)$.
- Es negativa en el intervalo $(\pi, 2\pi)$.
- Es estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.
- Es estrictamente decreciente en $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- Presenta un valor máximo, $f(x) = 1$, en $x = \frac{\pi}{2}$.
- Presenta un valor mínimo, $f(x) = -1$, en $x = \frac{3\pi}{2}$.
- Se anula en los puntos en que $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Por ser *función impar*, es simétrica respecto al origen y se cumple que $sen(x) = -sen(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.


f(x)= sen x   continua en D_f
Y
10
-10
10
0
10
X
-10
PROPIEDADES
1

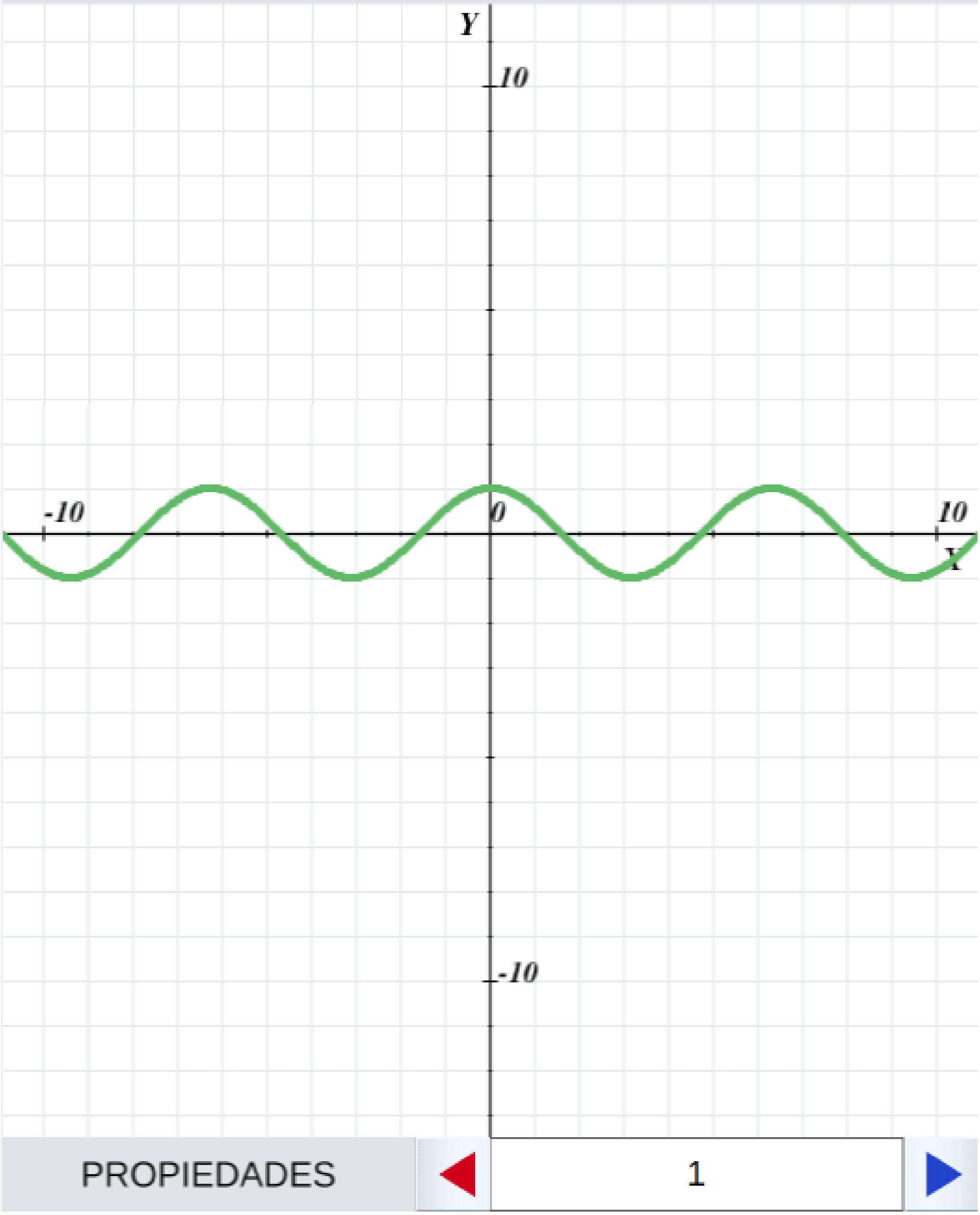
10.4 Función coseno

En la *función coseno* a cada número real de la variable independiente x se asocia el valor del coseno del ángulo cuya medida, en radianes, es dicha variable: $f(x) = cos\ x$

Tiene las siguientes propiedades:

- Es continua en todo su dominio.
- Su dominio es $(-\infty, \infty)$.
- Su rango es $[-1, 1]$.
- Es una función con período 2π.
- Es positiva en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.
- Es negativa en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
- Es estrictamente creciente en $[\pi, 2\pi]$.
- Es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$.
- Presenta valores máximos, $f(x) = 1$, en $x = 0$ y $x = 2\pi$.
- Presenta un valor mínimo, $f(x) = -1$, en $x = \pi$.
- Se anula en los puntos en que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Por ser *función par*, es simétrica respecto al eje Y y se cumple que $cos(x) = cos(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \cos x \quad continua\ en\ D_f$

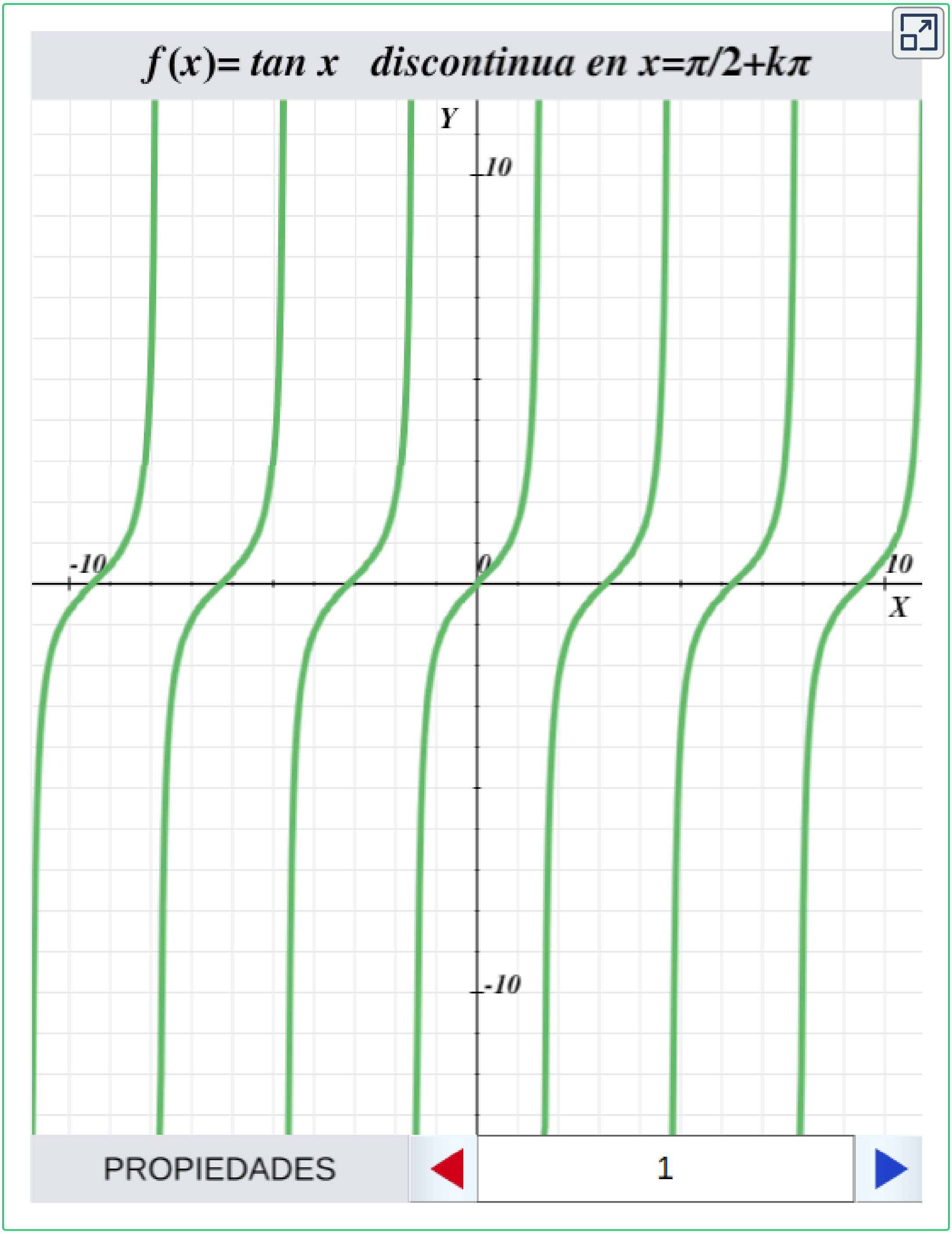


10.5 Función tangente

En la *función tangente* a cada número real de la variable independiente x se asocia el valor de la tangente del ángulo cuya medida, en radianes, es dicha variable: $f(x) = tan\ x$, recordando que $tan\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$.

Tiene las siguientes propiedades:

- Es discontinua.
- Su dominio es $x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Su rango es $(-\infty, \infty)$.
- Es una función con período π.
- Es positiva en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.
- Es negativa en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.
- Es estrictamente creciente en todo intervalo en el que está definida.
- No presenta valores máximos ni mínimos.
- Se anula en los puntos en que $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- • Por ser *función impar*, es simétrica respecto al origen y se cumple que $tan(x) = -tan(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.

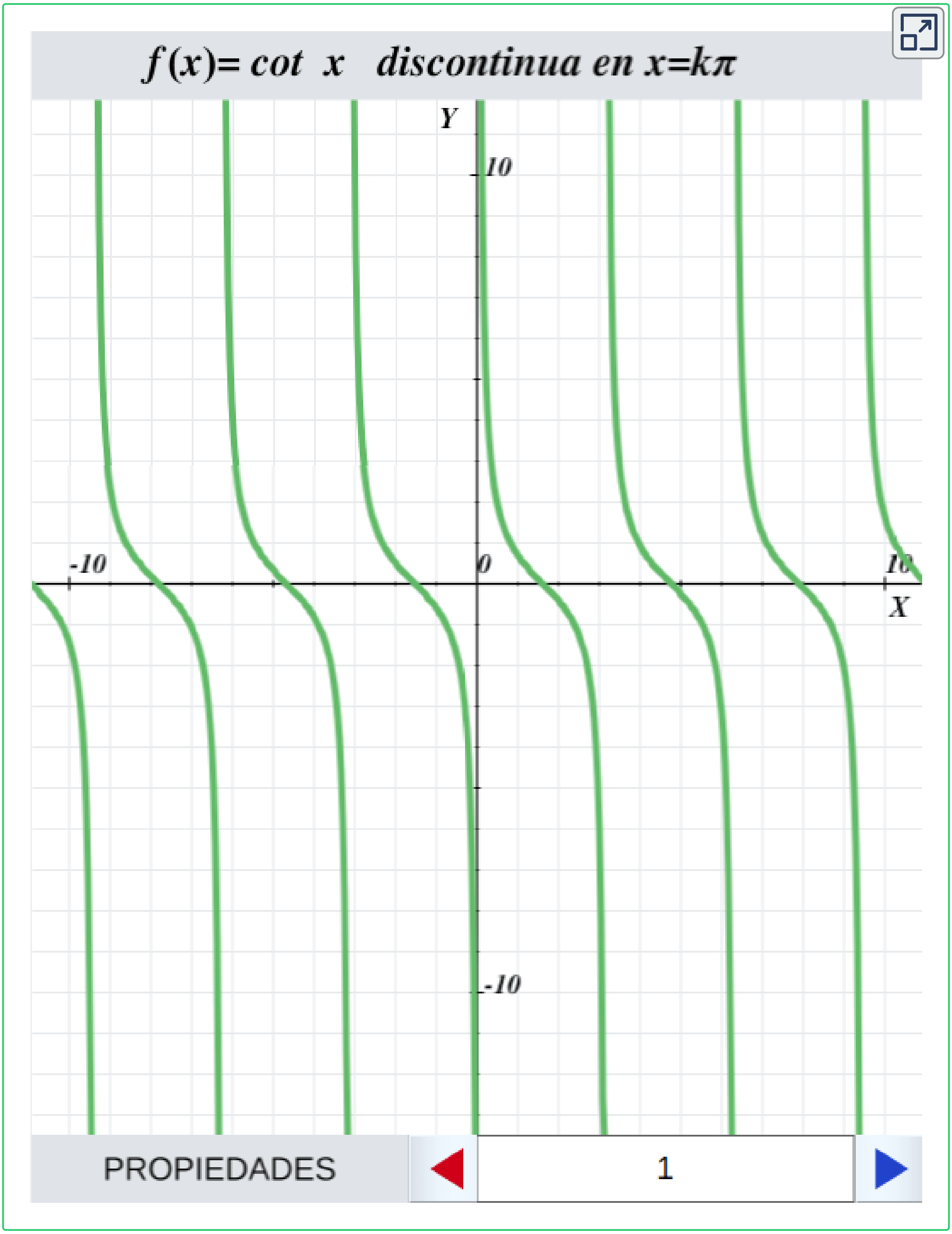

$f(x)$= tan x   discontinua en $x=\pi/2+k\pi$
Y
10
-10
0
10
X
-10
PROPIEDADES
1

10.6 Función cotangente

En la *función cotangente* a cada número real de la variable independiente x se asocia el valor de la cotangente del ángulo cuya medida, en radianes, es dicha variable: $f(x) = cot\ x$, recordando que $cot\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}$

Tiene las siguientes propiedades:

- Es discontinua.
- Su dominio es $x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Su rango es $(-\infty, \infty)$.
- Es una función con período π.
- Es positiva en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$.
- Es negativa en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.
- Es estrictamente decreciente en todo intervalo en el que está definida.
- No presenta valores máximos ni mínimos.
- Se anula en los puntos en que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Por ser *función impar*, es simétrica respecto al origen y se cumple que $tan(x) = -tan(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.

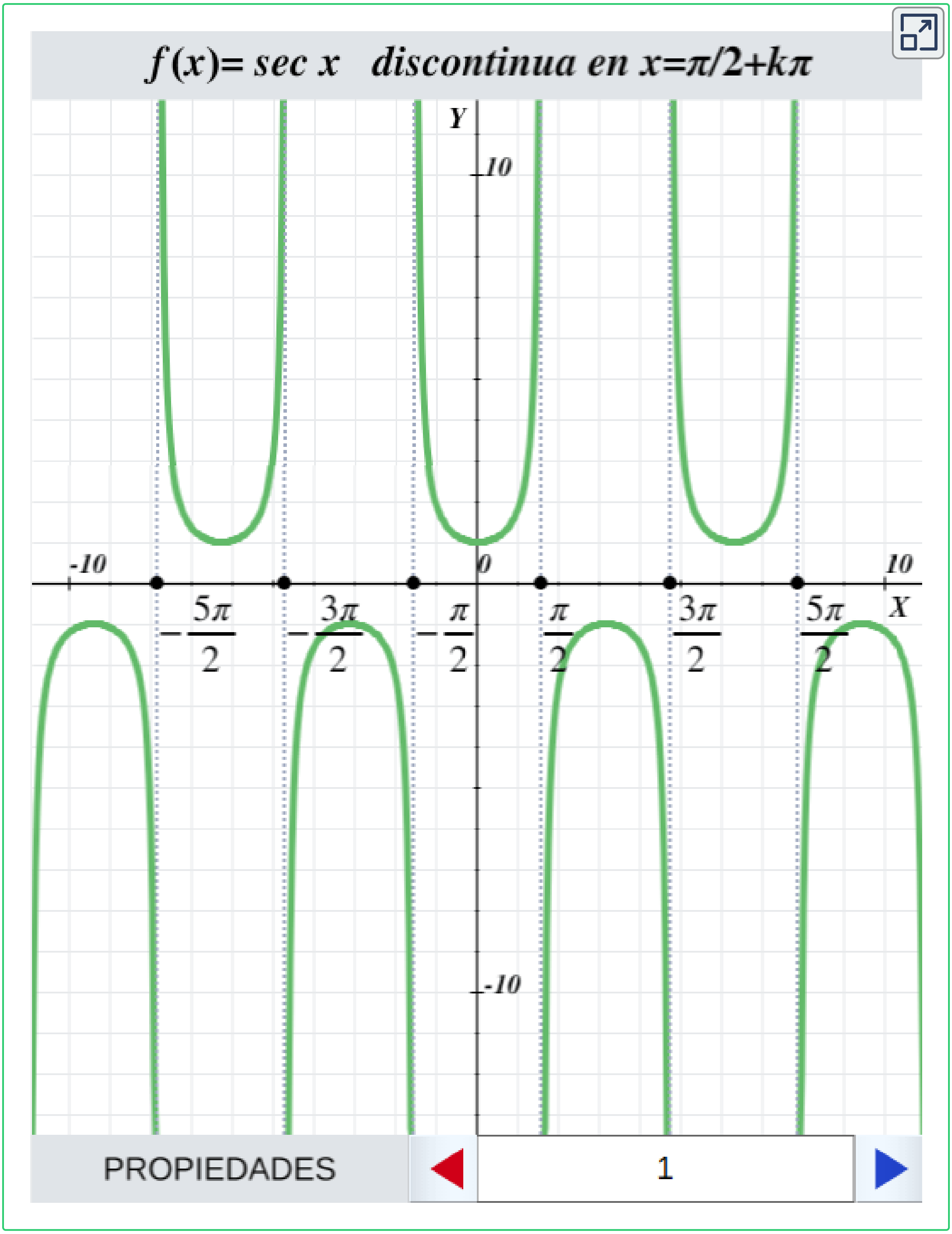

f (x)= cot x discontinua en x=kπ
Y
10
-10
0
10
-10
X
PROPIEDADES
1

10.7 Función secante

En la *función secante* a cada número real de la variable independiente x se asocia el valor de la secante del ángulo cuya medida, en radianes, es dicha variable: $f(x) = sec\ x$, recordando que $sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$

Tiene las siguientes propiedades:

- Es discontinua.
- Su dominio es $x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Su rango es $(-\infty, \infty)$.
- Es una función con período 2π.
- Es estrictamente creciente en $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.
- Es estrictamente decreciente en $[\pi, \frac{3\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.
- Presenta un valor máximo, $f(x) = -1$, en $x = \pi$.
- Presenta valores mínimos, $f(x) = 1$, en $x = 0$ y $x = 2\pi$.
- No se anula en ningún punto.
- Por ser *función par*, es simétrica respecto al eje Y y se cumple que $sec(x) = sec(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.

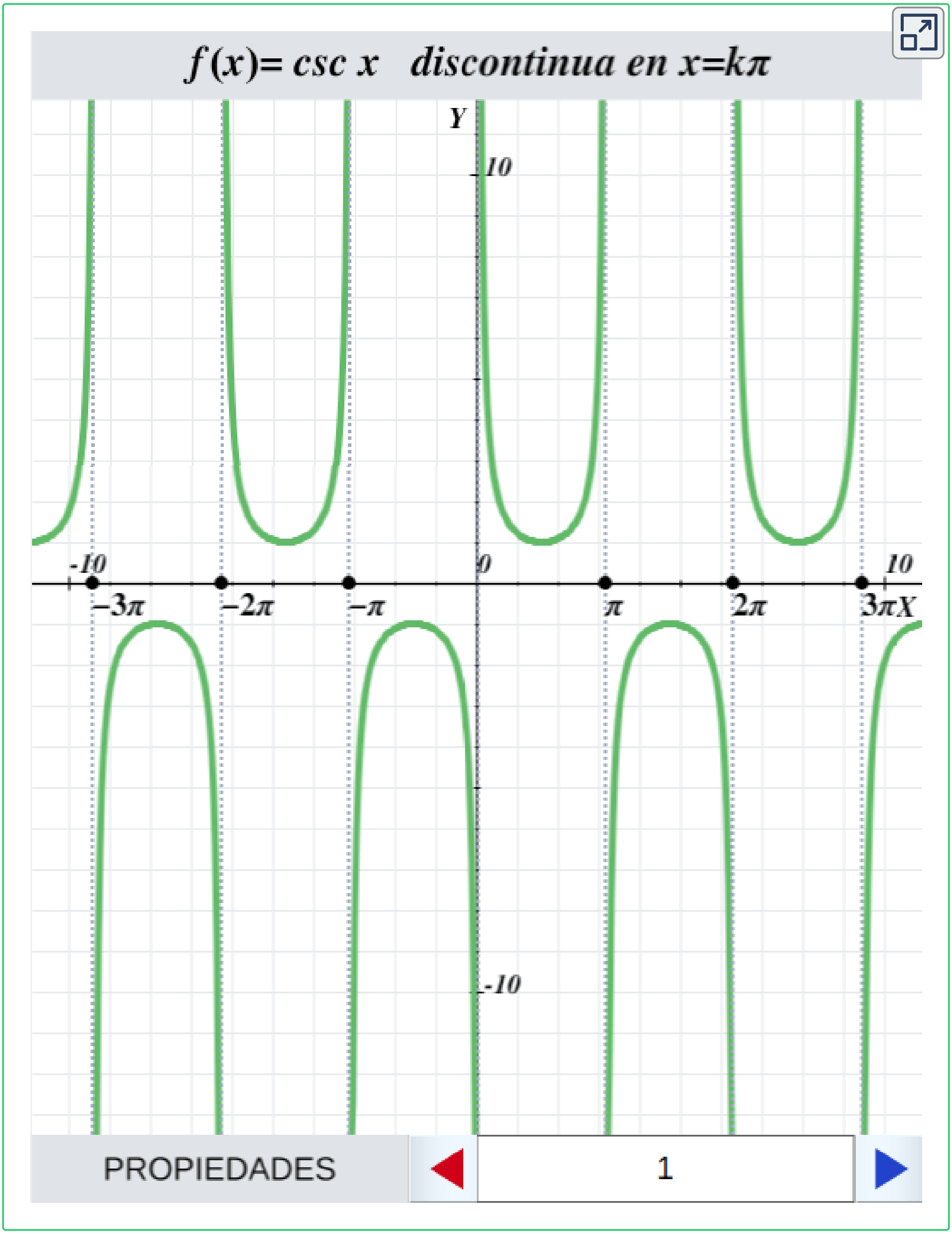

$f(x)$= sec x discontinua en x=π/2+kπ
Y
10
-10
0
10
X
$-\frac{5\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{2}$
-10
PROPIEDADES
1

10.8 Función cosecante

En la *función cosecante* a cada número real de la variable independiente x se asocia el valor de la cosecante del ángulo cuya medida, en radianes, es dicha variable: $f(x) = csc\ x$, recordando que $csc\ x = \frac{1}{sen\ x}$

Tiene las siguientes propiedades:

- Es discontinua.
- Su dominio es $x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Su rango es $(-\infty, \infty)$.
- Es una función con período 2π.
- Es estrictamente creciente en $[\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2}]$.
- Es estrictamente decreciente en $(0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.
- Presenta un valor máximo, $f(x) = -1$, en $x = \frac{3\pi}{2}$.
- Presenta valores mínimos, $f(x) = 1$, en $x = \frac{\pi}{2}$.
- No se anula en ningún punto.
- Por ser *función impar*, es simétrica respecto al origen y se cumple que $csc(x) = -csc(-x); \forall x \in \mathbb{R}$.



f(x)= csc x discontinua en x=kπ
Y
10
-10
-10
0
10
−3π
−2π
−π
π
2π
3π
X
PROPIEDADES
1

10.9 Funciones trigonométricas y sus parámetros

Las funciones trigonométricas tienen tres parámetros fundamentales:

- *Amplitud* (A).
- *Frecuencia* (k).
- *Fase* (α).

La *amplitud* sirve para modificar el tamaño de la función.

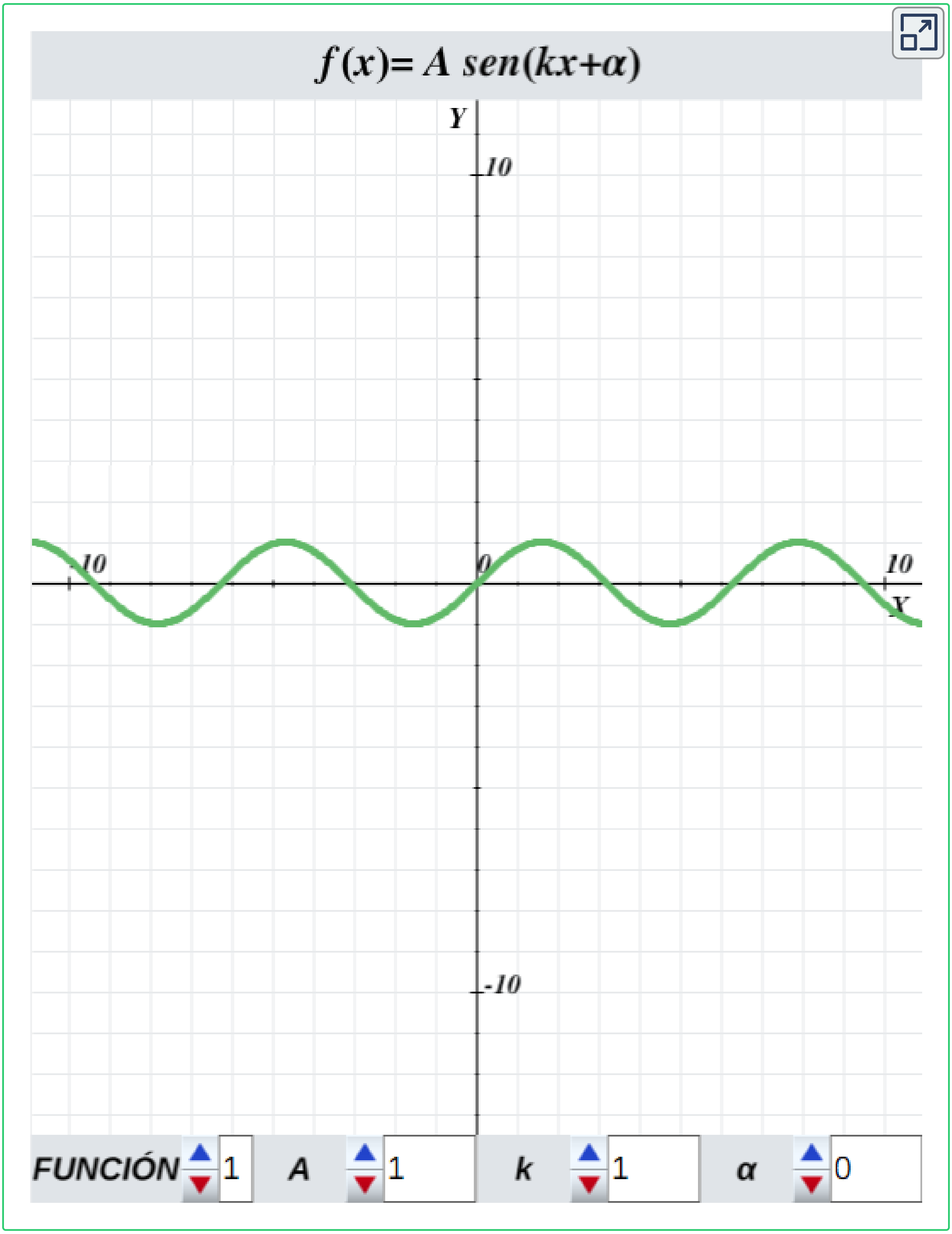
Con la *frecuencia* se puede cambiar el grado de repetición.

La *fase* permite el desplazamiento de la función. Para adelantarla se utiliza el signo $+$, y hay un corrimiento hacia la izquierda. Para atrasarla se emplea el signo $-$, y el deslizamiento es a la derecha.

Así, considerando que $A \neq 0$ y $k \neq 0$, estas funciones pueden escribirse como:

$$f(x) = A\ sen(kx + \alpha)$$
$$f(x) = A\ cos(kx + \alpha)$$
$$f(x) = A\ tan(kx + \alpha)$$
$$f(x) = A\ cot(kx + \alpha)$$
$$f(x) = A\ sec(kx + \alpha)$$
$$f(x) = A\ csc(kx + \alpha)$$

En la escena interactiva se presentan algunos ejemplos, que permiten observar la manera en que estos parámetros afectan la gráfica de la función.



f(x)= A sen(kx+α)
Y
10
-10
10
0
10
X
-10
FUNCIÓN
1
A
1
k
1
α
0

10.10 Funciones trigonométricas y sus gráficas

En la escena interactiva de la derecha, introduce alguna función de las descritas en este capítulo en el campo de texto *FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA*, y observa la forma de su gráfica.

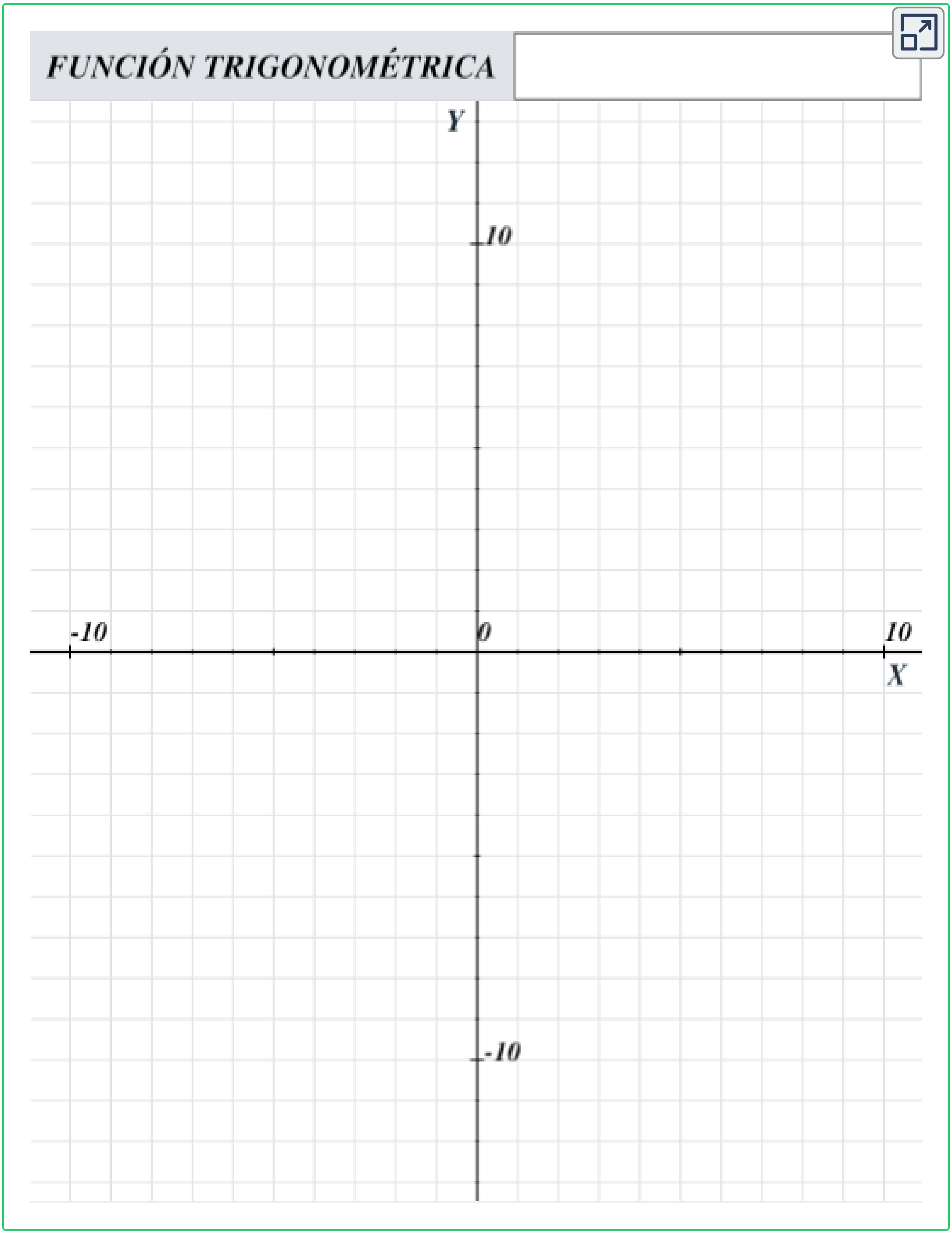
Al escribir la función hay que utilizar:
^ para la potencia de la variable independiente,
$/$ para la división,
$()$ para agrupar los términos que así lo requieran, *Intro* para terminar.

Por ejemplo, la función

$$f(x) = 5cos(2x+7)$$

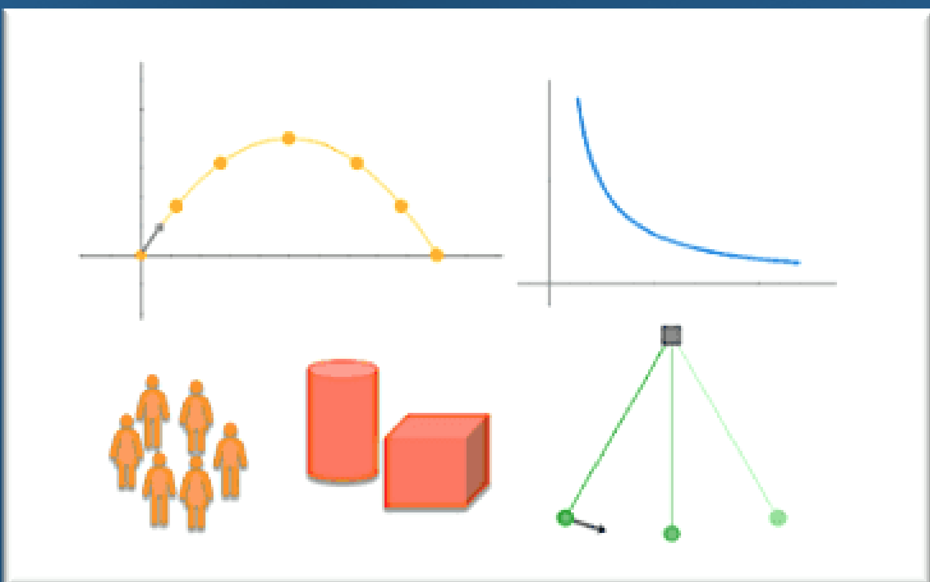
debe escribirse:

```
5cos(2x+7)
```


FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA
Y
10
-10
0
10
X
-10

CAPÍTULO 11

Utilización



La importancia de las funciones de una variable real, radica en la gran utilidad que presentan para diversos aspectos de la vida cotidiana. A continuación se mencionan algunos ejemplos, por tipo de función.

Las funciones polinomiales, en general, son muy útiles para analizar y resolver situaciones prácticas, mediante el desarrollo de modelos que las describan, tales como:

- Calcular la distancia recorrida y el tiempo requerido para hacerlo.
- Determinar la trayectoria de una pelota.
- Maximizar la productividad agrícola.
- Conocer la efectividad de un anuncio publicitario.
- Calcular la relación entre la tasa metabólica con la masa de vertebrados.
- Optimizar la relación productividad vs número de empleados.

En particular, las que se emplean comúnmente para modelar diversos fenómenos reales, son las funciones de grado dos.

Las *funciones racionales* son utilizadas para interpolar resultados de funciones más complejas como son:

- El comportamiento de los gases, con referencia a su volumen en relación con la presión.
- La determinación de costos unitarios, basándose en la producción mensual del producto.
- La relación entre el desempleo y los salarios.

Las *funciones exponenciales* tienen gran aplicación en diversas disciplinas, entre las que se encuentran:

- Administración.
- Biología.
- Economía.
- Física.
- Ingeniería.
- Química.

Entre los fenómenos de comportamiento exponencial están:

- Los crecimientos demográficos.
- La tasa de crecimiento de acuerdo a la temperatura de especies marinas.
- La capitalización a interés compuesto.
- La reproducción de una colonia de bacterias.
- La desintegración de una sustancia radiactiva.
- La inflación.

Las *funciones logarítmicas* se emplean para:

- Calcular la inensidad del sonido percibido a una distancia específica.
- Calcular la intensidad de un sismo.
- Calcular el volumen de un sólido.
- Determinar la brillantez y magnitud de una estrella o planeta.

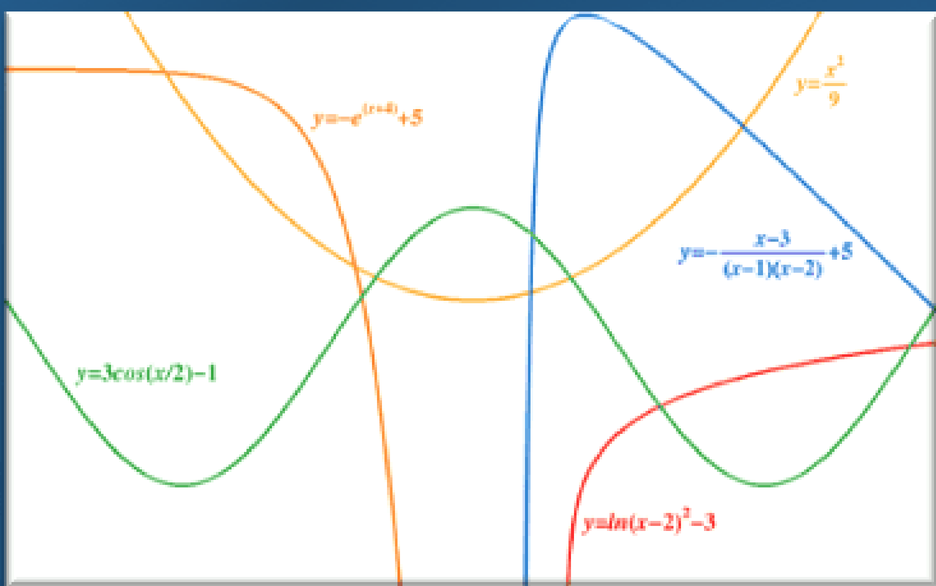
En tanto que las *funciones trigonométricas* son relevantes especialmente en las siguientes disciplinas:

- Astronomía
- Cartografía.
- Física.
- Naútica.
- Telecomunicaciones.

Particularmente las de *seno* y *coseno*, son muy útiles para analizar fenómenos periódicos como son:

- El movimiento planetario.
- La oscilación de péndulos.
- La corriente eléctrica alterna.
- La vibración de cuerdas.
- Los ciclos biológicos.
- El cálculo de órbitas planetarias.
- El cálculo de distancias en un mapa.

Fuentes



Capítulo 1. Introducción

Textos

- Aristóteles
- Benjamín Galán Atienza, La historia de las matemáticas. De dónde vienen y hacia dónde se dirigen, 26-6-2012
- Función
- Galileo Galilei
- Historia y aplicación de las matemáticas
- Ian Stewart, Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años
- José M. Méndez Pérez, Las matemáticas: su historia, evolución y aplicaciones, Universidad de la Laguna, España, 2003
- Joseph Fourier
- Matemáticas
- Pitágoras

Imágenes

- Aristóteles en la La escuela de Atenas, por Rafael Sanzio, 1509
- Cómo proteger tu información sensible con la criptografía asimétrica
- Datos, Información, Conocimiento
- Detalle del retrato de Galileo Galilei pintado por Justus Sustermans en 1636
- #Entrevista: Las Matemáticas y su importancia en Biología
- Joseph Fourier, 1839-1840
- Matemática, Aplicaciones de la matemática
- Monedas
- Música y matemáticas

- Pitágoras, detalle de La escuela de Atenas, de Rafael Sanzio, 1509
- Prisma empresarial: Crecimiento económico sin veleta
- ¿Qué es el diseño gráfico y para qué sirve?
- Redes
- Rombicuboctaedro hueco en perspectiva (Leonardo da Vinci - Internet Archive identifier)

Capítulo 2. Conjuntos

Textos

- Álgebra de conjuntos
- Charles C. Pinter, A Book of Set Theory, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 1971
- Conjunto
- Diagrama de Venn
- George Cantor
- Felix Hausdorff
- John Venn
- Notación matemática
- Teoría de conjuntos (Noción y determinación de conjuntos)

Imágenes

- Felix Hausdorff
- George Cantor
- Iluminación de jardines. Ideas sobre cómo iluminar árboles
- John Venn

Capítulo 3. Números reales

Textos

- Definición de Números
- Definición de números reales
- Numeración egipcia
- Número
- Números reales
- Propiedades de los Números Reales
- Recta real
- Sistemas de numeración a lo largo de la historia

Imágenes

- Numeración egipcia
- Ojo de Horus

Capítulo 4. Concepto de función

Textos

- Arquímedes
- Austen Henry Layard
- Bernhard Riemann
- Carmen Martínez A., El concepto de función en la obra de Euler: un recorrido a través de la constitución del Anáisis Matemático Moderno, Miscelánea Matemática 46 (2008) 73–91
- Édouard Jean-Baptiste Goursat

- El papel de las matemáticas en la física. Las aportaciones de Euler y Lagrange
- Euclides
- Eudoxo de Cnidos
- Evolución del Concepto Función hasta el Siglo XX
- Función
- Función (matemática)
- George Smith (asiriólogo)
- Gottfried Leibniz
- Henri León Lebesgue
- Henry Rawlinson
- History of the function concept
- Isaac Newton
- João Pedro da Ponte, La historia del concepto de función y algunas implicaciones educativas
- Johann Bernoulli
- Joseph-Louis Lagrange
- Karl Weierstrass
- Leonhard Euler
- Línea de tiempo de la funciones matemáticas
- Maurice Fréchet
- Michael Spivak
- Nicolas de Condorcet
- Nicolás Oresme
- Peter Gustav Lejeune Dirichlet
- Regla de correspondencia
- Representaciones de una Función

- Rosa María Farfán y Mario A. García, El Concepto De Función: Un Breve Recorrido Epistemológico, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 18
- René Descartes
- The function concept
- Thomas Bradwardine
- Ugalde, W. J., Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje, Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 14 (1)
- Una breve historia de las funciones

Imágenes

- An Image of Georg Friedrich Bernhard Riemann taken in 1863
- Arquímedes
- Cuneiform tablet with observations of Venus
- Dirichlet
- Euclides
- Eudoxo de Cnidos
- Frans Hals - Portret van René Descartes
- Fréchet
- George Smith
- Gottfried Wilhelm Leibniz, Bernhard Christoph Francke
- Henri Lebesgue (1875-1941)
- Henry Creswicke Rawlinson a la edad de 40 años, pintura de Henry Wyndham Phillips
- Johann Bernoulli
- Joseph-Louis de Lagrange
- Karl Weierstrass

- Leonhard Euler
- Marie-Jean-Antoine Nicolas de Caritat, marqués de Condorcet
- Michael Spivak
- Nicole d'Oresme
- Papiro de Ahmes o papiro Rhind
- Retrato de Isaac Newton (1642-1727)
- Sir Austen Henry Layard. Photograph by the London
- Thomas Bradwardine

Capítulo 5. Función de una variable real

Textos

- Continuidad de Funciones
- Andrés Castro H, Jasón Ureña A., Olman Trejos M., Funciones de variable real, 2014
- Funciones Matemáticas
- Propiedades funciones principales
- Tipos de Función
- Tipos de funciones matemáticas

Capítulo 6. Funciones polinomiales

Textos

- Función polinomial
- Funciones polinomiales. Ceros de funciones polinomiales de grado 2

- Función polinómica
- Función polinómica
- Funciones polinómicas

Capítulo 7. Funciones racionales

Textos

- Función racional
- Funciones racionales
- 4.5 Funciones racionales
- Funciones racionales ejemplos

Capítulo 8. Funciones exponenciales

Textos

- Función exponencial
- Funciones exponenciales
- Introducción a las funciones exponenciales
- Número e
- John Napier
- Walter Rudin

Imágenes

- John Napier
- Walter Rudin

Capítulo 9. Funciones logarítmicas

Textos

- Funciones logarítmicas
- Funciones logarítmicas
- Introducción a las funciones logarítmicas
- Logaritmo
- Propiedades de los logaritmos

Capítulo 10. Funciones trigonométricas

Textos

- Función trigonométrica
- Qué son las funciones trigonométricas
- Trigonometría

Capítulo 11. Utilización

Textos

- Aplicaciones de las funciones en la vida cotidiana
- Aplicación técnica y práctica de las funciones
- Las funciones en la vida cotidiana (1ª parte)

DESCARTES
matemáticas interactivas